S01t.- Introducción Asignatura.

Mejora 1415 ....

University Copy For Library Use

• Objetivos de esta sesión

- ➢ Presentar a los responsables de teoría y laboratorio.
- ➢ Presentar la asignatura y método de evaluación.
- ➢ Realizar una primera clase sobre la importancia de la conversión de unidades.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

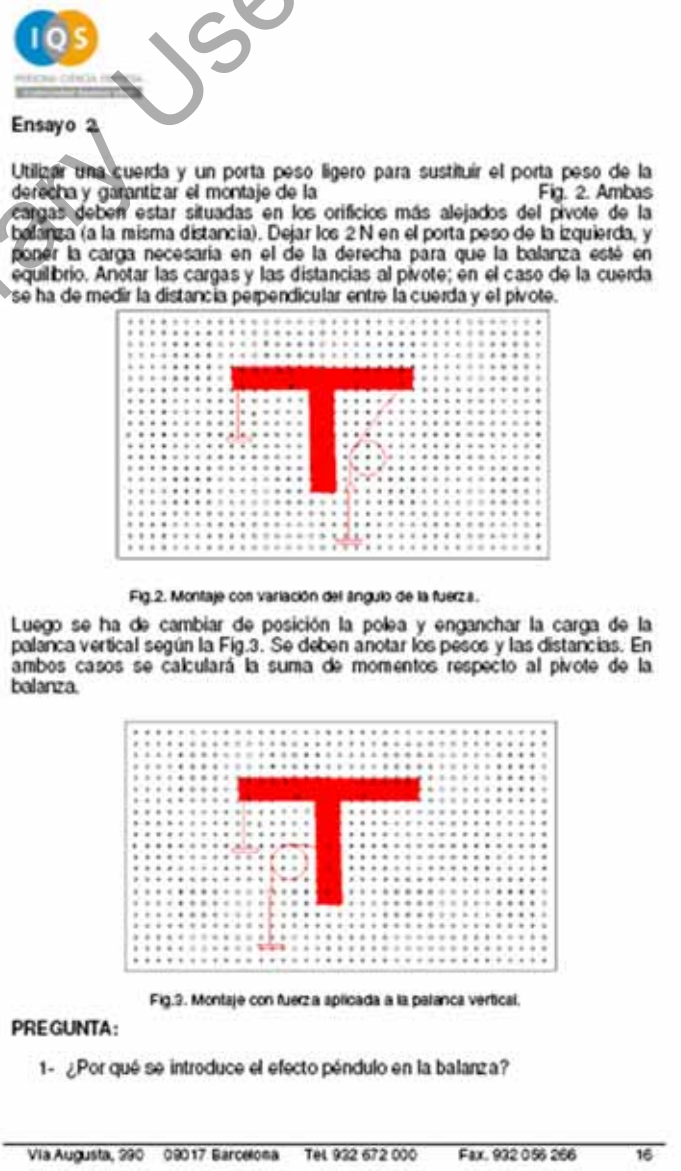
• Laboratorios: Mercedes Peña

La información relativa a los laboratorios está recopilada en Blackboard.

En este directorio encontraréis un documentos con todos los laboratorios a realizar:

➢ Dossier_lab_12_13.doc.pdf

Laboratorio SEAT temporalmente en pista de fútbol. Acceso por puente y seguir hasta ir detrás de planta piloto.



Ensayo 2

Utilizar una cuerda y un porta peso ligero para sustituir el porta peso de la derecha y garantizar el montaje de la Fig. 2. Ambas cargas deben estar situadas en los orificios más alejados del pivote de la balanza (a la misma distancia). Dejar los 2 N en el porta peso de la izquierda, y poner la carga necesaria en el de la derecha para que la balanza esté en equilibrio. Anotar las cargas y las distancias al pivote; en el caso de la cuerda se ha de medir la distancia perpendicular entre la cuerda y el pivote.

Fig.2. Montaje con variación del ángulo de la fuerza.

Luego se ha de cambiar de posición la polea y enganchar la carga de la palanca vertical según la Fig.3. Se deben anotar los pesos y las distancias. En ambos casos se calculará la suma de momentos respecto al pivote de la balanza.

Fig.3. Montaje con fuerza aplicada a la palanca vertical.

PREGUNTA:

1- ¿Por qué se introduce el efecto péndulo en la balanza?

Vía Augusta, 390 08017 Barcelona Tel. 932 672 000 Fax. 932 056 266 16

University Copy For Library Use

• Presentación Profesor Andrés García Granada

Titulación:

➢ Ingeniero Industrial Superior en la especialidad de Mecánico de Estructuras por la ETSEIB.

➢ Ph.D. University of Bristol en el departamento de materiales y resistencia estructural.

Experiencia laboral:

➢ Ingeniero calculista (CAE) en EDAG y los últimos seis años en SEAT Centro Técnico incluyendo 2 años en AUDI - Ingolstadt.

Experiencia docente:

➢ Clases de Expresión Gráfica usando DAO con SolidWorks 2006- como profesor asociado en UPC para alumnos primer curso primer y segundo cuatrimestre.

➢ Clases de DAO en IQS con Catia v5 y SW desde 2007 para alumnos de cuarto curso primer cuatrimestre como asignatura optativa.

➢ Clases de Dibujo Industrial en IQS con SW desde 2007 para alumnos de segundo curso segundo cuatrimestre.

➢ Clases de Mecánica desde 2008.

➢ Clases de Cálculo de Elementos de Máquinas desde 2011.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Documentación.

En el día a día iremos usando una carpeta compartida en Dropbox.

Toda la documentación del año pasado está disponible en Blackboard.

Además se cuelga la programación de este año.

University Copy For Library Use

- Evaluación.

➢ Examen de Febrero 4.30p. (8.50 sin controles). **(NOTA MÍNIMA 5.00)**

- 3.50p. Problemas de estática y dinámica.
- 0.80p. Examen tipo test sobre los diferentes módulos vistos en el curso.

➢ Controles opcionales a realizar en clase por valor de 4.20p. (0.00 sin controles). **(NOTA MÍNIMA 5.00)**

- 1.00p. Control ejes principales.
- 1.10p. Control estática.
- 1.00p. Control potencia.
- 1.10p. Control dinámica.

➢ Prácticas obligatorias en laboratorio 1.50p. **(NOTA MÍNIMA 5.00)**

- 1.50p. informe de laboratorios a entregar 5 días después laboratorio

University Copy For Library Use

• Normativa

➢ La asistencia a clase es obligatoria. Se aceptan 14 ausencias de las sesiones programadas (21%).

➢ Otras normativas se irán recogiendo y publicando durante el desarrollo del curso.

University Copy For Library Use

- Conceptos a asumir en Mecánica Aplicada.
  - Introducción
  - Propiedades Geométricas y cargas distribuidas
  - Estática
  - Cinemática del sólido rígido
  - Cinética del sólido rígido
  - Energía y trabajo
  - Cinética del sólido rígido en el espacio
  - Vibraciones mecánicas.

University Copy For Library Use

- Planificación.

			m y v 10-11, j 11.30-12.30
	03-09-		teoria Andres
j	19-09-13	11.30-12.25	S01t-intro
v	20-09-13	10.00-10-55	S02t-vectores-momentos
j	26-09-13	11.30-12.25	S03t-ej-momentos
v	27-09-13	10.00-10-55	S04t-equilibrio-solido
m	01-10-13	10.00-10.55	S05t-centroides
j	03-10-13	11.30-12.25	S06t-momentos-superficie
v	04-10-13	10.00-10-55	7t-control1-ejes-principales (1.00
m	08-10-13	10.00-10.55	S08t-cargas-distribuidas
j	10-10-13	11.30-12.25	S09t-solidos-presion
v	11-10-13	10.00-10-55	S10t-ej-cargas-distribuidas
m	15-10-13	10.00-10.55	S11t-esfuerzos-internos
j	17-10-13	11.30-12.25	S12t-estructuras
v	18-10-13	10.00-10-55	S13t-hilos-extensibles
m	22-10-13	10.00-10.55	S14t-ej-hilos-extensibles
j	24-10-13	11.30-12.25	S15t-control2-estatica (1.10 p.)
v	25-10-13	10.00-10-55	S16t-mov-traslacion
m	29-10-13	10.00-10.55	S17t-mov-general
j	31-10-13	11.30-12.25	S18t-ej-mov-plano-general
m	05-11-13	10.00-10.55	S19t-ej-mov-lineal
j	07-11-13	11.30-12.25	S20t-ej-poleas
v	08-11-13	10.00-10-55	S21t-rodadura_ej_cinematica_RB
m	12-11-13	10.00-10.55	S22t-ej-coriolis
j	14-11-13	11.30-12.25	S23t-cinetica-particula
v	15-11-13	10.00-10-55	S24t-ej-cinetica-rotacion
m	19-11-13	10.00-10.55	S25t-ej-energia-particula
j	21-11-13	11.30-12.25	26t-ej-cantidad_movimiento-particu
v	22-11-13	10.00-10-55	S27t-ej-motor
m	26-11-13	10.00-10.55	S28t-control3-dinamica (1.00p.)
j	28-11-13	11.30-12.25	S29t-ej_momentos_inercia
v	29-11-13	10.00-10-55	S30t-ej_productos-inercia
m	03-12-13	10.00-10.55	S31t-ej-mov_plano_fuerzas
j	05-12-13	11.30-12.25	S32t-energia_cinetica_SR
m	10-12-13	10.00-10.55	S33t-energia_mov_plano
j	12-12-13	11.30-12.25	S34t-momento_mov_plano
v	13-12-13	10.00-10-55	S35t-vibraciones_libres
m	17-12-13	10.00-10.55	S36t-vibraciones_forzadas
j	19-12-13	11.30-12.25	S37t-ej_vibraciones
v	20-12-13	10.00-10-55	S38t-control4-dinamica (1.10 p.)
m	07-01-14	10.00-10.55	S39t-ej-estatica
j	09-01-14	11.30-12.25	S40t-ej-estatica
v	10-01-14	10.00-10-55	S41t-ej-dinamica
m	14-01-14	10.00-10.55	S42t-ej-dinamica
j	16-01-14	11.30-12.25	S43t-simulacro-examen
v	17-01-14	10.00-10-55	S44t-repaso-asignatura
x	22-01-14		EXF-MA (4.3p/8.5p)

University Copy For Library Use

• Bibliografía.

➢ "Ingeniería Mecánica. Estática", *Riley, W.F.; Sturges, L.D.;* Reverté, (1995), ISBN 84-291-4255-X, IQS-531 (076.1)-Ril.

➢ "Ingeniería Mecánica. Dinámica", *Riley, W.F.; Sturges, L.D.;* Reverté, (1996), ISBN 84-291-4256-8, IQS-531.2 (076.1)-Ril.

➢ "Engineering Mechanics. Statics", *Meriam, J.L.; Kraige, L.G.;* Wiley, (2003), ISBN 0-471-26607-8, IQS-531.123-Mer.

➢ "Engineering Mechanics. Dynamics", *Meriam, J.L.; Kraige, L.G.;* Wiley, (2003), ISBN 0-471-26606-x, IQS-531.124-Mer.

➢ "Mecánica vectorial para ingenieros. Estática", *Beer, F.P.; Russell Johnston, E.; Eisenberg, E.R.;* McGraw Hill, (2004), ISBN 970-10-4469-X, ISBN 007-2304936, IQS-531.12-Bee.

➢ "Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica", *Beer, F.P.; Russell Johnston, E.; Eisenberg, E.R.;* McGraw Hill, (2004), ISBN 970-10-4470-3 ISBN 007-230492-8, IQS-531.12-Bee.

➢ "Mecánica para ingeniería y sus aplicaciones: Estática", *McGill,D.J.; King,W.W.;* Grupo Editorial Iberoamérica, (1991), ISBN 968-7270-69-1, IQS-531.12-McG.

➢ "Mecánica para ingeniería y sus aplicaciones: Dinámica", *McGill,D.J.; King,W.W.;* Grupo Editorial Iberoamérica, (1991), ISBN 968-7270-70-5, IQS-531.12-McG.

University Copy For Library Use

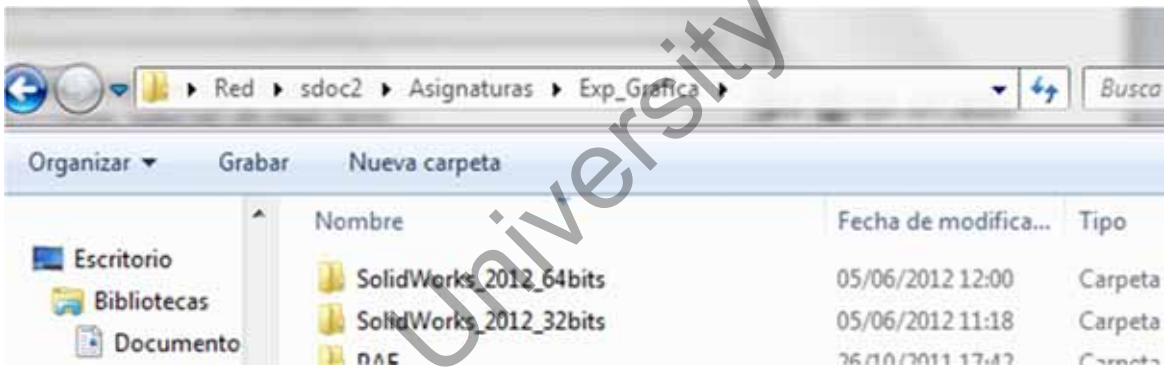
- Instalación SolidWorks.

Ir a la intranet \\sdoc2\Asignaturas\Exp_Grafica y ejecutar el SETUP SolidWorks de 32 o 64 bits según corresponda. No bajar de Internet una versión más nueva de la IQS

Cuando pida el Serial Number for IQS: 9710-2066-1118-8691-K24M-DKGD

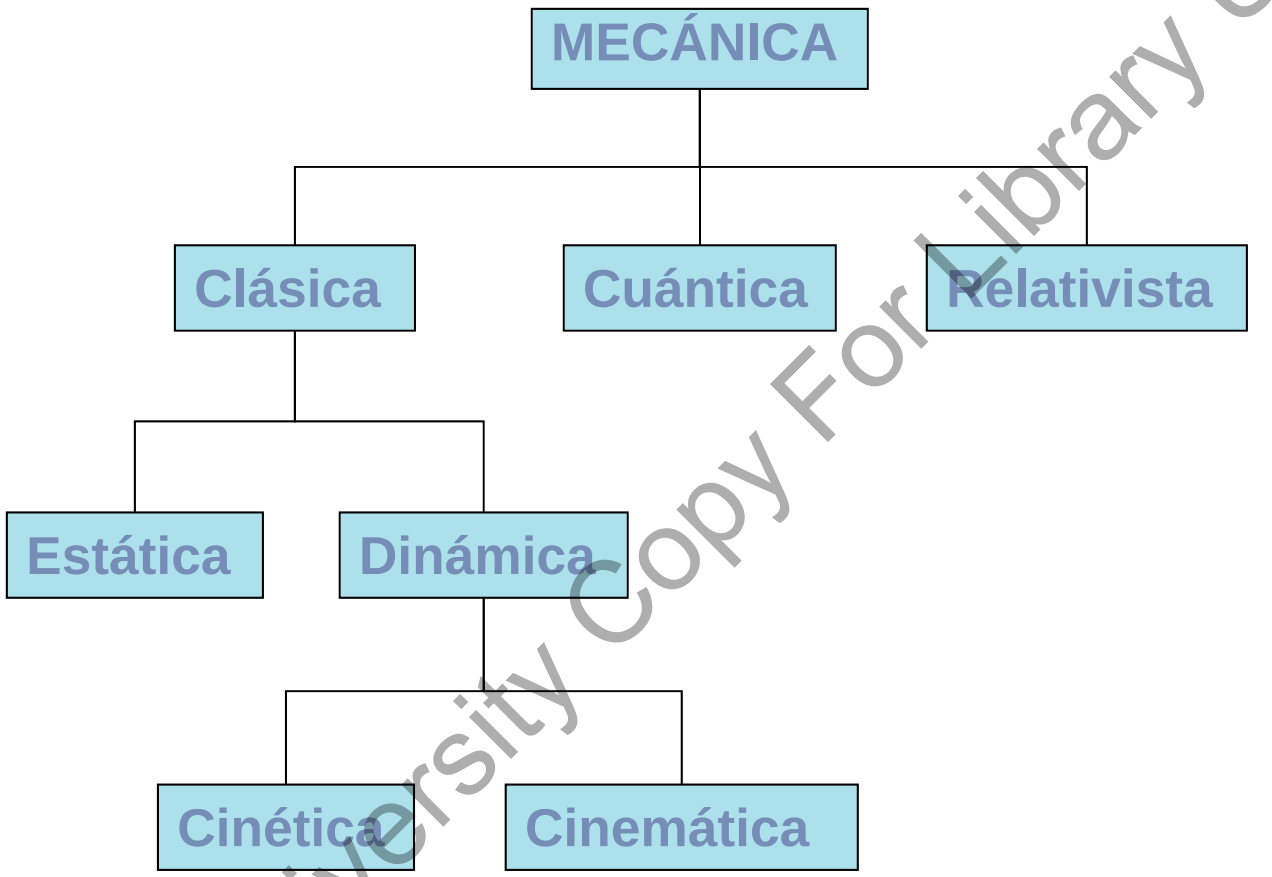
License server for IQS: 25734@sterminal

si el ordenador no reconoce a sterminal: 25734@172.16.10.50



University Copy For Library Use

- Clasificación de Mecánica..



University Copy For Library Use

• Modelado de Espacio y Tiempo.

- ➢ Materia: Cantidad de sustancia encerrada en un contorno.
- ➢ Masa: Medida en que un cuerpo se opone a cambiar su estado de reposo o movimiento
- ➢ Partícula: Cuerpo cuya forma y dimensiones no importan en el planteamiento del problema.
- ➢ Sólido rígido: Conjunto de puntos cuya distancia no varía bajo cargas (indeformable)
- ➢ Fuerza: Acción de un cuerpo sobre otro (contacto directo, másicas). Sólido flexible, esfuerzos debido a las fuerzas.
- ➢ Espacio: Que permita representar un punto de manera inequívoca.
- ➢ Tiempo: Sucesión ordenada de instantes.

University Copy For Library Use

- Leyes Básicas.

Las 3 de Newton

1.- Una partícula permanece en reposo o a velocidad constante si no hay aplicación de fuerzas descompensadas actuando sobre ella.

2.- La aceleración de una partícula es proporcional al vector suma de las fuerzas actuando sobre él y la dirección de la aceleración es la de este vector.

$$F = ma$$

3.- Las fuerzas de acción y reacción entre dos cuerpos son iguales en magnitud, opuestas en dirección y colineales.

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

University Copy For Library Use

- Ejercicio Newton tipo clase.

Calcular la fuerza con la que la tierra atrae a una persona de masa 70 kg situada en la superficie de la tierra. Para el cálculo considerar:

Constante gravitacional: γ=6.673x10^{-11} [m^3/(kg.s^2]

Masa tierra: *m* = 5.976x10^{21} [ton]

Diámetro de la tierra: *d* = 12742 [km]

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Solución:

$$F = \frac{6.673x10^{-11}\ [m^3/(kg.s^2]\ x\ (5.976x10^{21}\ [ton]\ x\ 1000\ [kg/ton])\ x\ 70\ [kg]}{\left(\frac{12742}{2}\ [km]\ x\ 1000\ [m/km]\right)^2}$$

$$F = 9.80665\ [m/s^2]x\ 70\ [kg] = 687\ [N]$$

University Copy For Library Use

- Ejercicio tipo Casa.

Calcular la fuerza con la que la tierra atrae a una persona de masa 70 kg situada en lo alto del Everest.

Sol. F= = 685.5 [N]

Calcular la fuerza con la que la luna atrae a una persona de masa 70 kg situada en su superficie.

Sol. F= =113.4 [N.]

Calcular la fuerza con la que la luna atrae a la tierra y explicar el fenómeno de las mareas.

Sol.F= =1.984x10^{20} [N.]

University Copy For Library Use

- Unidades en sistema internacional.

RD 1317/1989; ISO 1000:1992 (UNE 82100:1006)

Convención nomenclatura:

Variable = Valor [Unidades]

Ej: *m* = 30 [kg]

unidades sistema internacional

SI

Magnitudes básicas		
Magnitud	**Unidad**	**Símbolo**
Masa	kilogramo	kg
Longitud	metro	m
Tiempo	segundo	s
Magnitudes derivadas con unidades y símbolos especiales		
Frecuencia	hertz	Hz
Fuerza	newton	N
Presión o tensión	pascal	Pa
Energía, trabajo, calor	joule	J
Magnitudes suplementarias		
Ángulo plano	radian	rad
Ángulo sólido	estereoradian	sr

University Copy For Library Use

- Unidades en medidas básicas.

Deducción de unidades de magnitudes derivadas.

Fuerza [N] = Masa [kg] x Aceleración [m/s^2] = [$kg \cdot m/s^2$]

Presión [Pa] = Fuerza [N] / Area [m^2] = [$kg/(m \cdot s^2)$]

Energía [J] = Fuerza [N] x Desplazamiento [m] = [$kg \cdot m^2/s^2$]

Magnitudes básicas		
Magnitud	**Unidad**	**Símbolo**
Masa	kilogramo	kg
Longitud	metro	m
Tiempo	segundo	s
Magnitudes derivadas con unidades y símbolos especiales		
Frecuencia	hertz	Hz
Fuerza	newton	N
Presión o tensión	pascal	Pa
Energía, trabajo, calor	joule	J
Magnitudes suplementarias		
Ángulo plano	radian	rad
Ángulo sólido	estereoradian	sr

University Copy For Library Use

• Prefijos y símbolos para unidades.

Usaremos prefijos para multiplicar o dividir nuestras unidades básicas.

Factor	Prefijo	Símbolo		Factor	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E		10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P		10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T		10^{-3}	mili	m
10^{9}	giga	G		10^{-6}	micro	μ
10^{6}	mega	M		10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k		10^{-12}	pico	p
10^{2}	hecto	h		10^{-15}	femto	f
10	deca	da		10^{-18}	atto	a

Presión [MPa] = Presión [Pa] x 1 [MPa] / 10^6 [Pa]

¿es correcto [mPa]?

¿es correcto [mpa]?

University Copy For Library Use

- Magnitudes y símbolos en mecánica (1/4).

Magnitud	Símbolo	Unidad
Ángulo plano	α, β, ...	rad, (°, ‘, ’’)
Ángulo sólido	Ω	sr
Longitud	l, (L)	m
Ancho	b	m
Alto	h	m
Radio	r	m
Diámetro	d, (D)	m
Longitud de trayectoria	s	m
Área	A, (S)	m^2
Volumen	V	m^3
Tiempo	t	s, (min, h, d)
Velocidad	v	m/s
Aceleración	a	m/s^2
Aceleración de la gravedad	g	m/s^2

University Copy For Library Use

- Magnitudes y símbolos en mecánica (2/4).

Velocidad angular	ω	rad/s
Aceleración angular	α	rad/s^2
Periodo	T	s
Desfase	φ	rad
Frecuencia	f	Hz
Frecuencia de rotación	n	s^{-1}, (min^{-1}, rpm)
Frecuencia angular	ω	rad/s
Masa	m	kg
Densidad	ρ	kg/m^3
Momento de inercia	I, J	kg·m^2
Cantidad de movimiento	p	kg·m/s

University Copy For Library Use

- Magnitudes y símbolos en mecánica (3/4).

Momento cinético	L	$kg \cdot m^2/s$
Fuerza	F	N
Peso	Fg, (G, P, W)	N
Momento de una fuerza	M	$N \cdot m$
Momento de un par	T	$N \cdot m$
Presión	p	Pa, (bar)
Tensión	σ, τ	Pa
Deformación lineal	ε	
Deformación angular	γ	
Coeficiente de Poisson	μ, ν	
Módulo de elasticidad	E	Pa
Módulo de torsión	G	Pa
Módulo de inercia	Z, W	m^3

University Copy For Library Use

- Magnitudes y símbolos en mecánica (4/4).

Momento cuadrático de un área plana	I_a, (I)	m^4
Momento cuadrático polar de un área plana	I_p	m^4
Coeficiente de rozamiento	μ, (f)	
Viscosidad dinámica	η (μ)	Pa·s
Viscosidad cinemática	ν	m^2/s
Tensión superficial	γ, σ	N/m
Trabajo	W, (A)	J
Energía	E, (W)	J
Energía potencial	E_p	J
Energía cinética	E_k	J
Potencia	P	W
Rendimiento	η	

University Copy For Library Use

• Otros sistemas de unidades.

Todavía se usan otros sistemas de unidades y debemos ser capaces de traducir del sistema internacional a estos sistemas y viceversa.

	SI		USA	
	Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo
Masa	kilogram	[kg]	slug	[slug]
Longitud	metro	[m]	foot	[ft]
Tiempo	segundo	[s]	second	[s]
Fuerza	newton	[N]	pound	[lb]

Traducciones de unidades básicas:

1 [kg] = 0.06854 [slug] ó 1 [slug] = 14.59 [kg]

1 [m] = 3.281 [ft] ó 1 [ft] = 0.3048 [m]

University Copy For Library Use

- Conversión de unidades.

Considerar traducción de unidades básicas o usar la siguiente tabla.

Magnitud	U.S.C.S a SI	SI a U.S.C.S.
Longitud	1 in. = 25,40 mm	1 m = 39,37 in.
	1 ft = 0,3048 m	1 m = 3,281 ft
	1 mi = 1,609 km	1 km = 0,6214 mi
Área	1 in.^{2} = 645,2 mm^2	1 m^2 = 1550 in.^{2}
	1 ft^2 = 0,0929 m^2	1 m^2 = 10,76 ft^2
Volumen	1 in.^{3} = 16,39(10^3)mm^3	1 mm^3 = 61,02(10^{-6}) in.^{3}
	1 ft^3 = 0,02832 m^3	1 m^3 = 35,31 ft^3
	1 gal = 3,785 L[a]	1 L = 0,2646 gal
Velocidad	1 in./s = 0,0254 m/s	1 m/s = 39,37 in./s
	1 ft/s = 0,3048 m/s	1 m/s = 3,281 ft/s
	1 mi/h = 1,609 km/h	1 km/h = 0,6214 mi/h
Aceleración	1 in./s^2 = 0,0254 m/s^2	1 m/s^2 = 39,37 in./s^2
	1 ft/s^2 = 0,3048 m/s^2	1 m/s^2 = 3,281 ft/s^2
Masa	1 slug = 14,59 kg	1 kg = 0,06854 slug
Momento segundo de superficie	1 in.^{4} = 0,4162(10^6) mm^4	1 mm^4 = 2,402(10^{-6}) in.^{4}
Fuerza	1 lb = 4,448 N	1 N = 0,2248 lb
Carga distribuida	1 lb/ft = 14,59 N/m	1 kN/m = 68,54 lb/ft
Presión o esfuerzo	1 psi = 6,895 kPa	1 kPa = 0,1450 psi
	1 ksi = 6,895 MPa	1 MPa = 145,0 psi
Momento (flector, de una fuerza o un par)	1 ft · lb = 1,356 N · m	1 N · m = 0,7376 ft · lb
Trabajo o energía	1 ft · lb = 1,356 J	1 J = 0,7376 ft · lb
Potencia	1 ft · lb/s = 1,356 W	1 W = 0,7376 ft · lb/s
	1 hp = 745,7 W	1 kW = 1,341 hp

b: Directo

a: Básicas

Ejemplo: Calcular la gravedad en sistema U.S. considerando tan sólo medidas básicas

a: gravedad U.S. [ft/s^2] = 9.81 [m/s^2] x 1/0.3048 [ft/m] = 32.18 [ft/s^2]

b: gravedad U.S. [ft/s^2] = 9.81 [m/s^2] x 1/0.3048 [(ft/s^2)/(m/s^2)] = 32.18 [ft/s^2]

University Copy For Library Use

- Ejercicios resueltos.

Calcular el consumo en millas por galón [mi/gal] de un coche que consume 5 [l] / 100 [km]

De la tabla de conversión vemos lo siguiente:

1 [km] = 0.6214 [mi]

1 [gal] = 3.785 [l]

El consumo se calcula de la siguiente forma:

c [mi/gal] = 100 [km] / 5 [l] x 0.6214 [mi/km] x 3.785 [l/gal] = 47.04 [mi/gal] .

University Copy For Library Use

- Ejercicios casa.

Calcular el peso en pounds-libras [lb] de un coche de masa 1400 [kg].

Sol. 3090 [lb]

Dar el valor de la constante de gravitación universal γ en sistema de unidades americano.

Sol. 3.439×10^{-8} [$ft^3/(slug \cdot s^2)$]

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Presentación del profesor y de la asignatura de Mecánica Aplicada.

➢ Introducción a conceptos básicos.

➢ Sistema de unidades y factores de conversión

University Copy For Library Use

S02t.- Vectores y momentos.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ....

- Repaso sesión anterior.

  - Introducción a la asignatura.
  - Sistema de unidades básico basado en masa, longitud y tiempo.
  - Sistema de unidades internacional [kg], [m], [s].
  - Sistema americano de unidades.
  - Conversión de unidades.

Unidades interesantes de recordar:

1[ft]=0.3048[m]

1[in]=25.40[mm]

1[lb]=4.448[N]

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos de esta sesión

➢ Repaso de álgebra vectorial para centrarse en las necesidades de mecánica aplicada:

➢Suma de fuerzas como suma de vectores, momentos como productos vectoriales, descomposición en direcciones, módulo de una fuerza, vector de posición, punto o recta de aplicación de una fuerza . . .

➢ Utilizar siempre el mismo número de cifras significativas.

➢ Saber sustituir fuerzas y/o momentos por fuerza y/o momento equivalente.

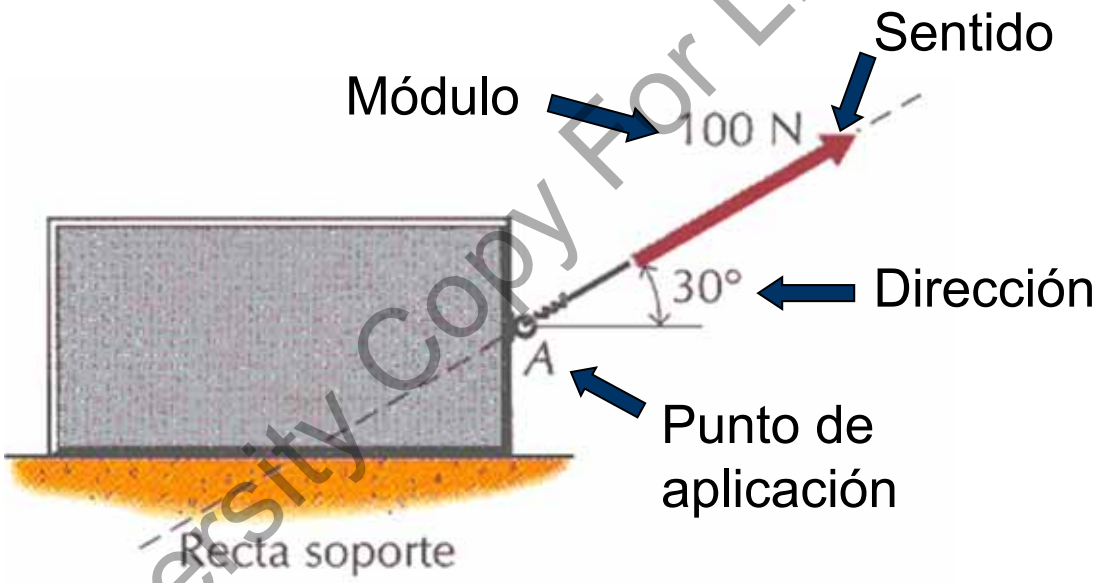
University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Fuerzas y vectores.

Para poder empezar a hablar de fuerzas y momentos en mecánica es necesario hacer un repaso a varios conceptos de álgebra vectorial.

Primero repasaremos los conceptos de módulo, dirección, sentido y punto de aplicación de una fuerza tratada como un vector.



University Copy For Library Use

• Distancia a punto de aplicación como un vector.

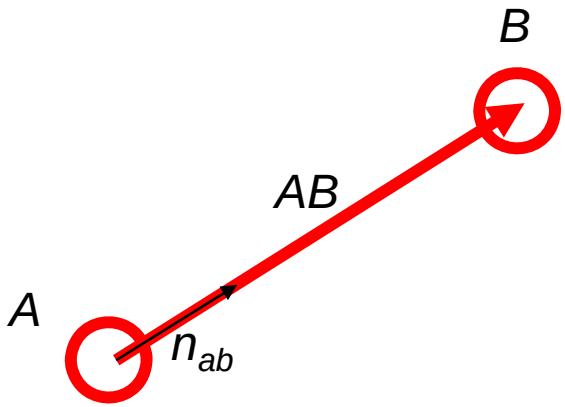
Una tarea que se repetirá durante toda la asignatura es el cálculo de los vectores que definen la distancia entre dos puntos.

Dado el punto $A=(A_x, A_y, A_z)$ y el punto $B=(B_x, B_y, B_z)$ el vector AB se define de la siguiente forma:

$AB=(B_x-A_x, B_y-A_y, B_z-A_z)$

La distancia entre A y B es el módulo del vector:

$$|AB| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 + (B_z - A_z)^2}$$



El vector unitario de la dirección de este vector es:

$$n_{ab} = \left(\frac{B_x - A_x}{|AB|}, \frac{B_y - A_y}{|AB|}, \frac{B_z - A_z}{|AB|} \right)$$

University Copy For Library Use

• Suma de vectores.

Si tiramos en dirección1 con F1 y en dirección 2 con F2. ¿Cuál es la fuerza resultante y su dirección?

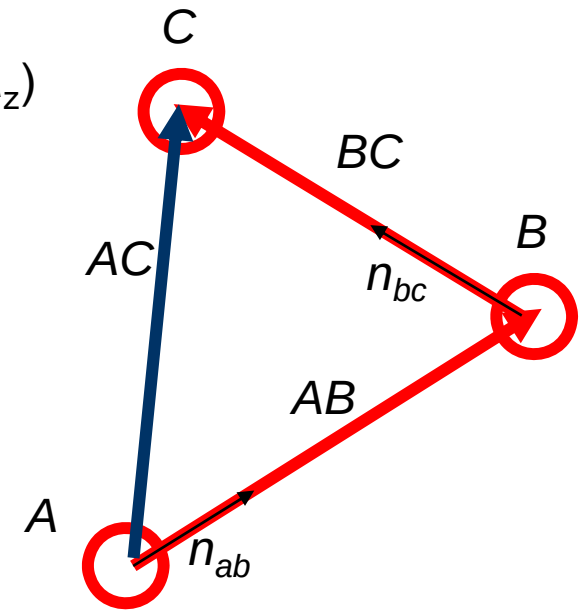
La suma de vectores es la suma de sus componentes. Dados los puntos *A*, *B* y *C*, se puede calcular el vector $AC = AB + BC$.

$AB=(B_x-A_x, B_y-A_y, B_z-A_z)$
$BC=(C_x-B_x, C_y-B_y, C_z-B_z)$
$AC=(C_x-B_x+B_x-A_x, C_y-B_y+B_y-A_y, C_z-B_z+B_z-A_z)=(C_x-A_x, C_y-A_y, C_z-A_z)$

Sin embargo no podemos sumar los módulos.

Ejemplo:

$A=(0, 0, 0)$, $B=(2, 2, 0)$, $C=(5, 0, 0)$
$AB=(2, 2, 0)$ y $|AB|=2\sqrt{2}$
$BC=(3,-2, 0)$ y $|BC|=\sqrt{13}$
$AC=(5, 0, 0)$ y $|AC|=5 < 2\sqrt{2} + \sqrt{13}$



University Copy For Library Use

• Deshacer suma de vectores.

Si queremos tirar con una fuerza Fr en dirección r y tenemos que hacerlo empujando en dirección 1 y 2: ¿Cuánto vale F1 y F2?

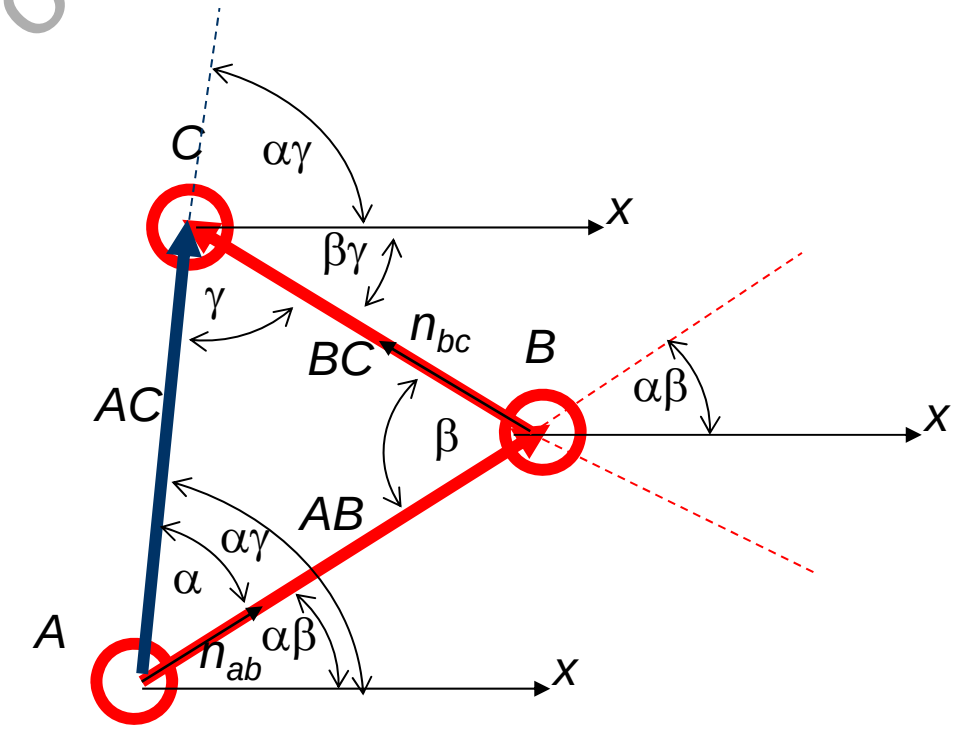
Si queremos saber como repartir un vector AC en dos direcciones n_{ab} y n_{bc} debemos considerar la regla de los senos: $\frac{|AB|}{\sin(\gamma)} = \frac{|AC|}{\sin(\beta)} = \frac{|BC|}{\sin(\alpha)}$

Para calcular los ángulos α, β y γ se pueden hacer a partir de $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ y $\beta\gamma$.

$\alpha=|\alpha\gamma-\alpha\beta|$
$\beta=|\beta\gamma-\alpha\beta|$
$\gamma=|\alpha\gamma-\beta\gamma|$

$\alpha\beta=\arccos(|AB_{xz}|/|AB|)$
$\beta\gamma=\arccos(|BC_{xz}|/|BC|)$
$\alpha\gamma=\arccos(|AC_{xz}|/|AC|)$

Donde la componente AB_{xz} es $\sqrt{(AB_x^2+AB_z^2)}$ con signo. Muy fácil en 2D pues AB_z es cero. Alternativa: sistema ecuaciones.



University Copy For Library Use

• Ejemplo deshacer suma de vectores.

Ejemplo:

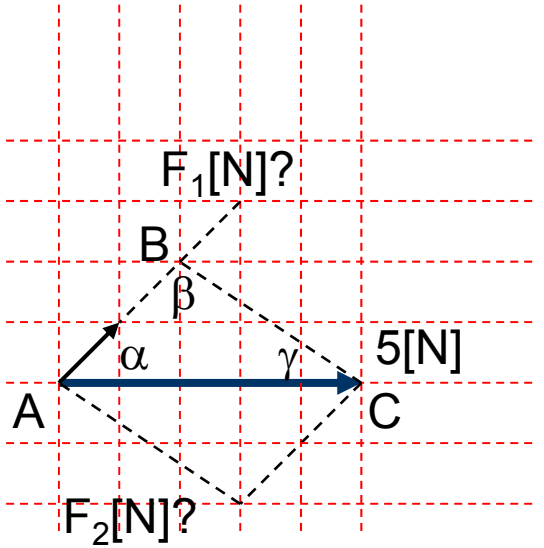
Queremos estirar en dirección x con 5[N] pero tan sólo podemos estirar en direcciones AB=(1, 1 ,0) y *BC*=(3,-2,0).

$\alpha\beta=\arccos(|AB_{xz}|/|AB|)=\arccos(\sqrt{(1^2+0^2)}/\sqrt{(1^2+1^2+0^2)}=45º$
$\beta\gamma=\arccos(|BC_{xz}|/|BC|)=\arccos(-\sqrt{(3^2+0^2)}/\sqrt{(3^2+2^2+0^2)}=-33.69$ / **146.31º**
$\alpha\gamma=\arccos(|AC_{xz}|/|AC|)=\arccos(\sqrt{(5^2+0^2)}/\sqrt{(5^2+0^2+0^2)}=0º$

$\alpha=|\alpha\gamma-\alpha\beta|=45º$
$\beta=|\beta\gamma-\alpha\beta|=146.31-45=101.31º$
$\gamma=|\alpha\gamma-\beta\gamma|=33.69º$

$$\frac{|AB|}{\sin(\gamma)}=\frac{|AC|}{\sin(\beta)}=\frac{|BC|}{\sin(\alpha)}$$

$|AB|=|AC|*\sin(\gamma)/\sin(\beta)$ ⇨ $5*\sin(33.69)/\sin(101.31)=2.82=2\sqrt{2}$
$|BC|=|AC|*\sin(\alpha)/\sin(\beta)$ ⇨ $5*\sin(45)/\sin(101.31)=3.60=\sqrt{13}$



University Copy For Library Use

• Producto escalar de vectores.

Si queremos proyectar el vector *AC* sobre la dirección *AB* podemos usar el producto escalar y la dirección normalizada. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero.

Recordamos que el producto escalar de dos vectores da un número y no un vector:

$AC \cdot AB = (C_x - A_x, C_y - A_y, C_z - A_z) \cdot (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z) =$
$(C_x - A_x)*(B_x - A_x) + (C_y - A_y)*(B_y - A_y) + (C_z - A_z)*(B_z - A_z)$

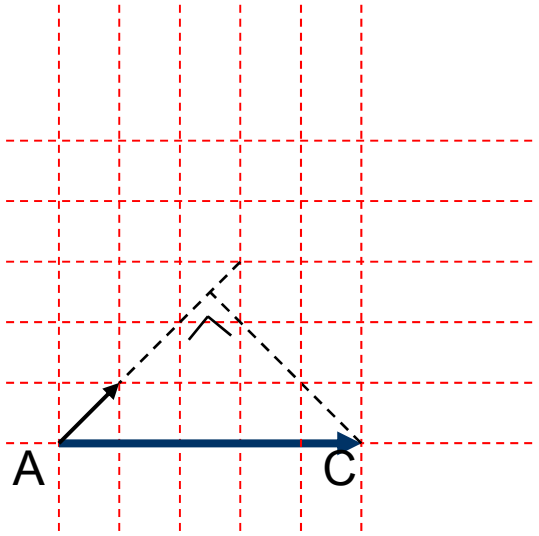
Para encontrar la proyección de AC en AB hay que coger este número pero usando el vector unitario n_{ab}.

$(AC \cdot n_{ab}) \cdot n_{ab}$

Ejemplo:

Dar la proyección de AC=(5, 0 ,0) en dirección *AB*=(2, 2 ,0)

$AB = (2, 2, 0)$, $|AB| = 2\sqrt{2}$, $n_{ab} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$
$(AC \cdot n_{ab}) \cdot n_{ab} = [5*1/\sqrt{2} + 0*1/\sqrt{2} + 0*0] \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) = (2.5, 2.5, 0)$



University Copy For Library Use

• Deshacer suma de vectores usando producto escalar.

Sabemos que el ángulo α que forman dos vectores *AB* y *AC* es:

α=arccos(*AB*·*AC*/(|*AB*|*|*AC*|))

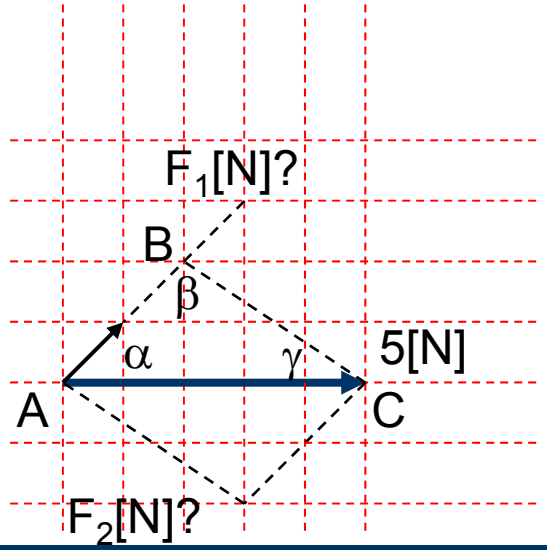
Ejemplo: *Dar la proyección de AC*=(5, 0 ,0) como suma de dos componentes en direcciones *AB*=(1, 1 ,0) y *BC*=(3,-2,0).

α=arccos(*AB*·*AC*/(|*AB*|*|*AC*|))=arccos((1*5+1*0+0*0)/(5*√2))=arcos(1/√2)=45º
β=arccos(*AB*·*BC*/(|*AB*|*|*BC*|))=arccos((1*3+1*-2+0*0)/(√13*√2))=arcos(1/√26)=78.69º/101.31º
γ=arccos(*BC*·*AC*/(|*BC*|*|*AC*|))=arccos((3*5+-2*0+0*0)/(5*√13))=arcos(-3/√13)=-33.69º *

Usando la regla de los cosenos solucionamos:

$$\frac{|AB|}{\sin(\gamma)} = \frac{|AC|}{\sin(\beta)} = \frac{|BC|}{\sin(\alpha)}$$

|*AB*|=|AC|*sin(γ)/sin(β) ⇨ 5*sin(33.69)/sin(78.69)=2.82=2√2
|*BC*|=|AC|*sin(α)/sin(β) ⇨ 5*sin(45)/sin(78.69)=3.60=√13



University Copy For Library Use

• Producto vectorial.

Usaremos el producto vectorial para calcular momentos en esta asignatura. El producto vectorial de dos vectores da como resultado un vector perpendicular la plano definido por estos vectores. Dos vectores paralelos tienen un producto vectorial nulo.

Recordemos la fórmula del producto vectorial:

$AC \times AB = (C_x-A_x, C_y-A_y, C_z-A_z) \times (B_x-A_x, B_y-A_y, B_z-A_z) =$
$((C_y-A_y)*(B_z-A_z)-(C_z-A_z)*(B_y-A_y), (C_z-A_z)*(B_x-A_x)-(C_x-A_x)*(B_z-A_z), (C_x-A_x)*(B_y-A_y)-(C_y-A_y)*(B_x-A_x))$

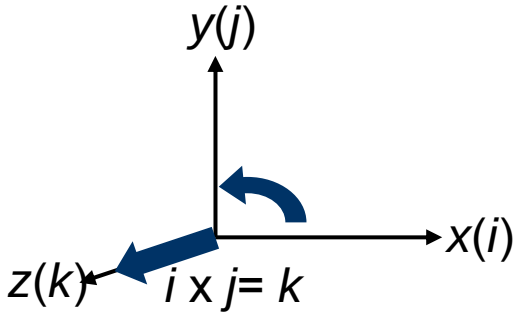
Una propiedad interesante es que $AC \times AB = - AB \times AC$.

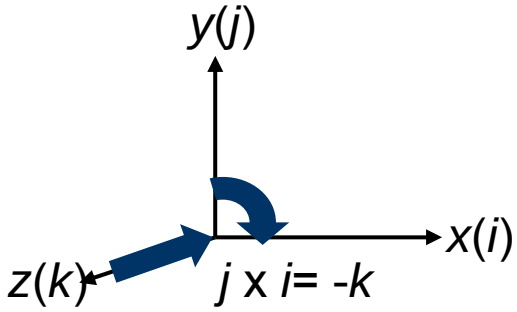
Es conveniente recordar la norma del sacacorchos para recordar si un producto será positivo o negativo. Si *i* es la dirección *x*, *j* es la dirección *y*, y *k* es la dirección *z*:

$i \times j = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1) = k$

sin embargo:

$j \times i = (0,1,0) \times (1,0,0) = (0,0,-1) = -k$





University Copy For Library Use

• Significación de resultados.

Después de analizar los diferentes conceptos matemáticos de álgebra vectorial que vamos a utilizar en estas primeras sesiones planteamos la cuestión de la significación numérica. En ingeniería se puede considerar una precisión del 0.2%

Para este objetivo se propone tener 3 cifras significativas excepto en números que comiencen por "1" que sería necesario tener 4 cifras.

Ejemplo:

Si un resultado 9.995 lo redondeamos a 9.99 el error es de 0.005/9.995*100=0.050%
Si un resultado 2.005 lo redondeamos a 2.00 el error es de 0.005/2.005*100=0.249%
Si un resultado 1.005 lo redondeamos a 1.00 el error es de 0.005/1.005*100=0.497%

Para simplificar la situación a partir de ahora siempre se pedirán **4 cifras significativas**.

π= 3.14159265358979323846264338327795 ⇨ Se acepta 3.142 a pesar de que este ligero error puede ser importante en otras operaciones.

Ejemplo: sin(100.1*π)=0.3090, sin(100.1*3.142)=0.3475 ⇨ error = 12%

University Copy For Library Use

- Ejercicios casa.

Indicar que números están OK con el criterio de 4 cifras significativas:

0.01234; 0.0123; 0.1234; 0.123; $1.234x10^{-10}$; $1.23x10^{-10}$; $0.1234x10^{-10}$; $0.123x10^{-10}$;

Solución:

Descomponer la fuerza F= (4,3,0) en fuerzas en dirección u=(1/√2,-1 /√2,0) y v=(0.6,0.8,0)

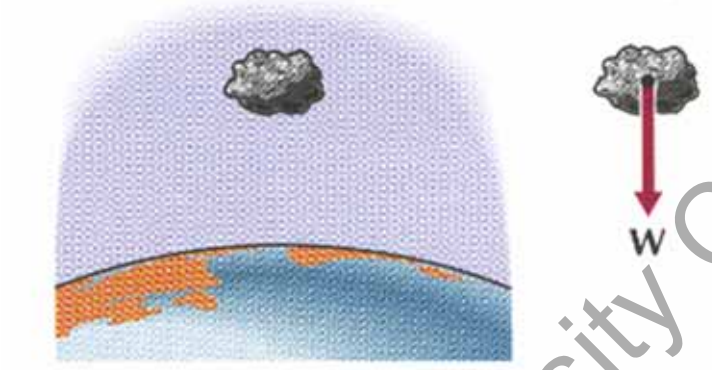
Solución: F_u=(1,-1,0) y F_v=(3,4,0)

University Copy For Library Use

- Tipos de fuerzas.

BODY FORCES

Másica-gravitacional

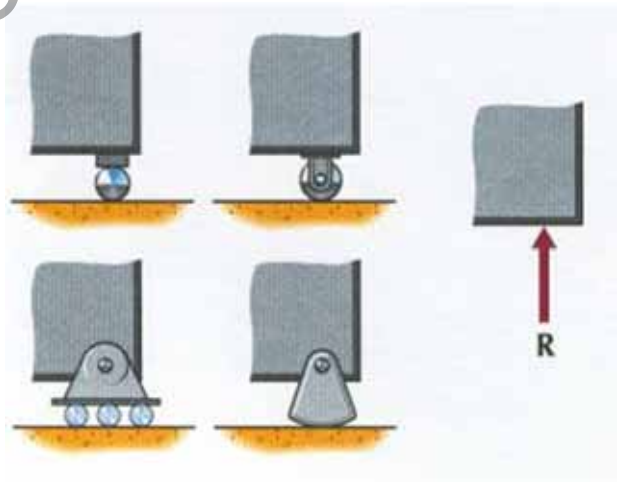


Eléctrica

Magnética

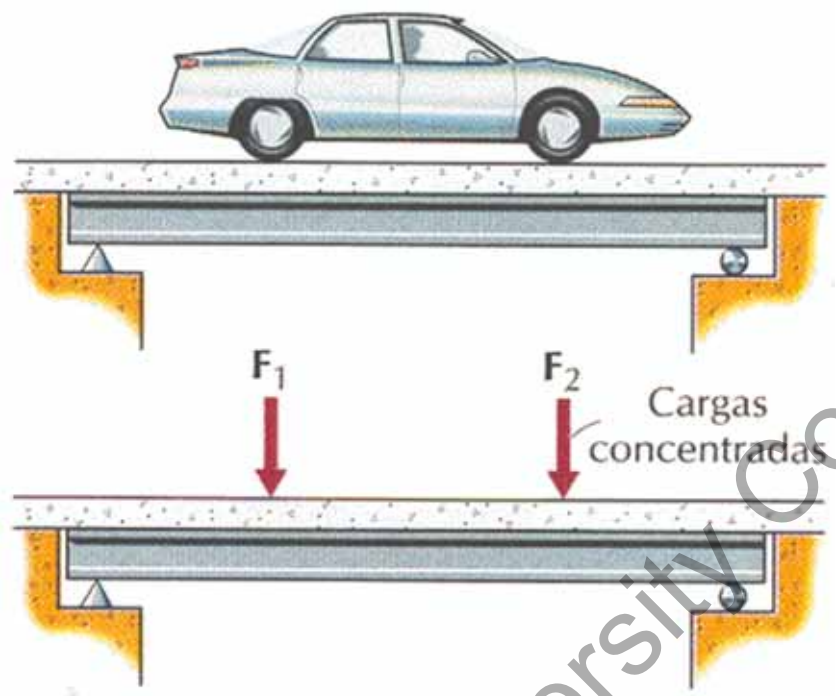
CONTACT FORCES

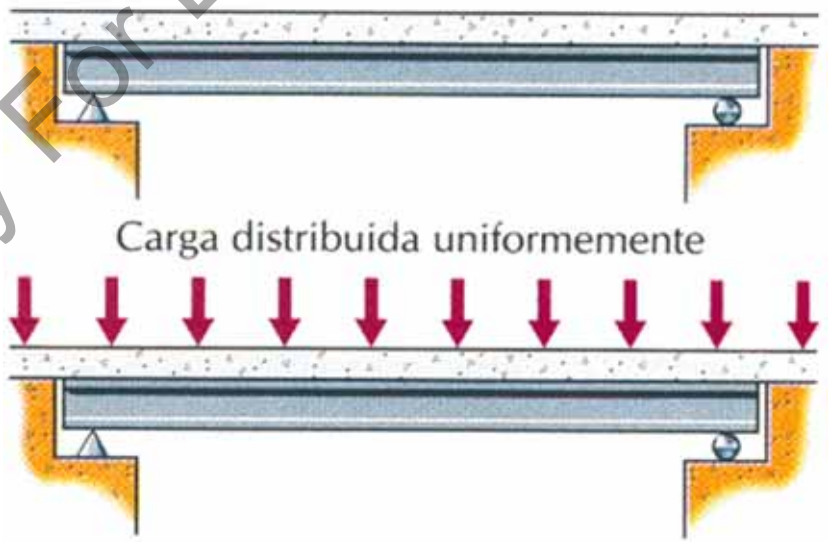
Contacto directo



University Copy For Library Use

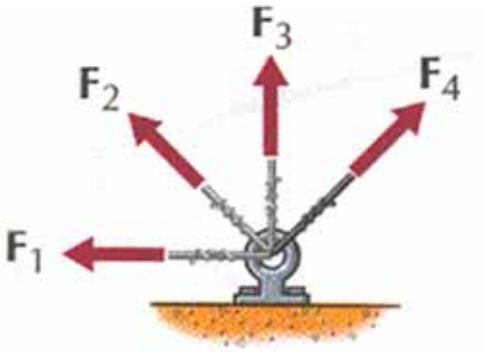
- Tipos de fuerzas.



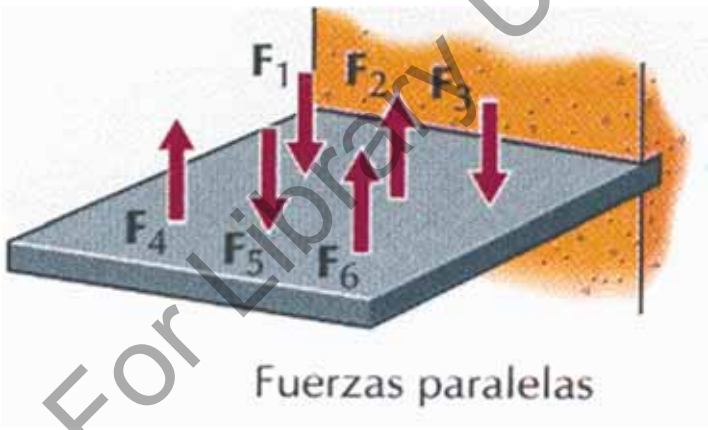


University Copy For Library Use

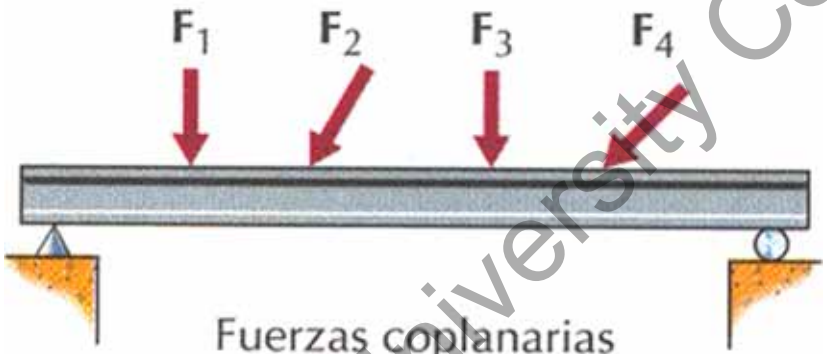
- Tipos de fuerzas.



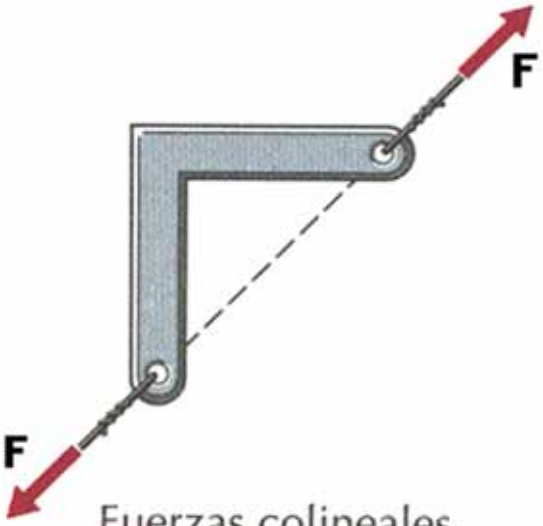
Fuerzas concurrentes



Fuerzas paralelas



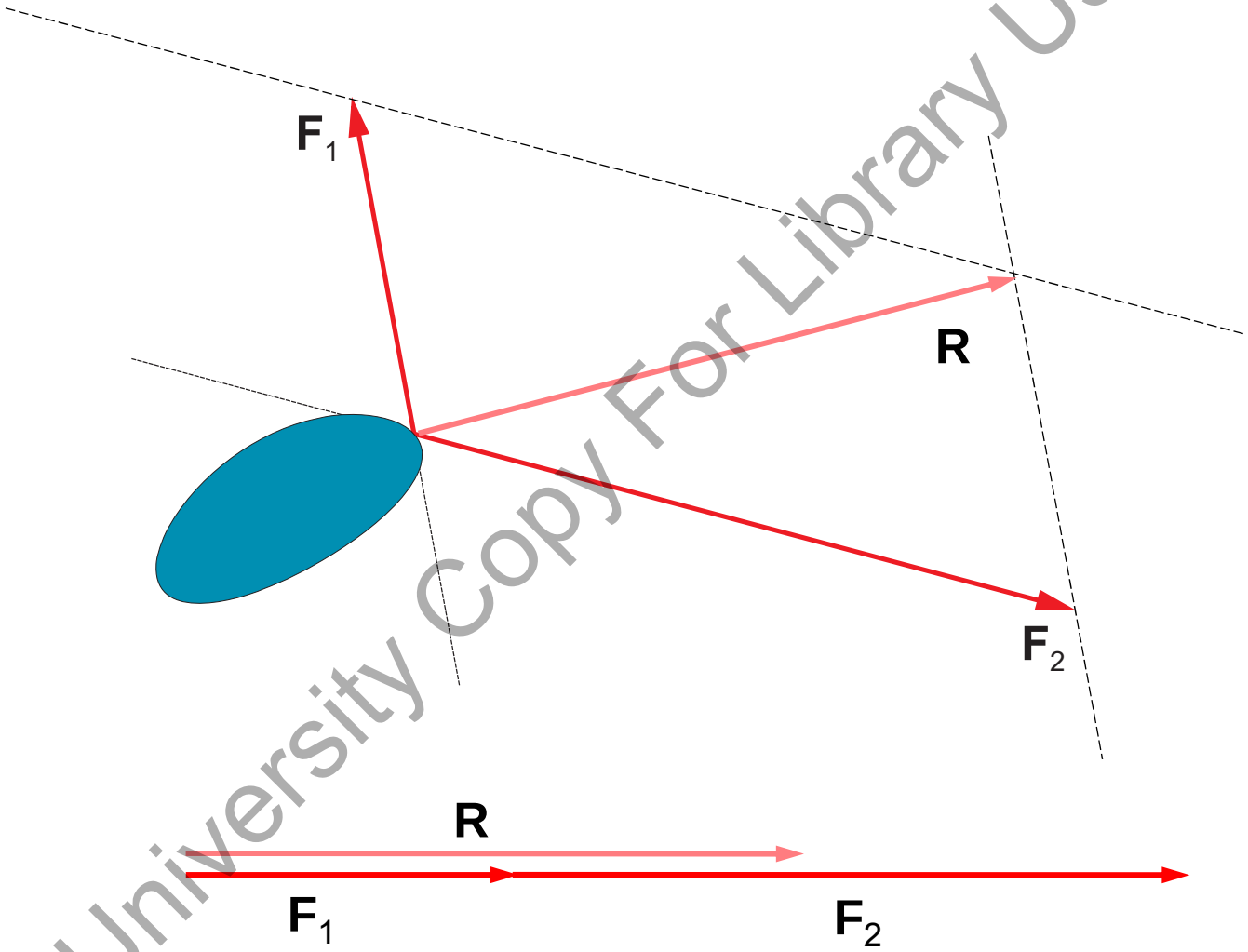
Fuerzas coplanarias



Fuerzas colineales

University Copy For Library Use

- Resultante de un par de fuerzas.

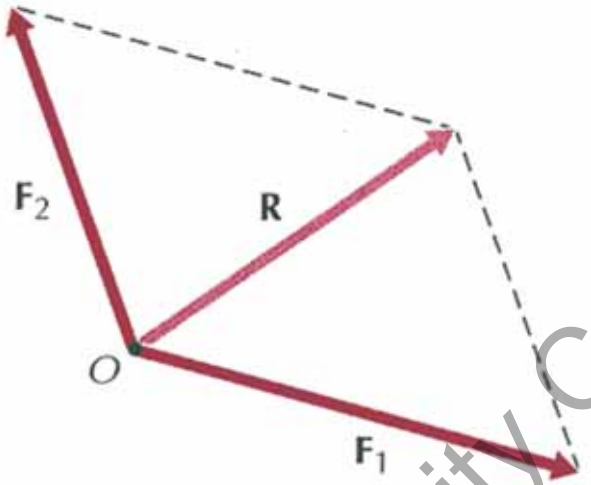


$F_1 + F_2 = R$ *pero no siempre* $|F_1| + |F_2| = |R|$ $\qquad |F_1| + |F_2| \geq |R|$

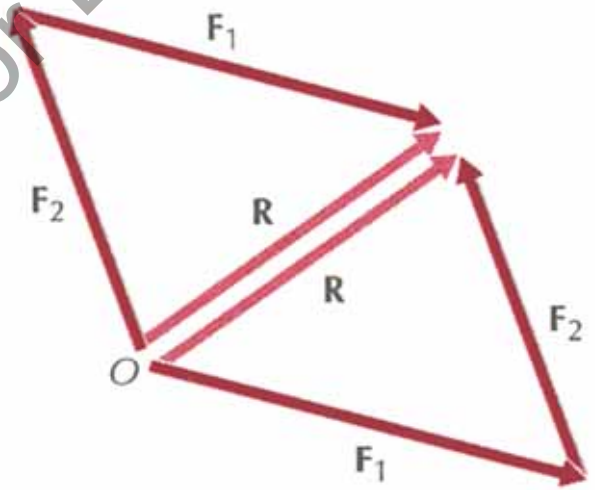
University Copy For Library Use

- Métodos gráficos de calcular la resultante de 2 fuerzas.

Paralelogramo



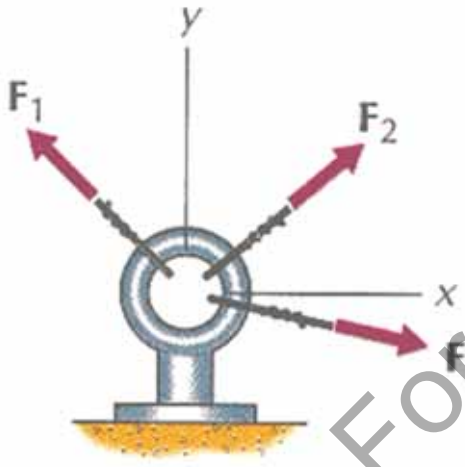
Polígono



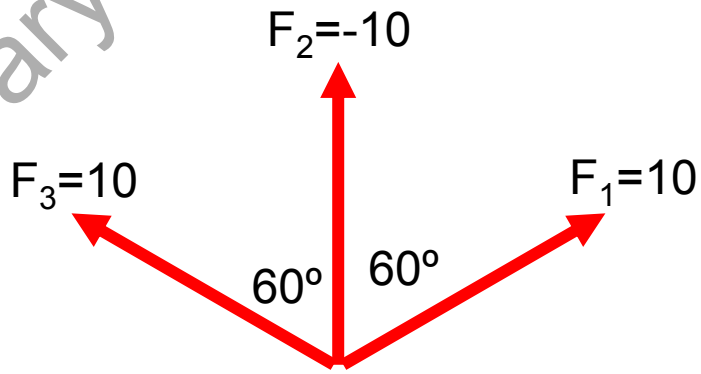
$$F_1 + F_2 = F_2 + F_1$$

University Copy For Library Use

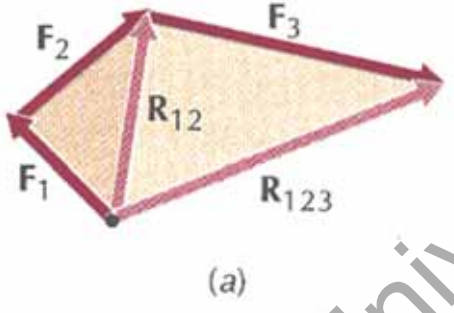
- Métodos gráficos de calcular la resultante de más de 2 fuerzas.

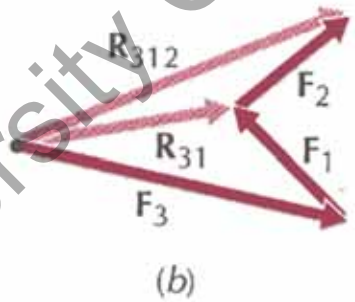


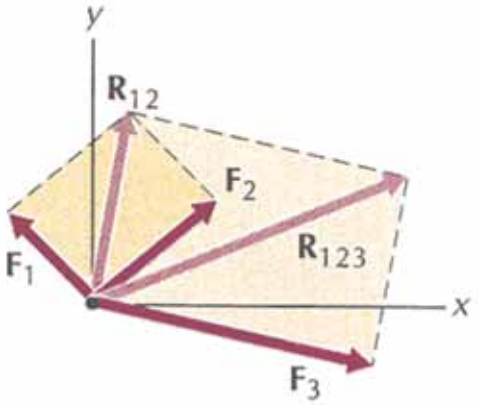
Ejercicio: Calcular R



Comprobar R=0



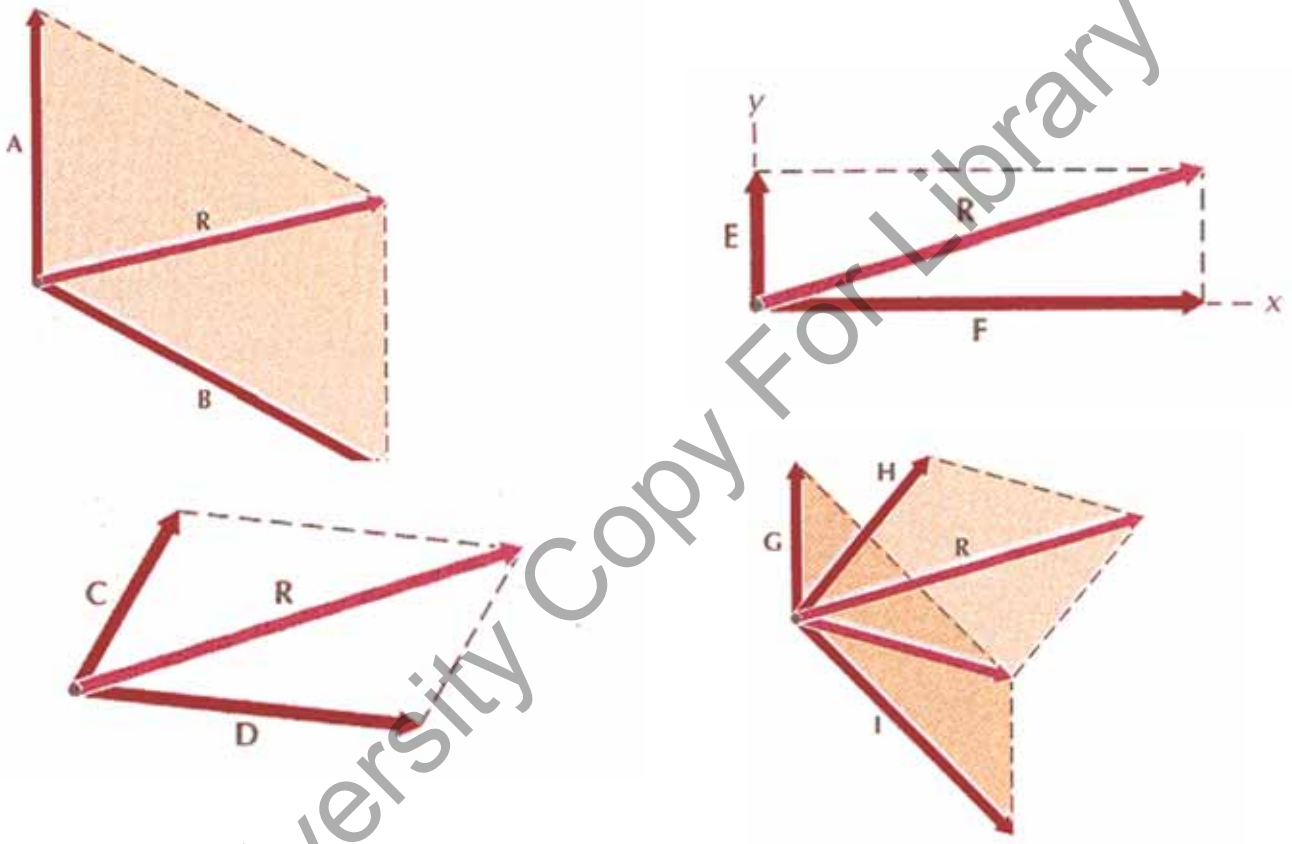




$$F_1 + F_2 + F_3 = F_3 + F_1 + F_2$$

University Copy For Library Use

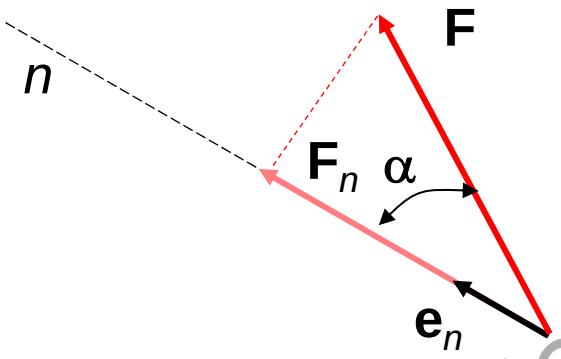
- Componentes de fuerzas.



$$R = A + B = C + D = E + F = G + I + H$$

University Copy For Library Use

- Proyección de una fuerza en una dirección.



$$\mathbf{F}_n = \left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_n\right)\cdot\mathbf{e}_n$$

En módulo $$\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_n = F\cdot e\cdot\cos\alpha = F\cos\alpha$$

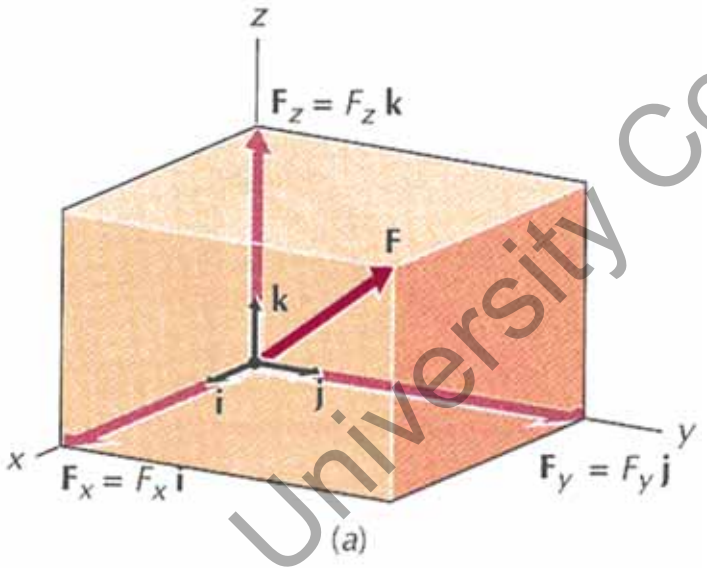
Si fuera una dirección *n* en un sistema cartesiano

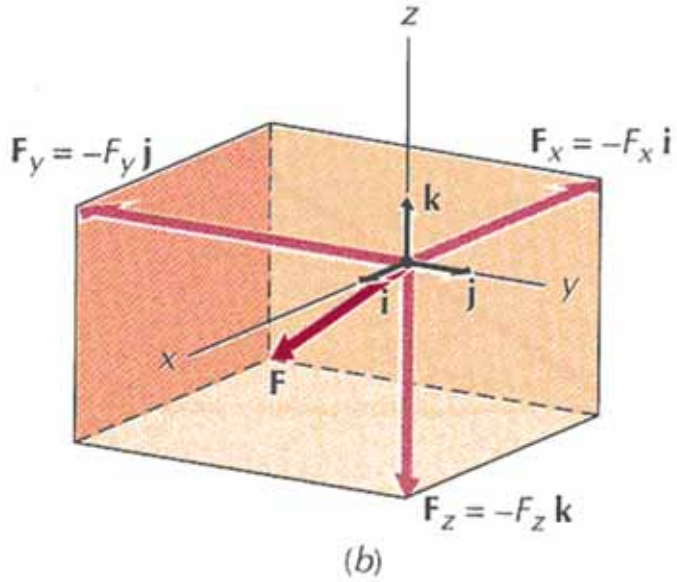
$$\mathbf{e}_n = \frac{F_{nx}\mathbf{i}+F_{ny}\mathbf{j}+F_{nz}\mathbf{k}}{\sqrt{F_{nx}^{\,2}+F_{ny}^{\,2}+F_{nz}^{\,2}}} = \cos\alpha_x\mathbf{i}+\cos\alpha_y\mathbf{j}+\cos\alpha_z\mathbf{k}$$

University Copy For Library Use

- Componentes rectangulares de una fuerza.

$$F_x = (F \cdot i) \cdot i;$$
$$F \cdot i = (F_x, F_y, F_z) \cdot (1,0,0) = F_x$$



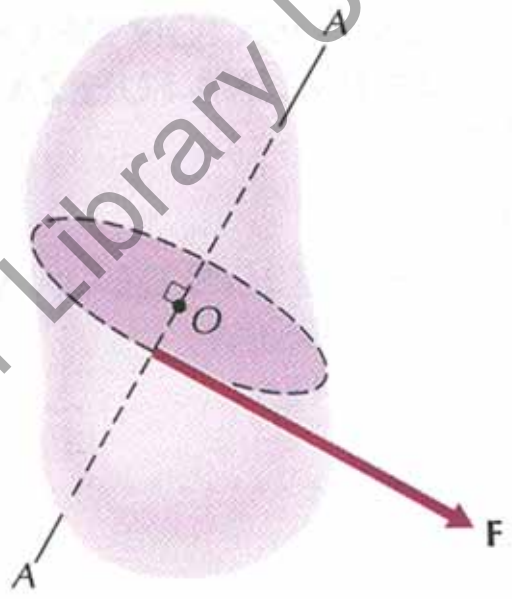


University Copy For Library Use

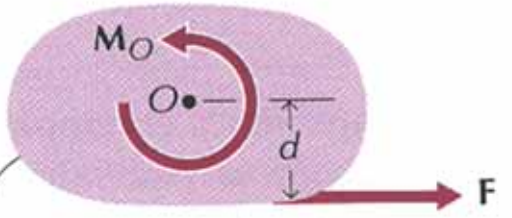
- Concepto de Momento.

F hace girar el sólido respecto a *AA*

El equilibrio exige -**F** y también -**M**



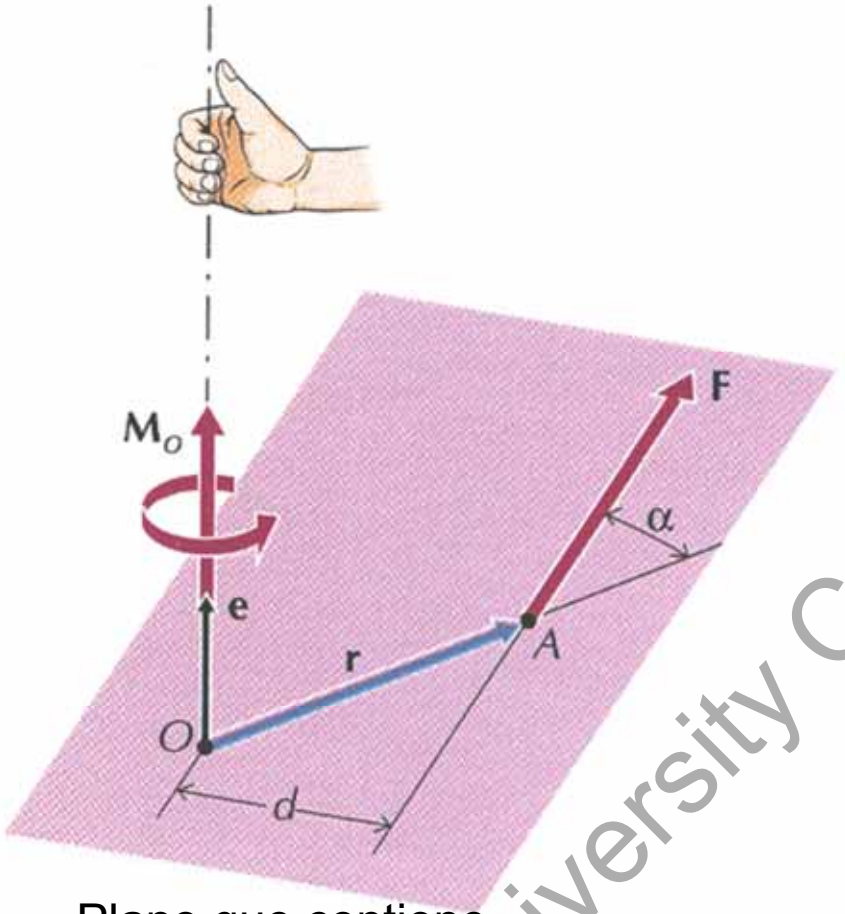
(a)



(b)

University Copy For Library Use

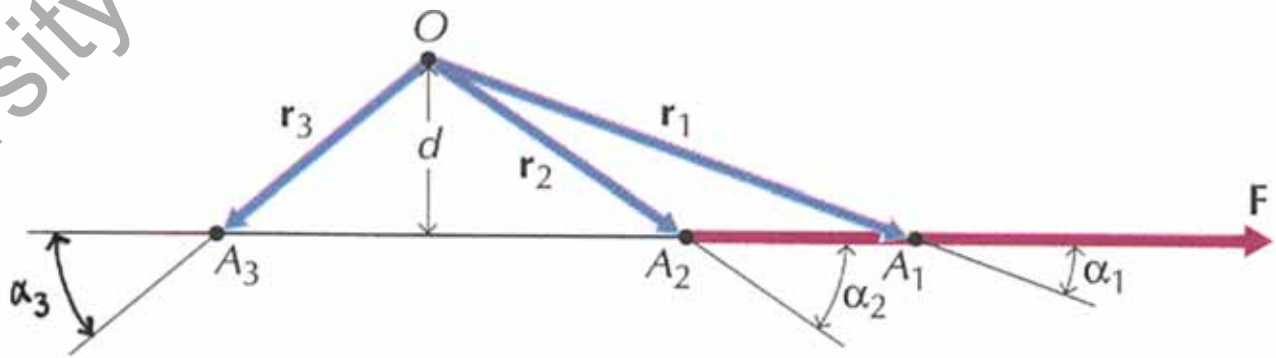
- Cálculo vectorial de momentos.



Plano que contiene el punto y la fuerza

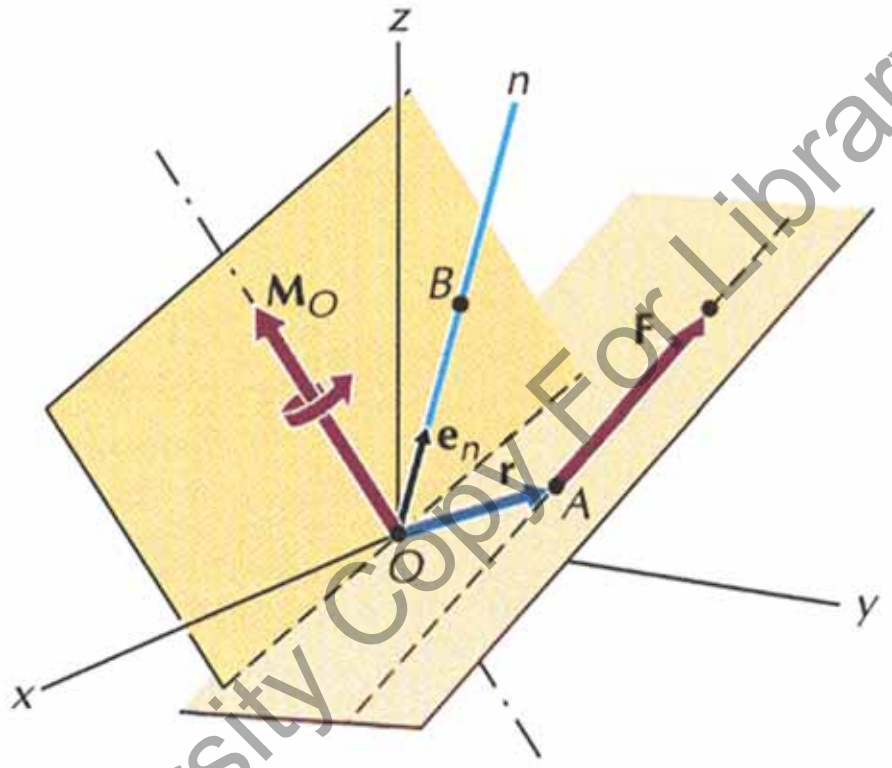
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = r \cdot F \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \mathbf{e}$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$



University Copy For Library Use

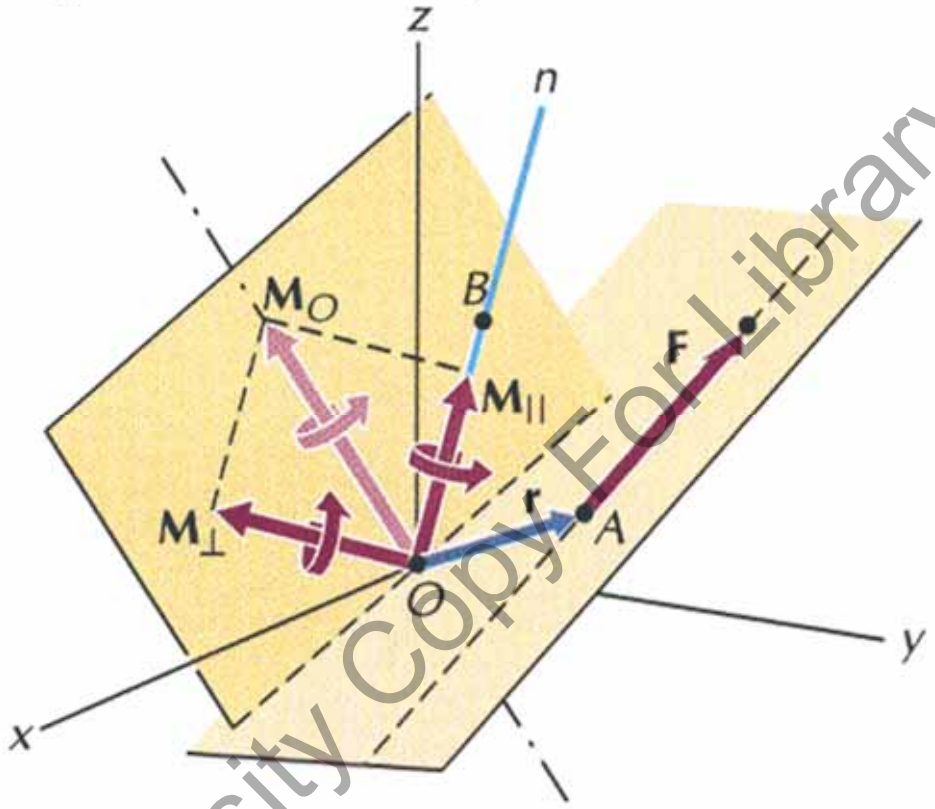
- Momento respecto a un punto.



$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

University Copy For Library Use

- Momento respecto a un eje.

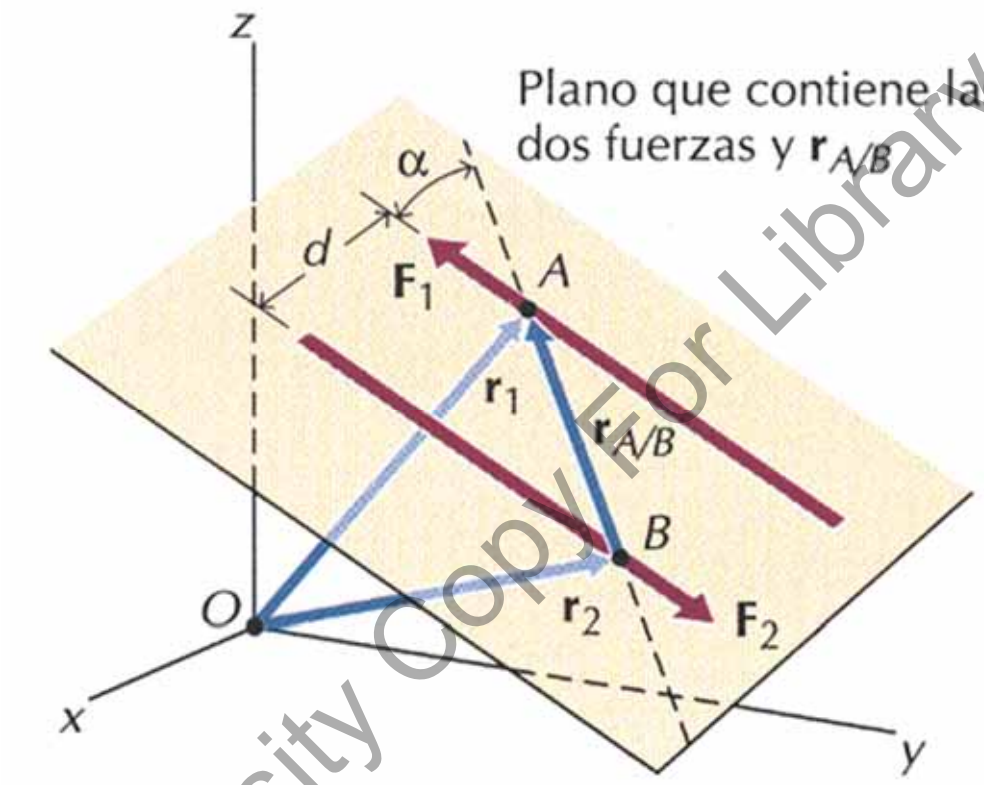


$$\mathbf{M}_O = (\mathbf{r} \times \mathbf{F});$$

$$\mathbf{M}_{OB} = \mathbf{M}_{||} = (\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_n$$

University Copy For Library Use

- Par de fuerzas.

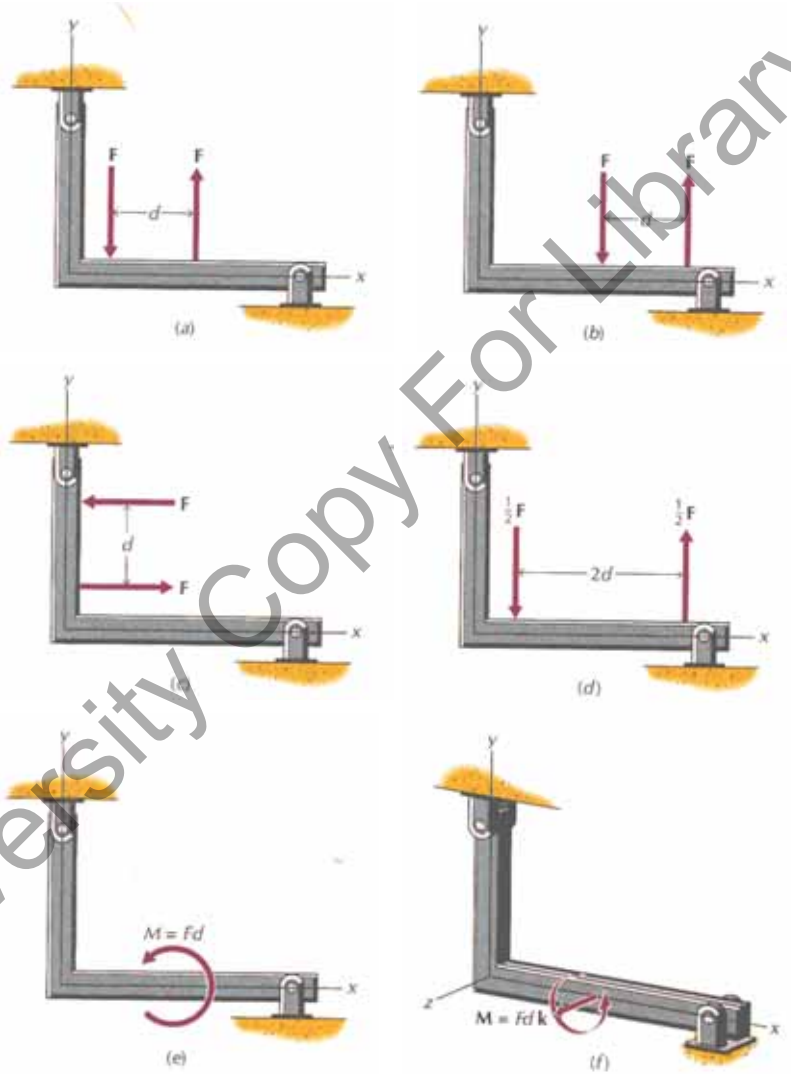


$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 \quad \text{pero} \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2;$$

$$\mathbf{M}_O = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}_1$$

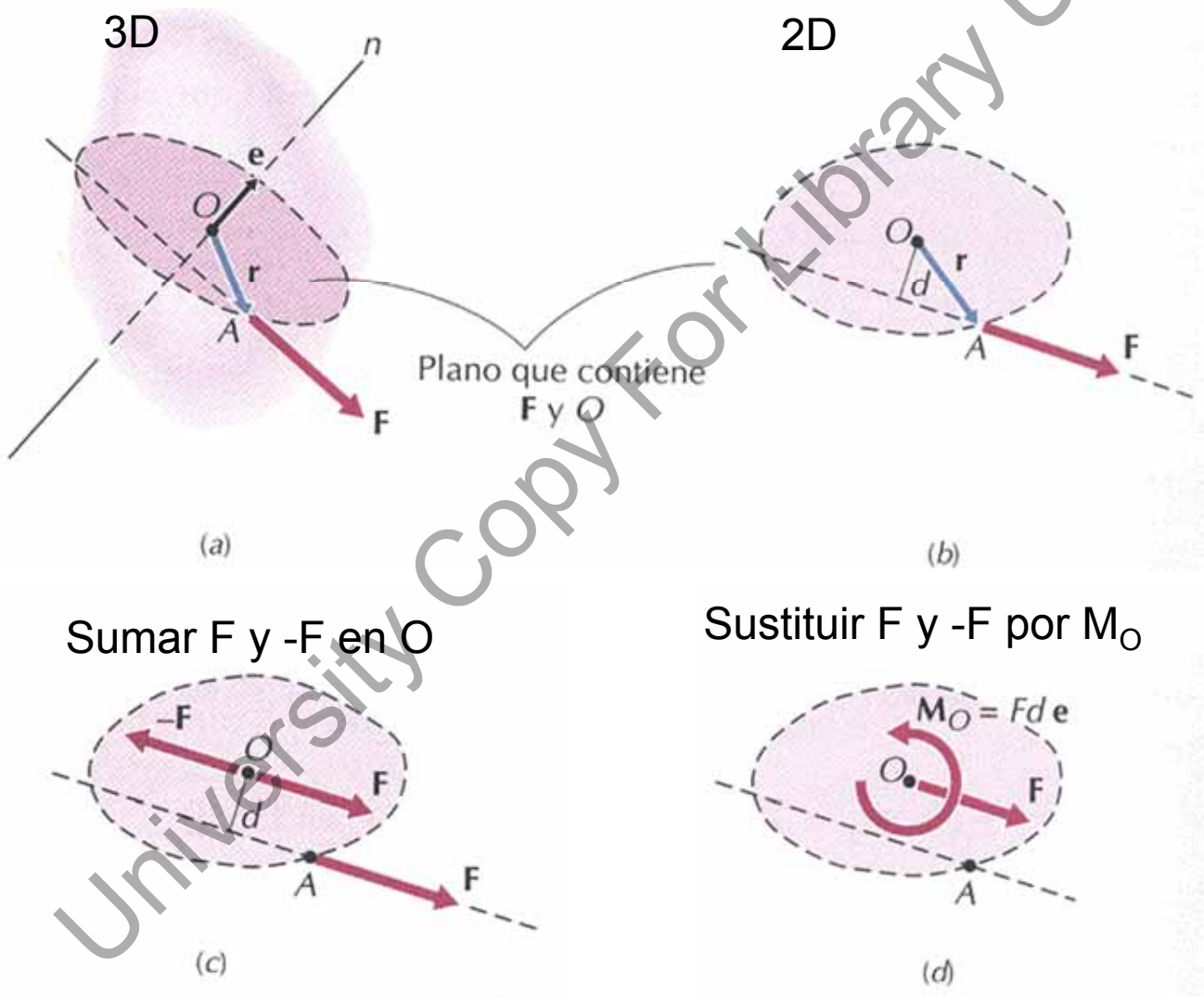
University Copy For Library Use

- Equivalencias en un par de fuerzas.



University Copy For Library Use

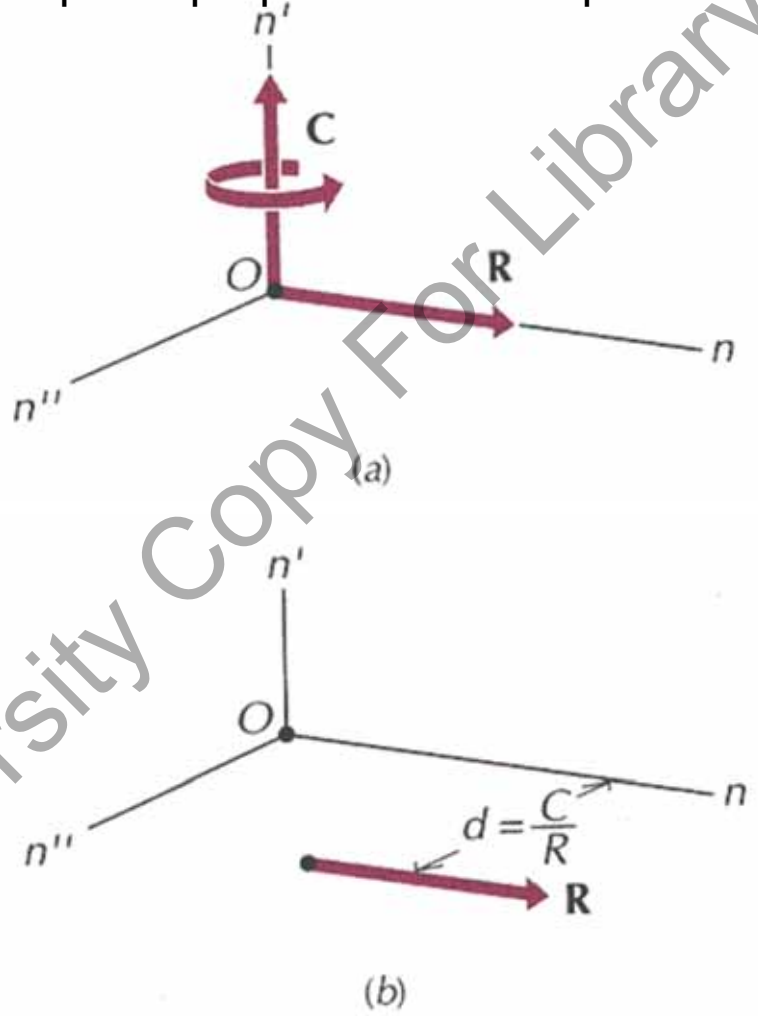
- Sustituir fuerza alejada por fuerza en punto y par.



University Copy For Library Use

- Sustituir fuerza y par perpendicular por fuerza alejada.

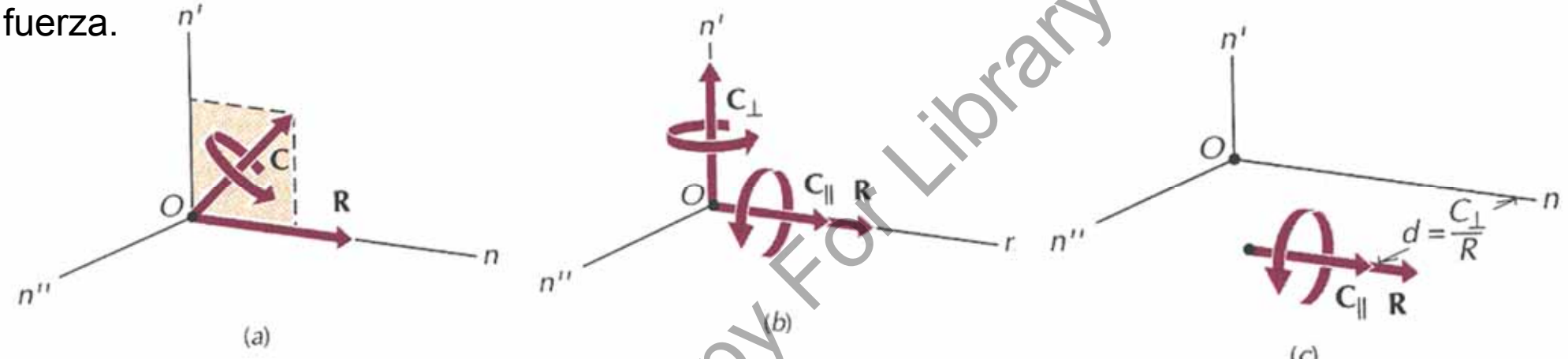
Se pide sustituir la fuerza R y el par C perpendicular a R por una fuerza alejada de O sin par.



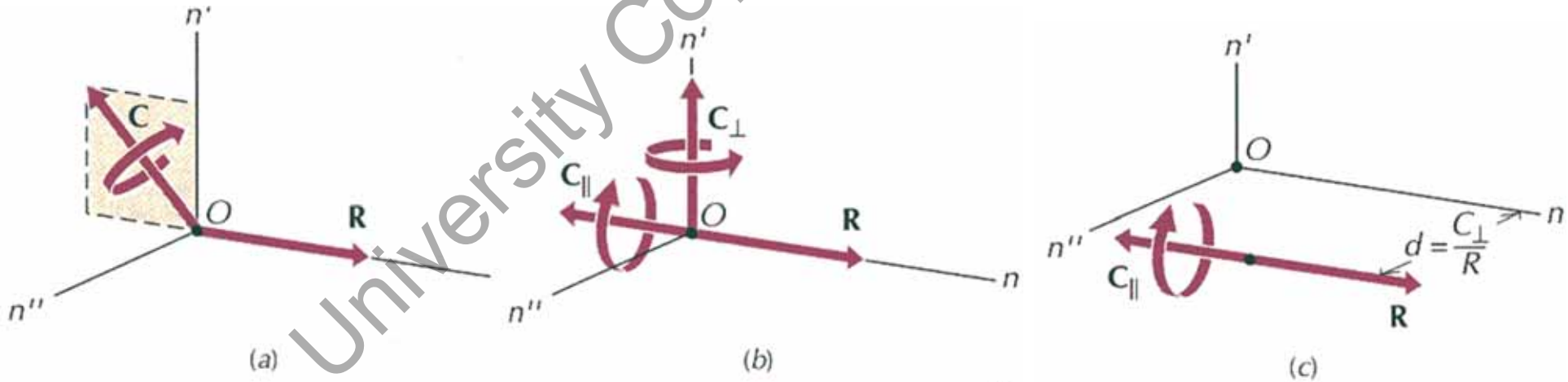
University Copy For Library Use

- Sustituir fuerza y par por fuerza y par en dirección fuerza.

Se pide sustituir la fuerza R y el par C por una fuerza alejada de O y un par en dirección de fuerza.



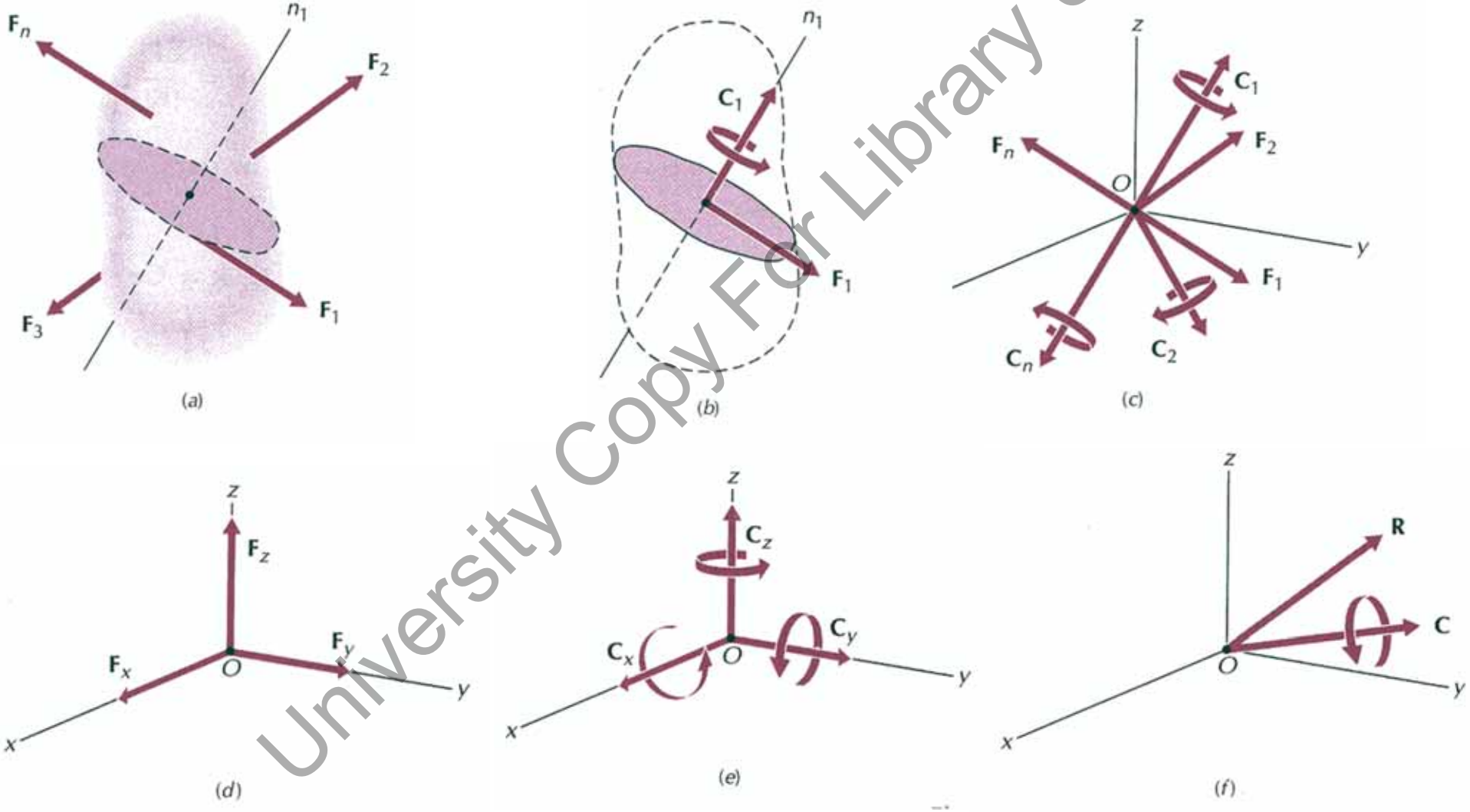
Si el par va en sentido opuesto a la fuerza...



University Copy For Library Use

- Sistemas de fuerzas y momentos cualesquiera.

  Sustituir todas las por una resultante y un momento.



University Copy For Library Use

- Ejercicios clase.

Riley 4-92 Sustituir las tres fuerzas por una e indicar donde colocarla.

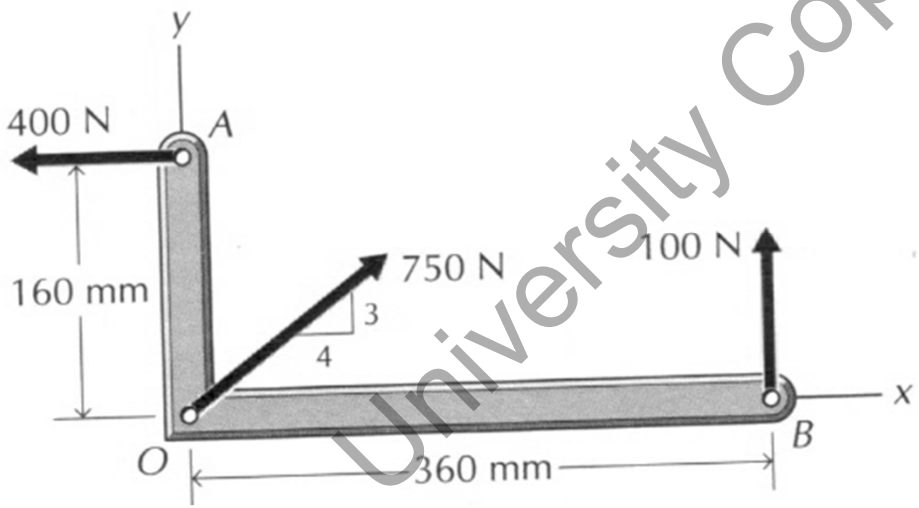
ΣF=(-400+750*4/5, 100+750*3/5, 0) = (200,550,0),

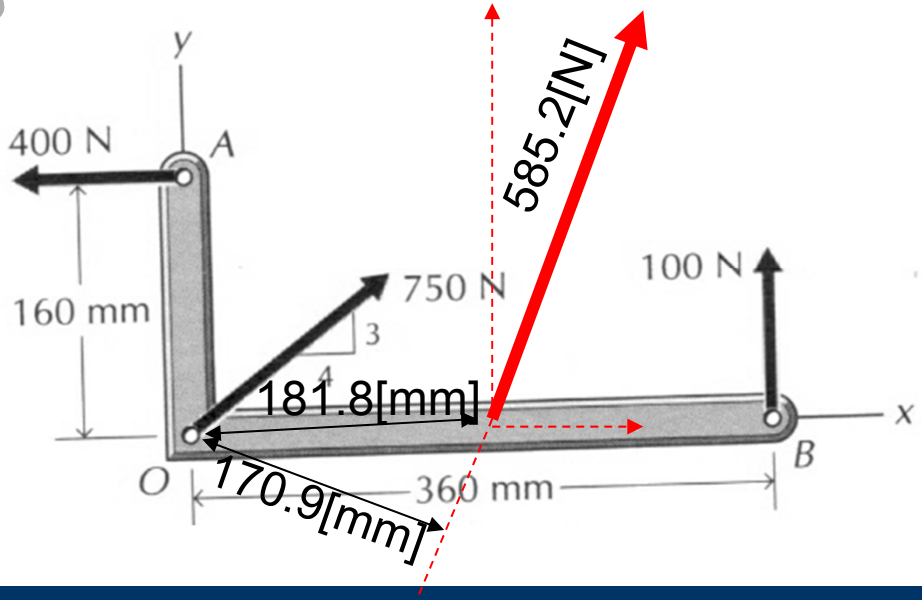
$|F|$=585.2[N];

ΣM_o=(0,0,100*0.36+400*0.16)=(0,0,100) [N·m]

$d=M/F$=100/585.2=0.1709[m],

$d_x=M/F_y$=100/550=0.1818[m]





University Copy For Library Use

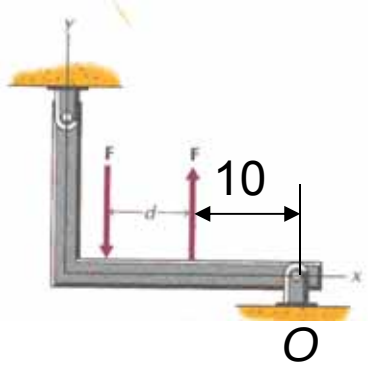
- Ejercicios casa.

Sustituir la fuerza *F*=(2,3,0) aplicada en punto *Q*=(2,0,0) por una fuerza y un momento aplicado en el punto *P*=(1,1,0)

Solución: *F*=(2,3,0) pero aplicada en *P* y *M*=(0,0,5)

Riley 4.23 : Sustituir las fuerzas de la figura por una fuerza y un momento en *O*.

Solución: *F*= nula, *M*=(0,0,F·d)



University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Repaso a conceptos de álgebra vectorial.

➢ Consideraciones sobre resultados numéricos.

➢ Cálculo de momentos.

➢ Sustitución de fuerzas, por fuerza y momento y viceversa.

University Copy For Library Use

S03t.- Ejercicios de Fuerzas y Momentos.

Mejora 1415 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.
  - Cálculo de resultante de fuerzas por método gráfico y vectorial.
  - Cálculo de momentos por método gráfico y vectorial.
  - Pares de fuerzas.
  - Reducción de momentos y fuerzas.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos de esta sesión

➢ Realización de ejercicios que implican la sustitución de fuerzas por el cálculo de reacciones y de fuerzas y momentos equivalentes primero en 2D con tres ecuaciones (Fx, Fx, Mz) y luego en 3D con 6 ecuaciones (Fx, Fx, Fz, Mx, My, Mz).

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Ejercicio 4.15 Riley.

Se aplican dos fuerzas F_1 y F_2 a una placa según se indica en la figura. Calcule:

- El momento de la fuerza F_1 respecto al punto A y dirección horaria o contra.
- El momento de la fuerza F_2 respecto al punto B y dirección horaria o contra.
- La fuerza resultante de F_1 y F_2 en el punto de aplicación de ambas.
- El momento resultante debido a F_1 y F_2 en el punto A y dirección horaria o contra.

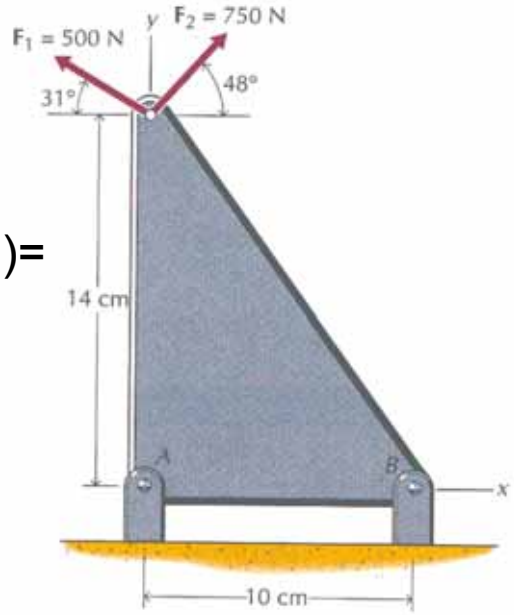
M_{a1}=500 * cos(31º) [N] * 0.14 [m] = 60.00 [N·m] antihorario.

M_{b2}=-750 * cos(48º) [N] * 0.14 [m] - 750 * sin(48º) [N] * 0.10 [m] = -126.00 [N·m], negativo y por tanto horario.

F_t=(-500 * cos(31º),500 * sin(31º),0)+(750 * cos(48º), 750 * sin(48º) ,0)= (73.26, 814.8776566,0) = 818.16 [N]

M_{a12}=500 * cos(31º) [N] * 0.14 [m] -750 * cos(48º) [N] * 0.14 [m] = -10.26 [N·m], negativo y por tanto horario.

Si usamos la resultante: M_{a12}= -73.26 [N] * 0.14 [m] = -10.26 [N·m],



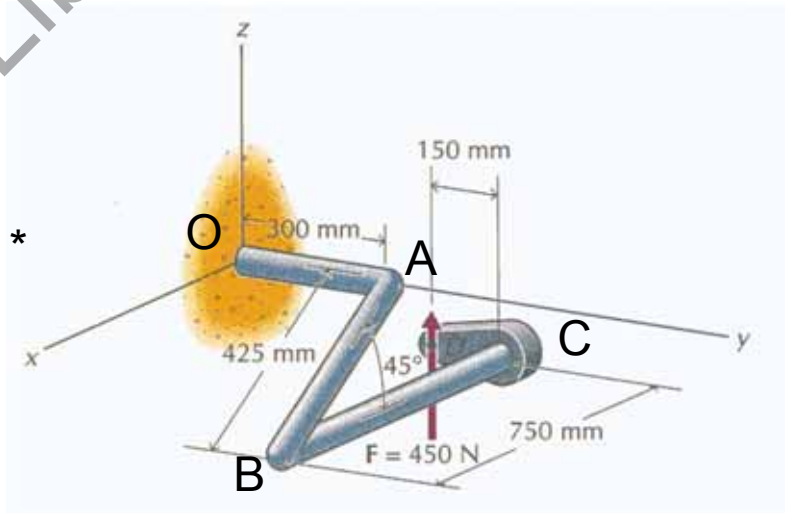
University Copy For Library Use

• Ejercicio 4.134 Riley.

Una barra doblada soporta una fuerza de 450 N en la forma que se indica en la figura.

➢ Sustituir la fuerza de 450 N por una fuerza F_t que pase por el punto O y un par M_o.

➢ Determinar los momentos de torsión que origina la fuerza F en los 3 segmentos de la barra: M_{oa}, M_{ab} , M_{bc} .



F_t=(0,0,450) [N]

Vector D=(0.425 * cos(45º) - 0.750, 0.300-0.150, -0.425 * sin(45º))= (-0.45, 0.15, -0.30)
A=(0,0.3,0), B=(0.3,0.3,-0.3), C=(-0.45,0.3,-0.3)

M_o= (-0.45, 0.15, -0.30) x (0,0,450)=(67.5, 202.27, 0)

M_{oa}= M_o · oa / |oa| = M_o · (0,0.3,0)/√(0²+0.3²+0²) =
67.5 * 0 + 202.27 * 1 + 0 * 0 =202.3 [Nm]

M_{ab}= M_o · ab / |ab| = 47.70 [Nm]

M_{bc}= M_o · bc / |bc| = 67.50 [Nm].

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios de cálculo de fuerzas y momentos de Riley resueltos en clase.

University Copy For Library Use

S04t.- Equilibrio de Sólido.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ....

- Repaso sesión anterior.

  - Ejercicios de cálculo de fuerzas y momentos de Riley resueltos en clase.
  - Propuesta de ejercicios para hacer en casa.

University Copy For Library Use

• Objetivos de esta sesión

➢ Aprender a simplificar puntos de fijación de una estructura por las fuerzas y momentos que dicha fijación está bloqueando.

➢ Comprender que en esta asignatura en 2D pueden existir tres incógnitas de reacción que generalmente son dos apoyos A y B con Fax, Fbx y Fby ó en el caso de empotramientos en un punto A Fax, Fay y Maz.

➢ Comprender que en esta asignatura en 3D pueden existir seis incógnitas de reacción.

➢ Comprender que si hay más incógnitas de reacción se necesita algún dato extra como la deformación de la estructura por lo que necesitaremos cursas elasticidad y resistencia de materiales.

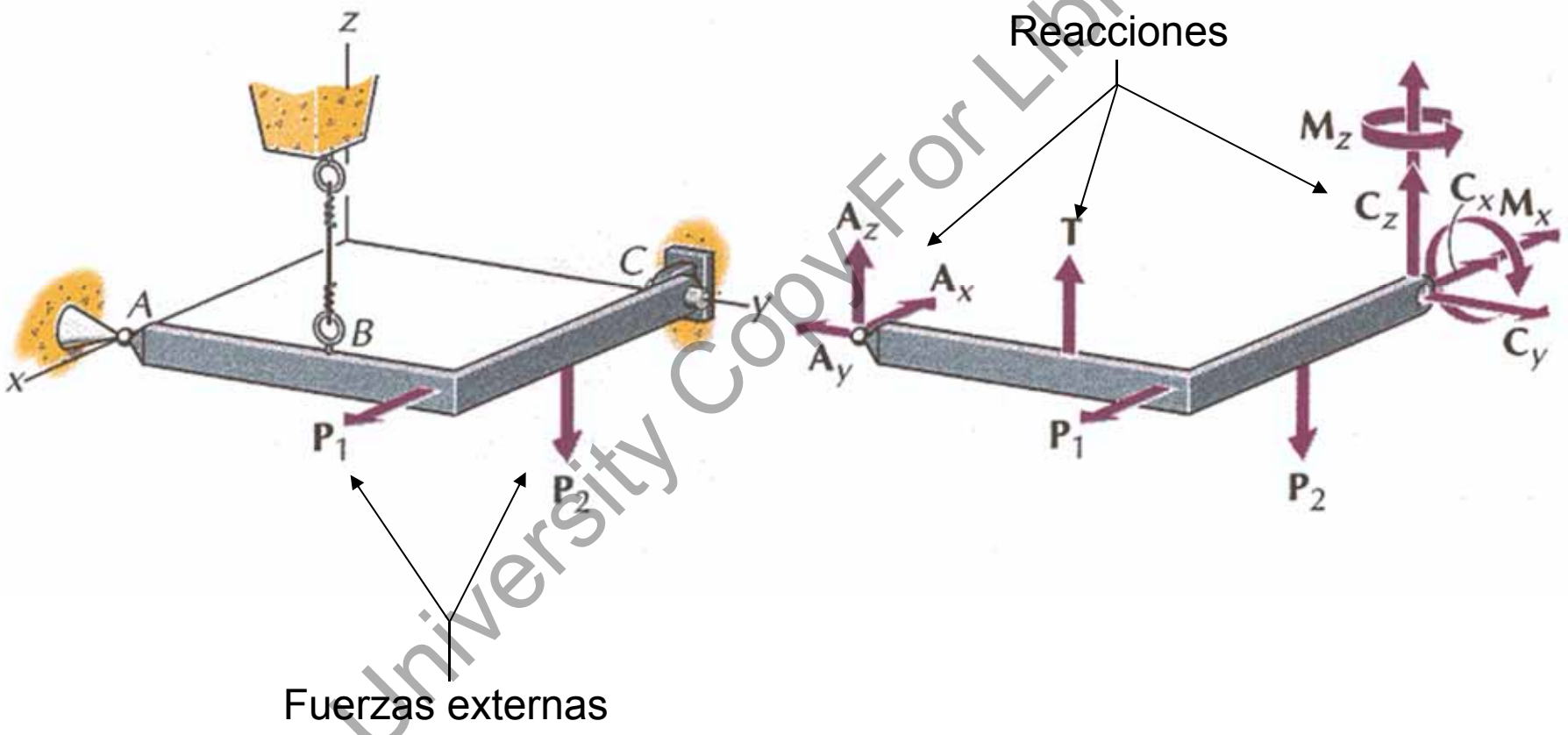
➢ Realizar un ejercicio calculando reacciones a partir de estudio y simplificación del apoyo.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Representación de un sólido libre.

Un sólido sometido a unas cargas en equilibrio con sus fuerzas y momentos de reacción se puede representar como sólido aislado colocando todas estas reacciones en equilibrio.

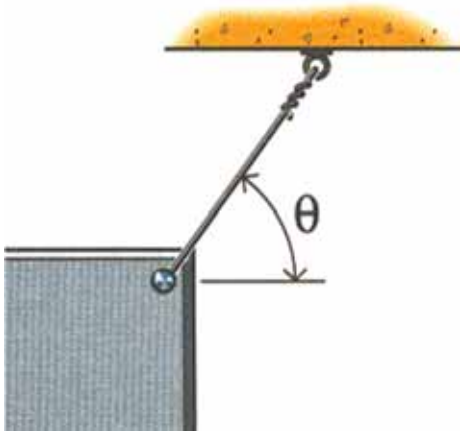


University Copy For Library Use

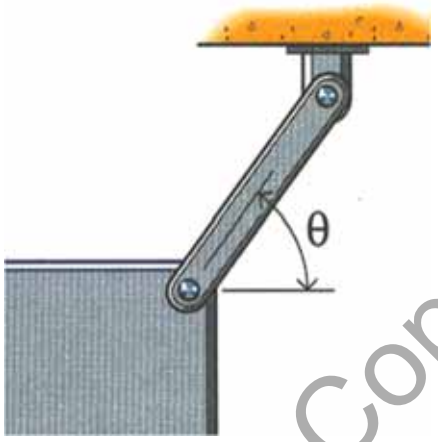
- Sustitución de anclajes por reacciones.

Para poder sustituir los anclajes por sus reacciones hay que estudiarlos por tipos.

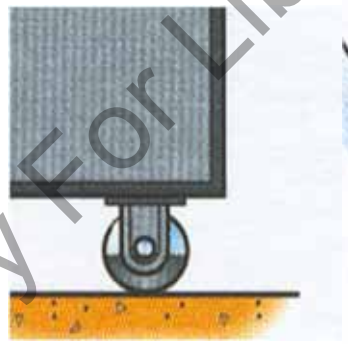
Cable



Barra rígida

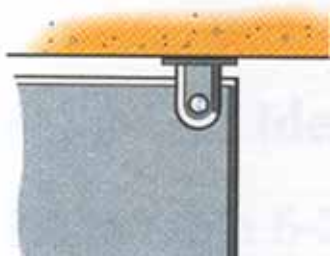


Rodamiento



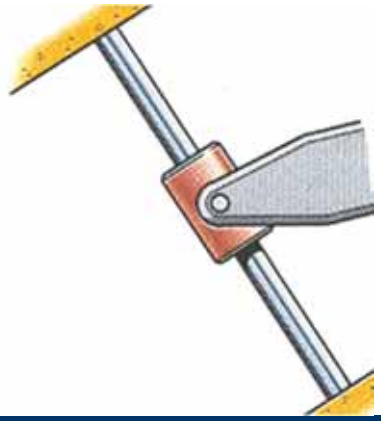
Contacto sin rozamiento

Pivote

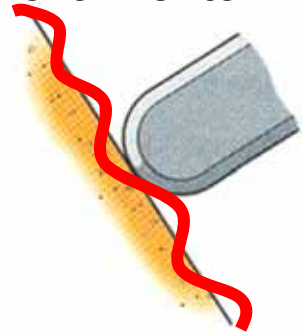


Ranura

Collar



Contacto con rozamiento



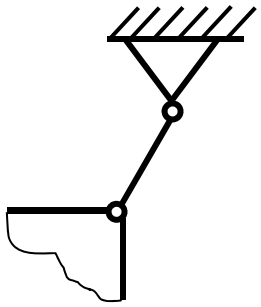
University Copy For Library Use

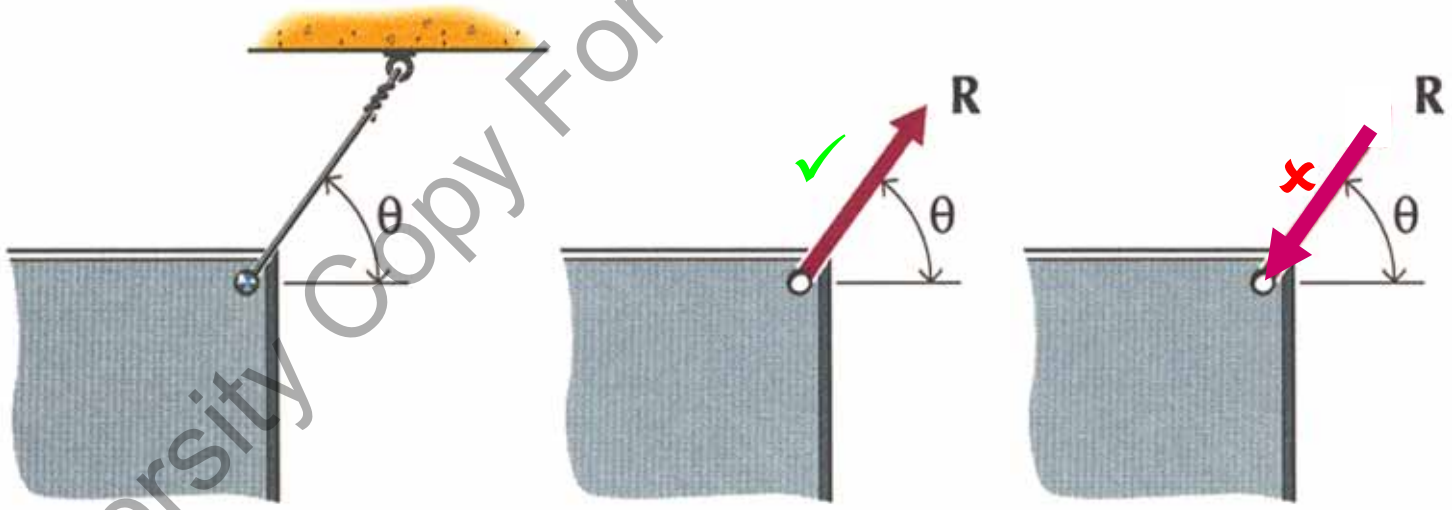
- Equilibrio de anclaje con cable.

El sólido no puede alejarse en la dirección del cable pero sí acercarse, desplazarse tangencialmente y rotar.

El momento de reacción es nulo y la fuerza tan sólo puede ir en la dirección del cable.

Símbolo



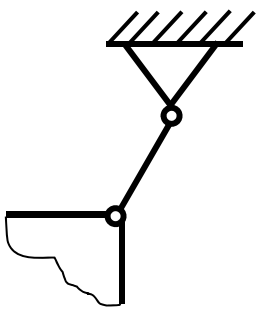


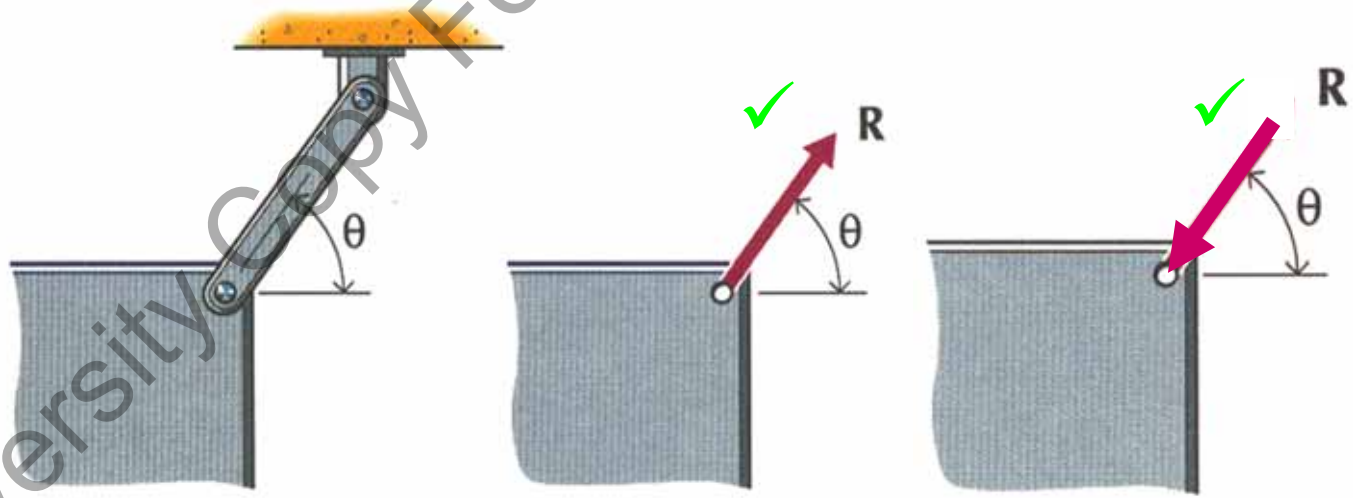
University Copy For Library Use

• Equilibrio por barra rígida con pivotes.

Es idéntico al caso anterior del cable pero ahora la fuerza también puede ir en dirección-sentido de compresión de la barra rígida. Sigue sin aceptar momentos ni fuerzas en otras direcciones. Sigue sin haber momento de reacción pensando en 2D.

Símbolo



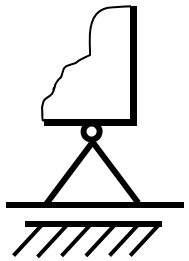


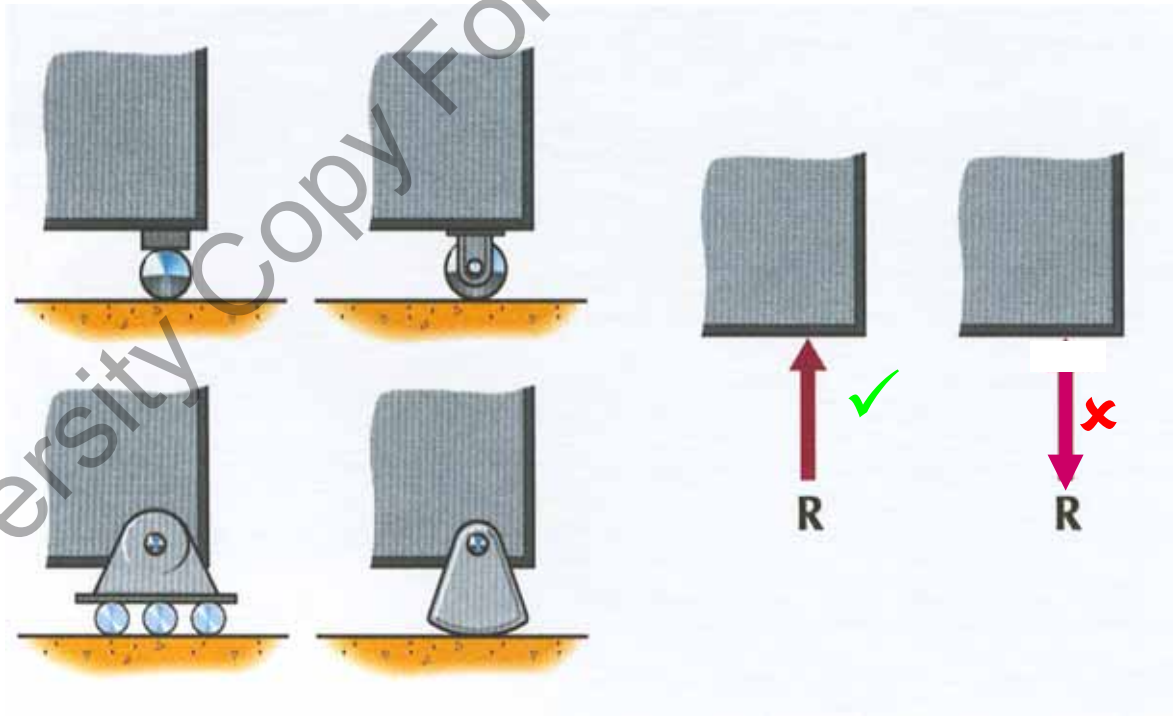
University Copy For Library Use

- Equilibrio por rodamiento.

Un apoyo por rodamiento de bola, rodillo o zapata implica que las fuerzas de reacción son perpendiculares al apoyo y de un único sentido. No hay fuerzas laterales ni momentos.

Símbolo



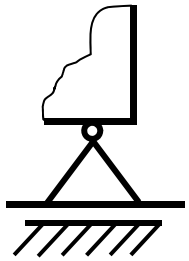


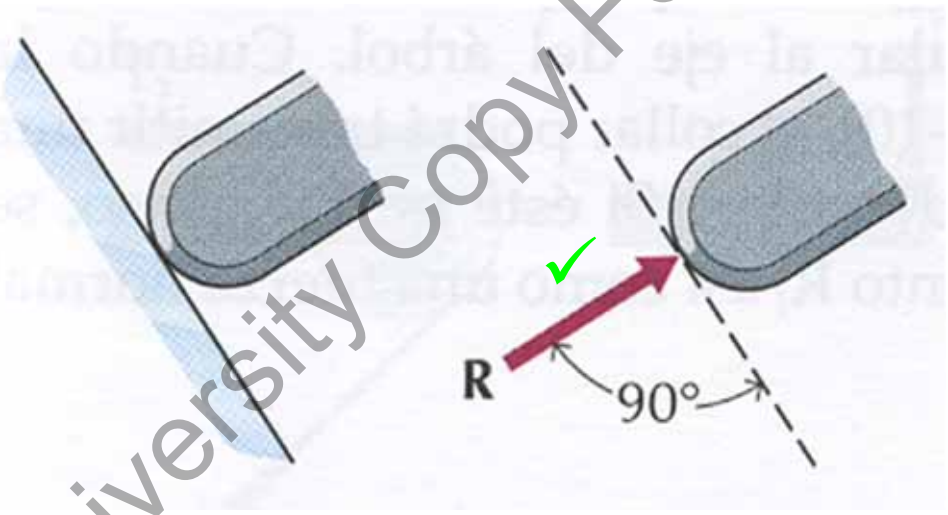
University Copy For Library Use

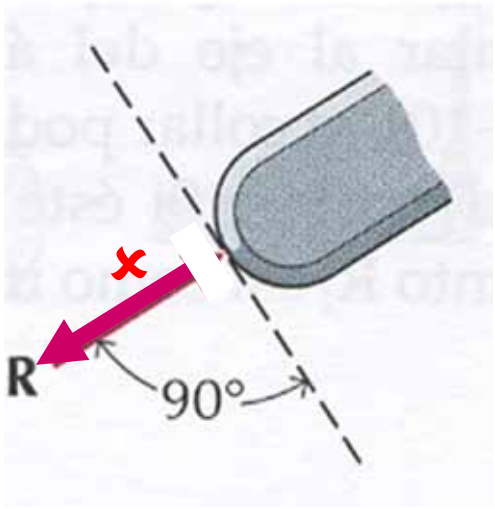
- Equilibrio por contacto puntual sin rozamiento.

Este caso es idéntico al anterior. Tan sólo hay fuerzas normales a la superficie.

Símbolo



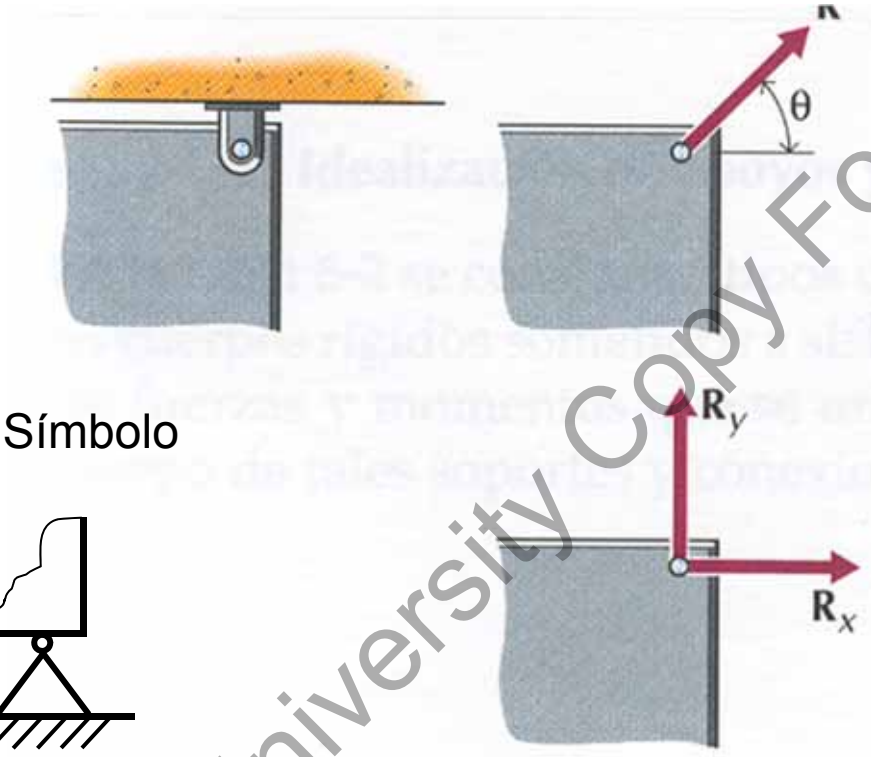




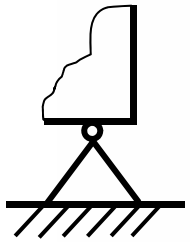
University Copy For Library Use

- Equilibrio con anclaje de pivote.

En este anclaje por primera vez las fuerzas de reacción pueden ser en cualquier dirección.
Sigue sin haber momento de reacción pensando en 2D.



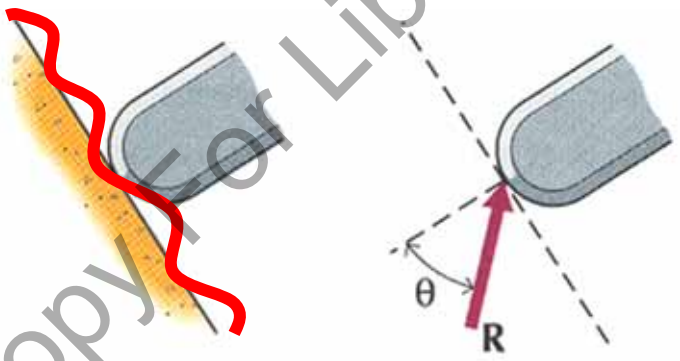
Símbolo



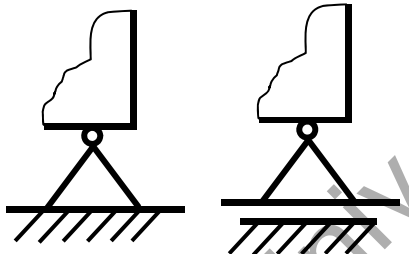
University Copy For Library Use

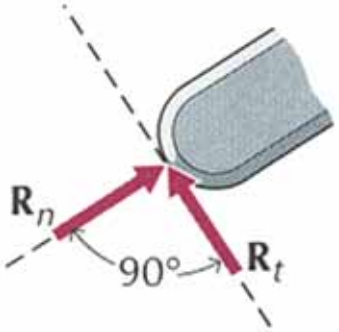
• Equilibrio con apoyo puntual con rozamiento.

Al introducir el rozamiento la fuerza de reacción incluye la posibilidad de tener una componente en dirección tangencial. El símbolo denota que el apoyo está fijo para ángulos en los que no se supere el coeficiente de fricción.



Símbolo





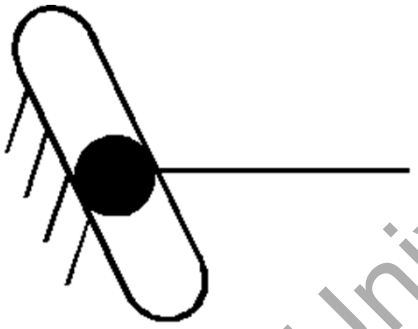
Comprobar:
$R_t \leq \mu R_n$.

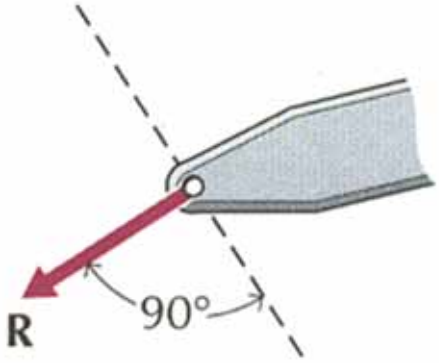
University Copy - For Library Use

- Equilibrio con guía / deslizadera.

Al producirse el anclaje en una ranura es posible el desplazamiento en la dirección de la ranura y por tanto las fuerzas de reacción son normales a la ranura. Tampoco hay momentos de reacción.

Símbolo



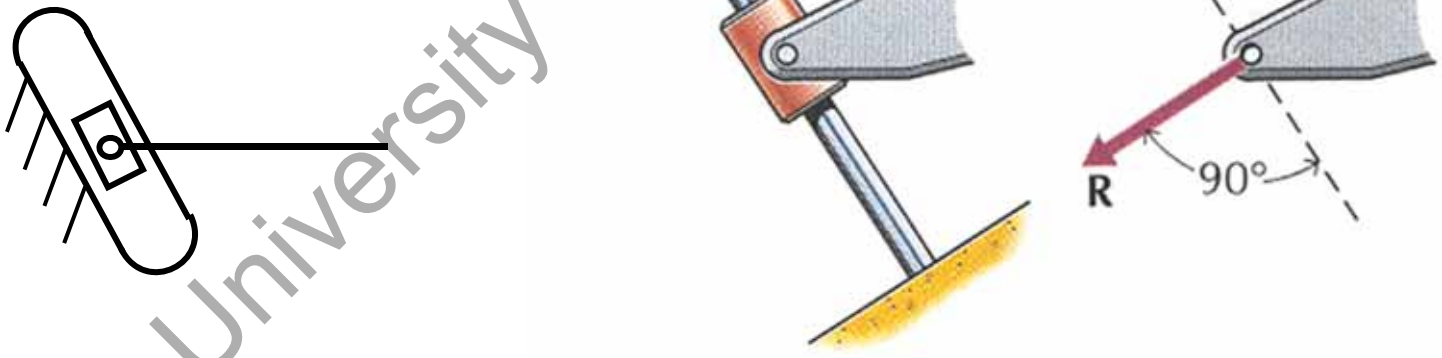


University Copy For Library Use

- Equilibrio con collar articulado.

Este caso es idéntico al de la ranura. Las reacciones son normales a la dirección de la columna guía y no hay momentos.

Símbolo

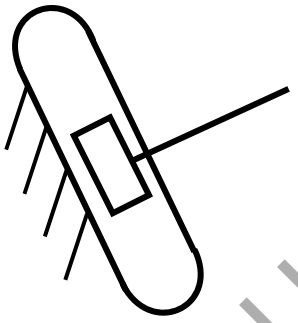


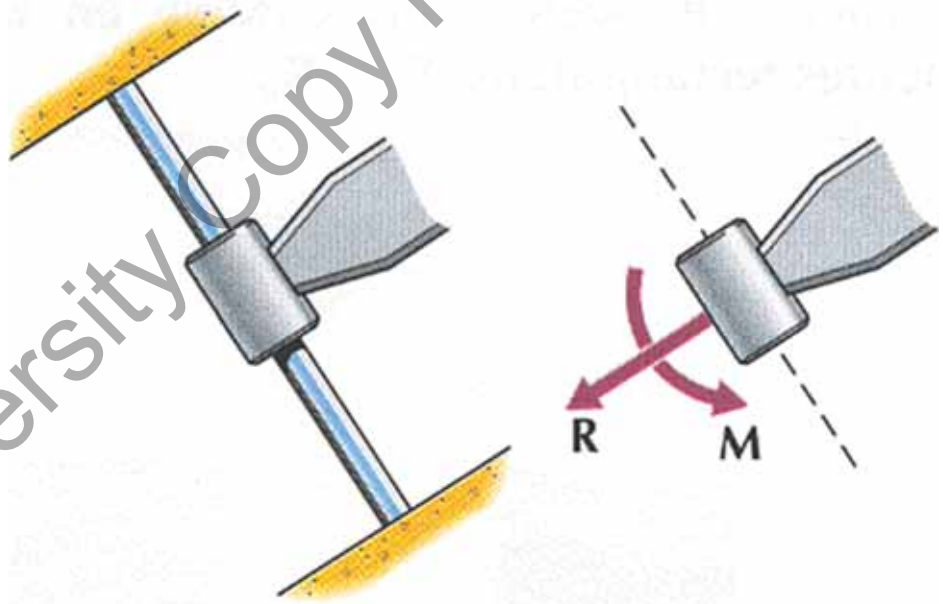
University Copy For Library Use

- Equilibrio con collar rígido.

Al no haber una rótula se introduce por primera vez la posibilidad de tener un momento de reacción. Las fuerzas de reacción continúan en la dirección normal a la columna.

Símbolo



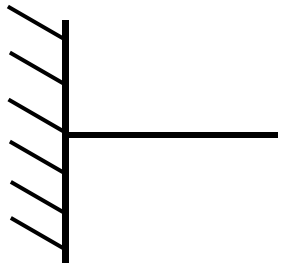


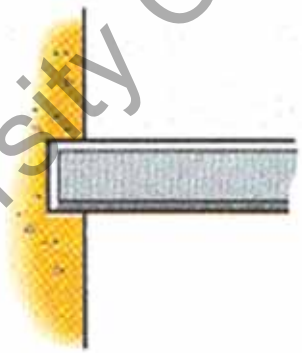
University Copy For Library Use

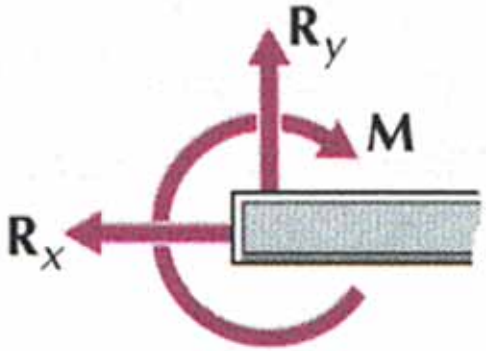
- Equilibrio con anclaje rígido - empotrado.

El caso más restrictivo es el anclaje rígido o empotrado en que podemos tener fuerzas de reacción y momentos.

Símbolo



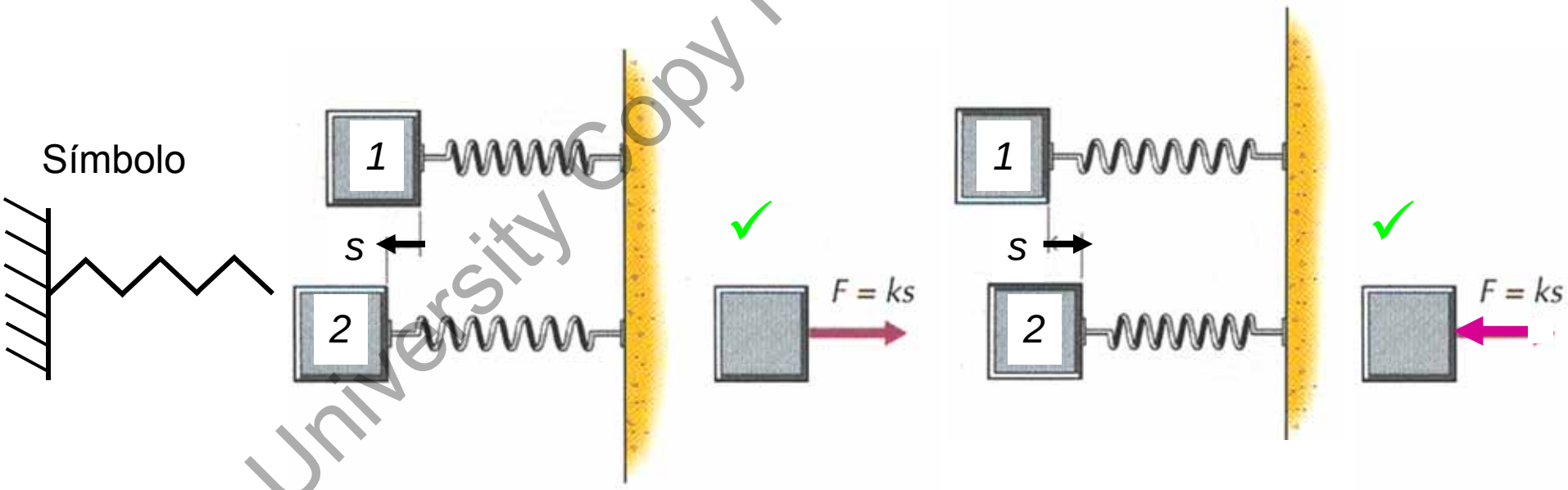




University Copy For Library Use

- Equilibrio con anclaje con muelles.

En el caso de un anclaje con muelles la fuerza de reacción está en la dirección del muelle y es proporcional al desplazamiento o incremento de longitud del muelle.

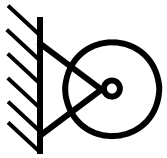


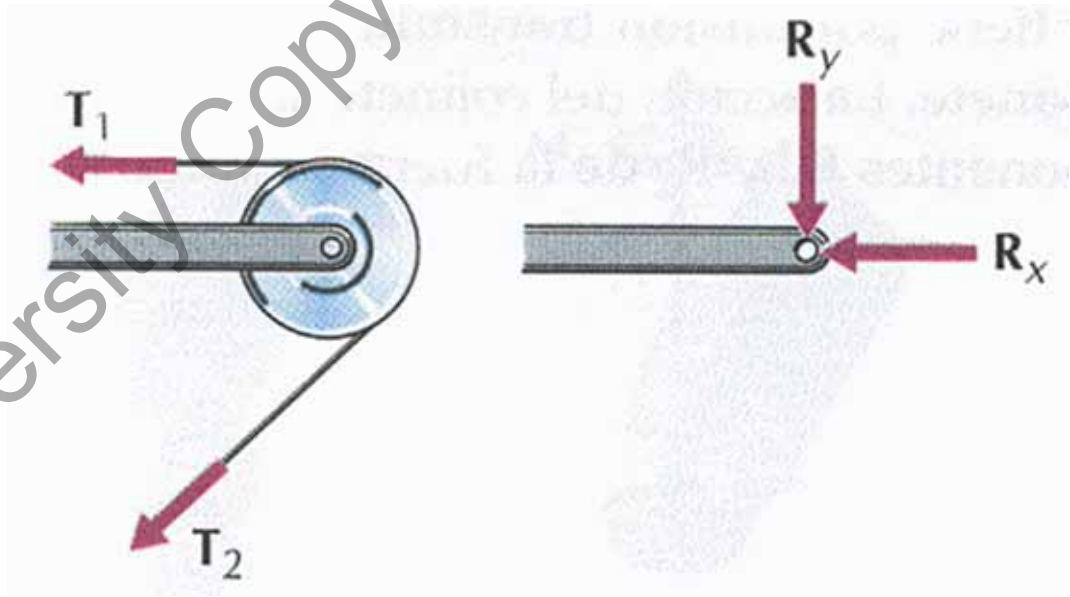
University Copy For Library Use

- Equilibrio con polea simple.

En el caso de la polea no se trasmiten momentos pero si los esfuerzos al punto de giro de la rueda de la polea.

Símbolo



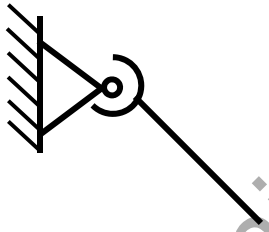


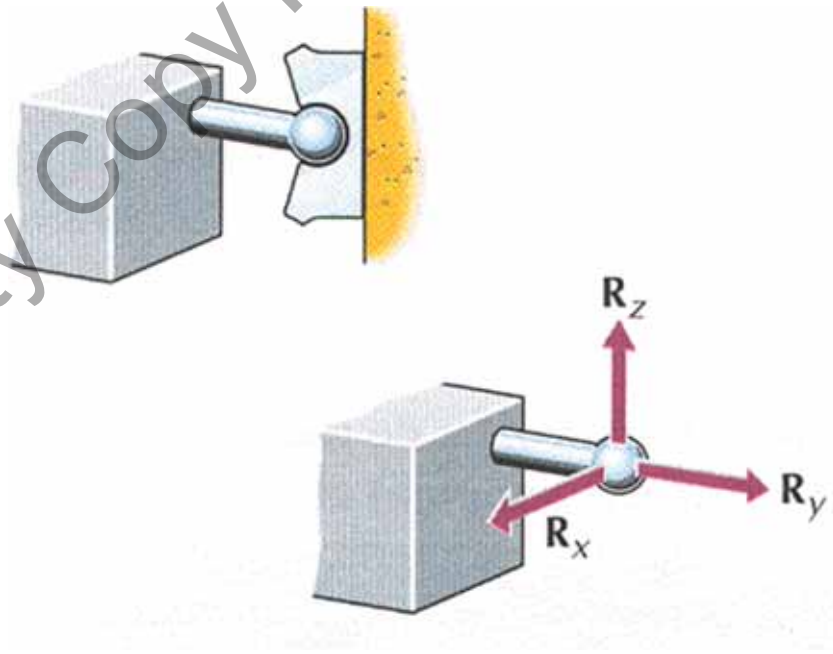
University Copy For Library Use

- Equilibrio con rótula esférica.

Para no trasmitir momentos en caso de estar pensando en ejercicios en 3D se debe usar una rótula esférica. Con este apoyo se trasmiten fuerzas en las tres direcciones pero no momentos.

Símbolo



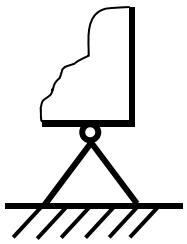


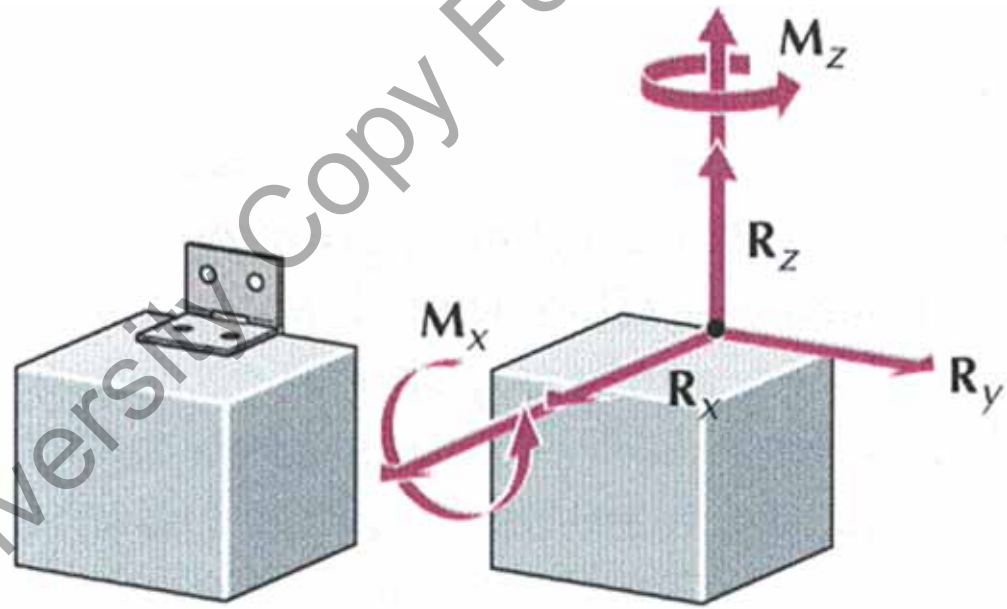
University Copy For Library Use

• Equilibrio con bisagra.

En el caso de tener una bisagra tenemos todo tipo de fuerzas y momentos de reacción excepto el momento en el eje de giro de bisagra.

Símbolo



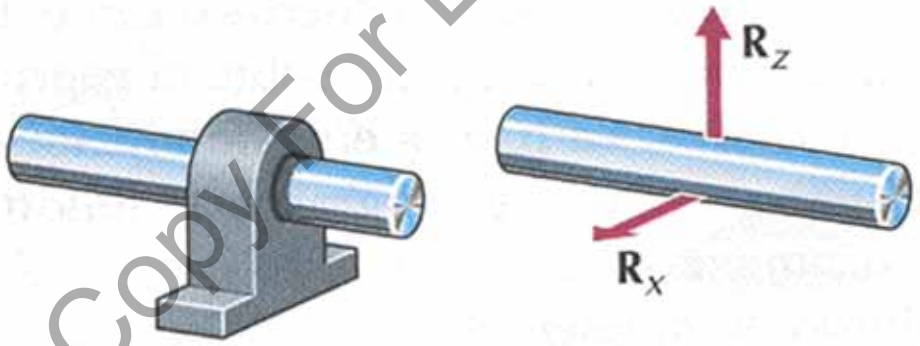


Sólo $M_y=0$

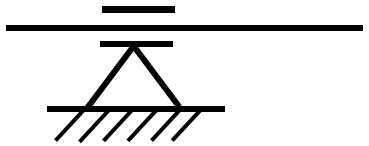
University Copy For Library Use

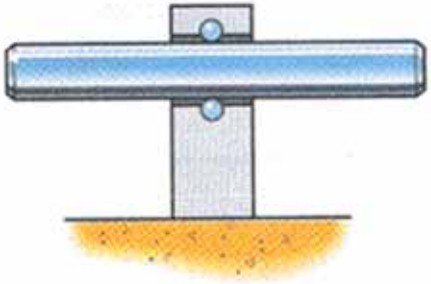
• Equilibrio con cojinete de bolas.

En el caso de colocar un eje con un cojinete tan sólo tendremos fuerzas normales a la dirección del eje. Es discutible si hay momento M_x y M_z. dependiendo del cojinete utilizado tan y como se verá en Dibujo Industrial.



Símbolo



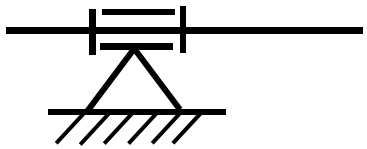


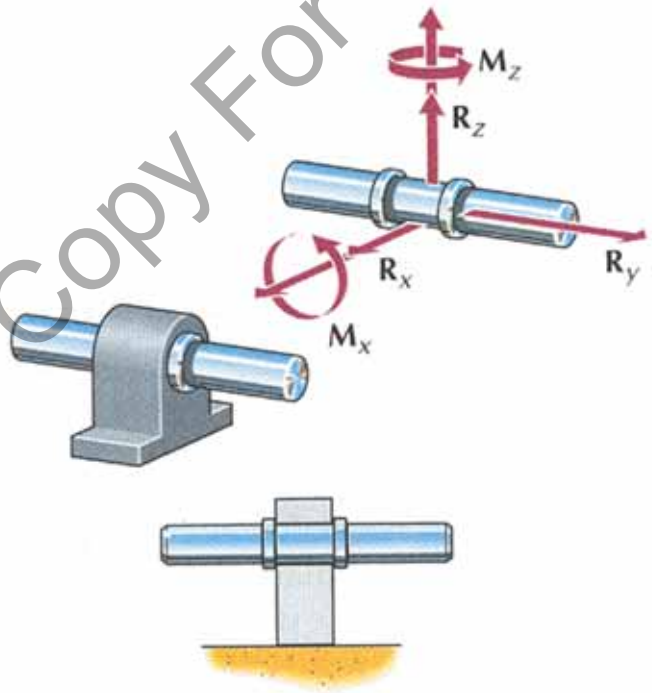
University Copy For Library Use

- Equilibrio con cojinete de tope axial.

En el caso de tener apoyos en el cojinete que impidan el desplazamiento la única reacción que no aparece es el momento en la dirección de giro.

Símbolo





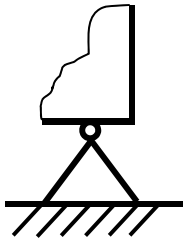
Sólo M_y=0

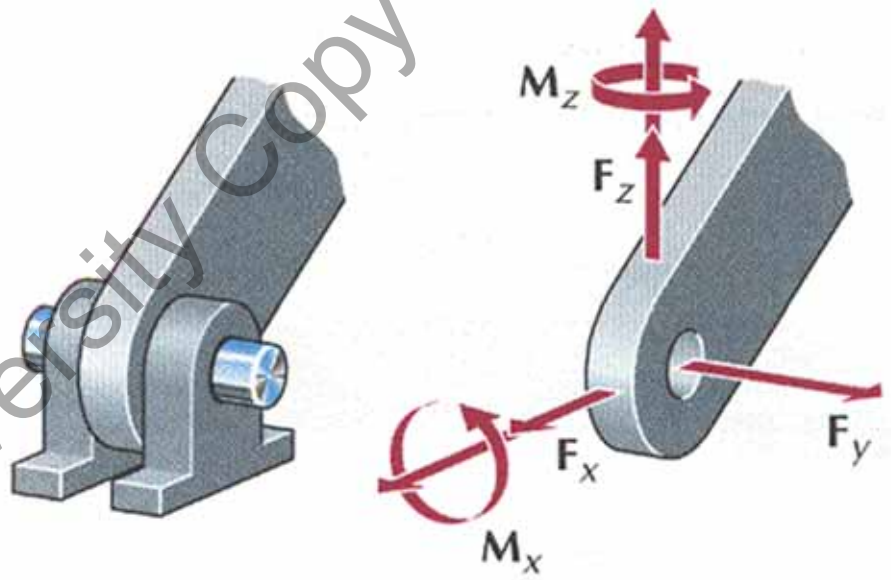
University Copy For Library Use

- Equilibrio con pasador liso.

Este caso es idéntico al anterior. Tan sólo no aparece el momento de reacción en la dirección del eje del pasador.

Símbolo





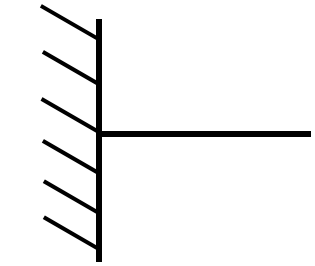
Sólo M_y=0

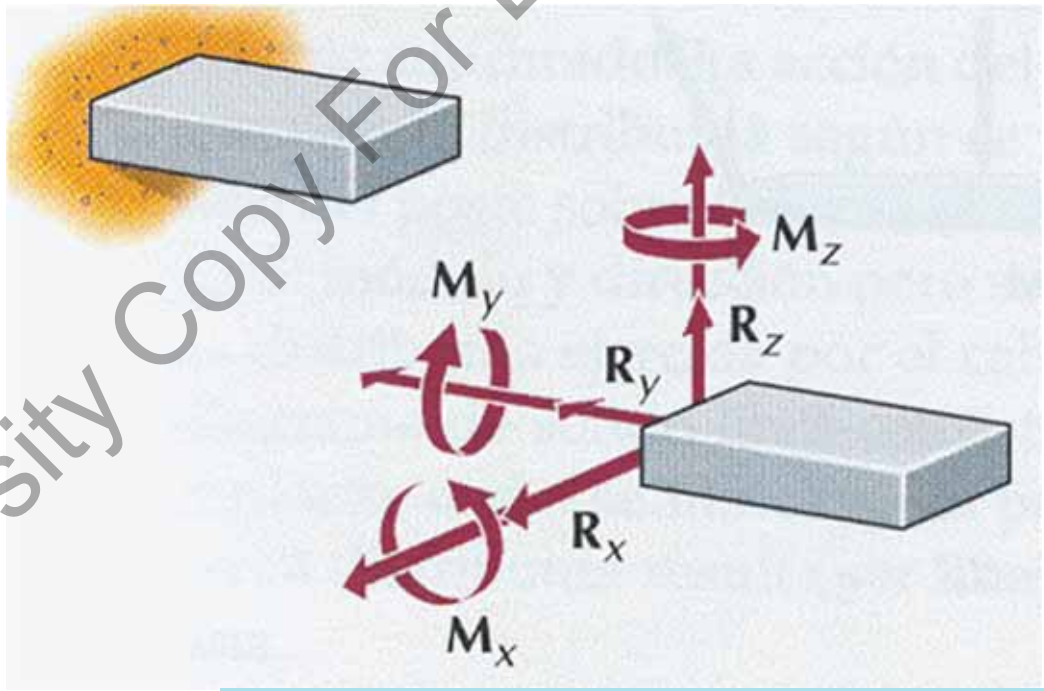
University Copy For Library Use

- Equilibrio con anclaje empotrado.

En este anclaje hay todas las componentes de fuerzas y momentos de reacción.

Símbolo



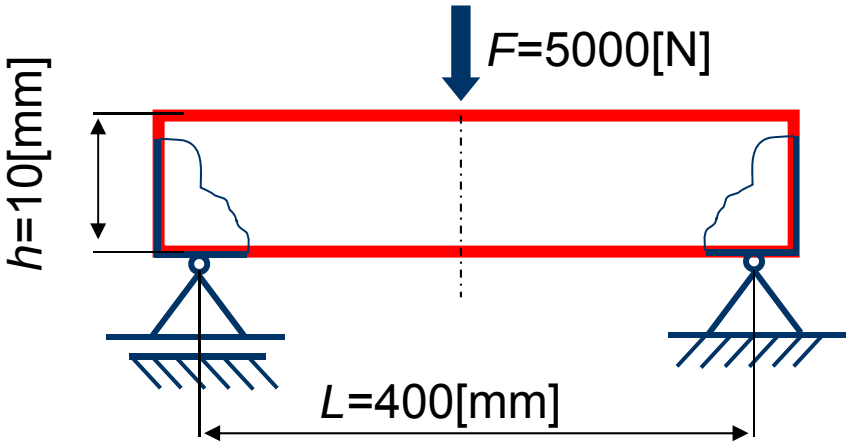


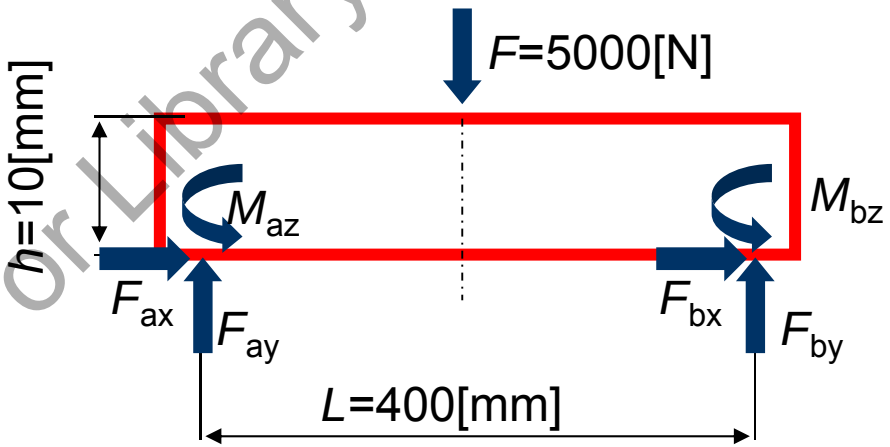
Hay las tres fuerzas y los tres momentos.

University Copy For Library Use

• Planteamiento de un problema de equilibrio.

Se pide dar las fuerzas y momento de reacción de la barra de la figura.





Empezamos considerando tan sólo las ecuaciones de equilibrio 2D:

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{ax}+F_{bx}=0;$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_{ay}+F_{by}-5000=0;$

$\Sigma M_z=0 \Rightarrow M_{az}+M_{bz}+F_{by}*0.4-5000*0.4/2=0;$

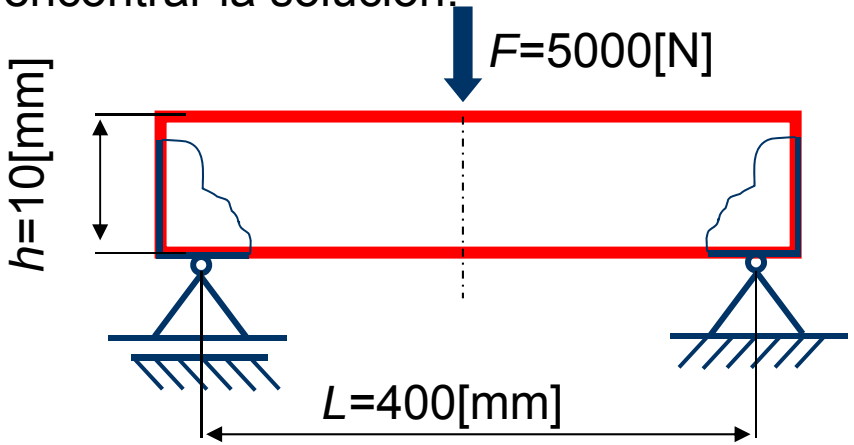
Mal planteado.
Hay que simplificar los apoyos

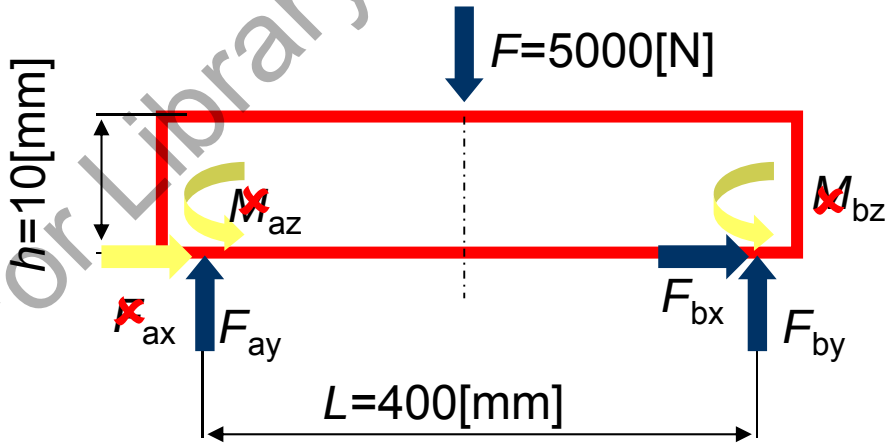
Comprobamos que tenemos tres ecuaciones y seis incógnitas y que no hay solución a no ser que simplifiquemos los empotramientos.

University Copy For Library Use

• Simplificación de un problema de equilibrio.

Si eliminamos las fuerzas y momentos de reacción que no aporta cada apoyo si podremos encontrar la solución.





Empezamos considerando tan sólo las ecuaciones de equilibrio 2D:

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{bx}=0;$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_{ay} + F_{by} -5000=0;$

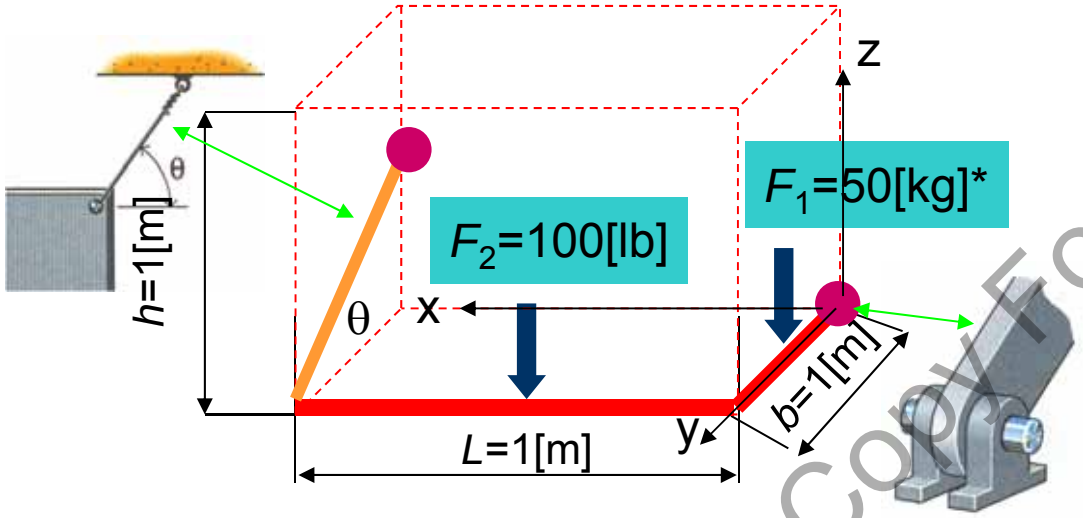
$\Sigma M_z=0 \Rightarrow F_{by}*0.4 -5000*0.4/2 =0;$

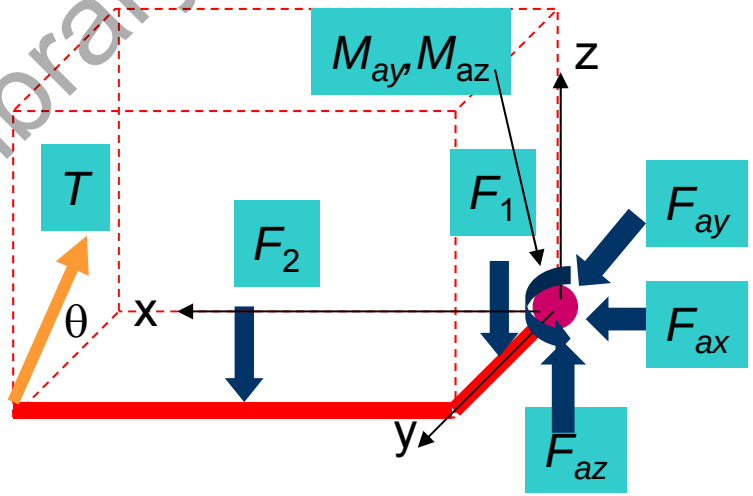
La solución encontrada $F_{bx}=0$; $F_{ay}=F_{by}=2500$ [N];

University Copy For Library Use

• Ejemplo de ejercicio ingeniería.

Dar la mínima tensión del cable para soportar la estructura en forma de "L" si tan sólo podemos variar el ángulo "θ".





Tras simplificar los apoyos analizamos las seis ecuaciones de equilibrio:

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{ax}=0$; $\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_{ay}-T*\cos(\theta)=0$; $\Sigma F_z=0 \Rightarrow F_{az}-F_1-F_2+T*\sin(\theta)=0$;

$\Sigma M_x=0 \Rightarrow -F_1*b/2 - F_2*b + T*\sin(\theta)*b =0; \Rightarrow T = (F_1/2 + F_2) / \sin(\theta)$

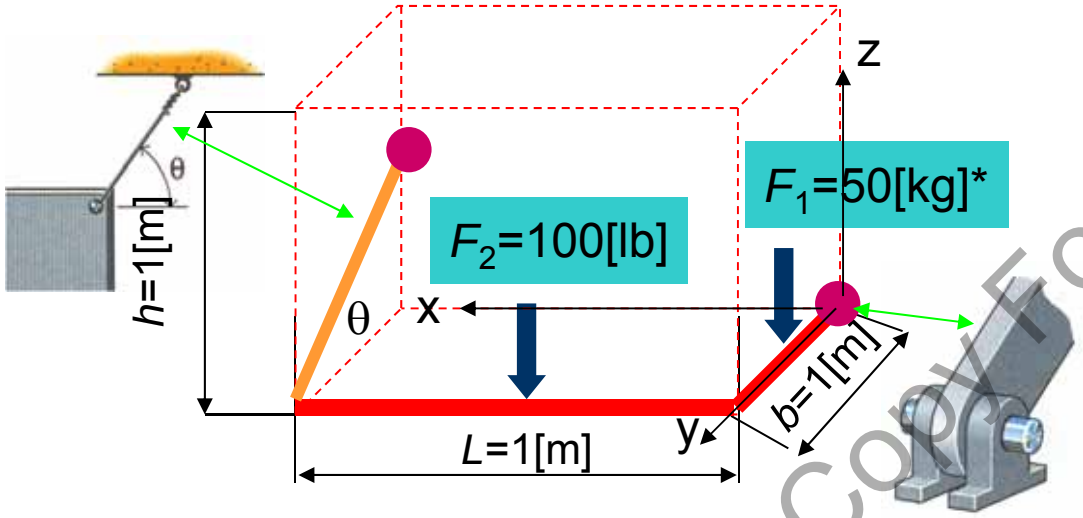
$\Sigma M_y=0 \Rightarrow F_2*L/2 - T*\sin(\theta)*L + M_{ay}=0;$

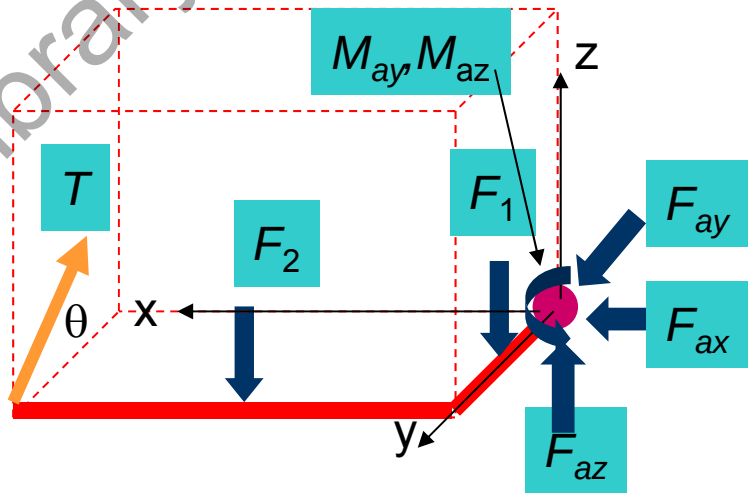
$\Sigma M_z=0 \Rightarrow -T*\cos(\theta)*L + M_{az} =0;$

University Copy For Library Use

• Solución ejemplo de ejercicio ingeniería.

Tras analizar el equilibrio de momentos en el apoyo en eje "y" (M_{ay}) se comprueba que la tensión del cable será mínima cuando sin(θ) sea máximo, o sea, θ=90º.





Por tanto mínima tensión: $T_{min} = (F_1/2 + F_2) / \sin(90º)$

Por supuesto hay que hacer el cálculo con las unidades correctas:

F_1=50[kg] * 9.81[m/s^2] = 490.50 [N]
F_2=100[lb] * 4.448[N/lb] = 444.80 [N]
T=490.5/2 + 444.8 = 690.05 [N]

University Copy For Library Use

• Ejercicio casa.

La canasta de Basquet de la figura pesa F_p^*=100kg. Se ha cargado con F_h^*= 500kg de bloques de hormign en la parte posterior. Durante el partido un jugador se ha colgado del aro con peso F_j^*=150kg. Al colgarse se ha marcado el parquet y se quiere saber.

Fuerzas en apoyos "a" y "b" separados 1000 mm que han marcado el parket.

Solución: F_b=3828 N.;

⇨ F_b=3534 N.;

Dar el peso mínimo de hormigón para no volcar la estructura:

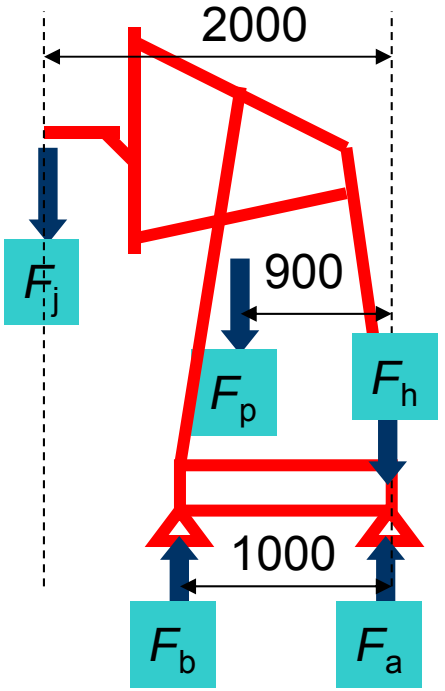
Solución: F_b=3828 N.;

F_a=0 N.;

F_h=1374 N.;

Comentario:

No se soluciona el problema de clavar las patas en "b" que sigue con la misma fuerza máxima.



University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Tipos de reacciones para diferentes apoyos.

➢ Ejemplo de simplificación de reacciones para resolución de equilibrio.

➢ Ejemplo de optimización de orientación de un cable en 3D.

University Copy For Library Use

S05t.- Centroides.

Mejora 1415 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior .

  - Tipos de reacciones para diferentes apoyos.
  - Ejemplo de simplificación de reacciones para resolución de equilibrio.
  - Ejemplo de optimización de orientación de un cable en 3D.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos de esta sesión

- Aprender a calcular el centroide de un sistema de partículas.
- Trasladar el cálculo a una figura continua como la resolución de una integral.
- Saber interpretar un componente como la suma o resta de figuras conocidas por tablas para evitar las integrales.
- Saber aplicar teorema de Pappus-Guldin para figuras de revolución.

$$\bar{x}_{cg} = \frac{1}{m_t}\sum_{i=1}^{n} x_i \times m_i$$

$$\bar{y}_{cg} = \frac{1}{m_t}\sum_{i=1}^{n} y_i \times m_i$$

$$\bar{z}_{cg} = \frac{1}{m_t}\sum_{i=1}^{n} z_i \times m_i$$

$$\bar{r} = \frac{1}{L}\int_L r\,dL$$

$$\bar{r} = \frac{1}{A}\int_A r\,dA$$

$$\bar{r} = \frac{1}{V}\int_V r\,dV$$

$$A = \theta \bar{z} L \qquad \bar{z} = \frac{1}{L}\int_L z\,dL$$

$$V = \theta \bar{z} A \qquad \bar{z} = \frac{1}{A}\int_A z\,dA$$

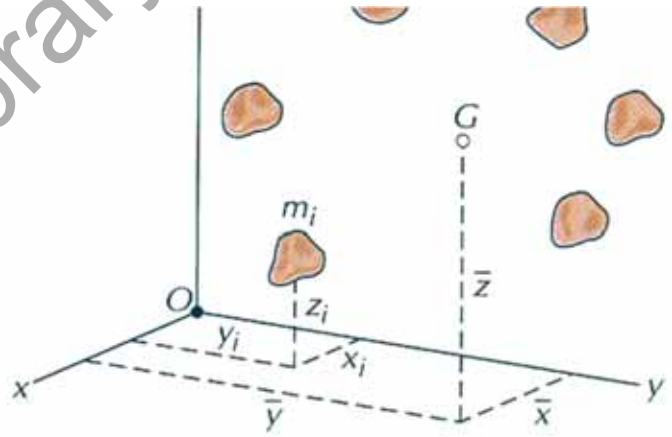
University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Centro de masas de un sistema de masas.

En el ejercicio de la canasta propuesto en la sesión anterior se incluía el peso de la canasta aplicado en una posición conocida como el centro de masas. Primero vamos a aprender como calcular el centro de masas de un sistema.

Supongamos que calculamos el momento que ejerce cada masa sobre el punto O y lo igualamos al momento que ha de hacer una masa que sea la suma de todas las masas en una posición a determinar. Esa posición es el centro de masas.



*No está considerada la gravedad pues no sabemos su dirección y este centro ha de funcionar en cualquier dirección.

$$m_t = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$M_O = \bar{r}_{cg} \times m_t = \sum_{i=1}^{n} r_i \times m_i \Rightarrow \bar{r}_{cg} = \frac{1}{m_t} \sum_{i=1}^{n} r_i \times m_i$$

$$\bar{x}_{cg} = \frac{1}{m_t} \sum_{i=1}^{n} x_i \times m_i$$

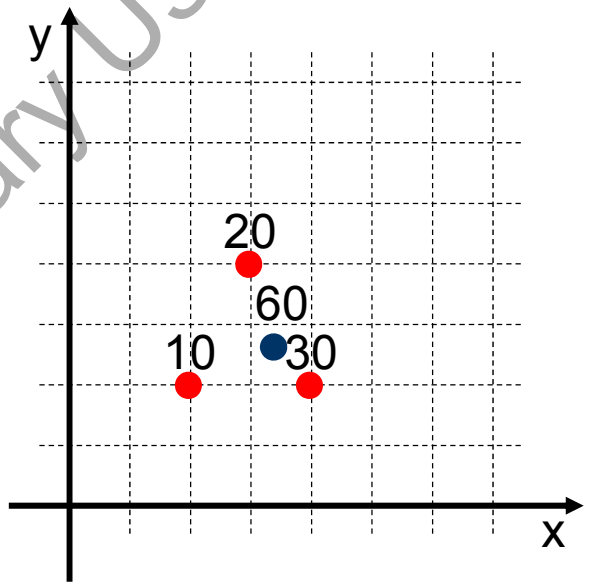
$$\bar{y}_{cg} = \frac{1}{m_t} \sum_{i=1}^{n} y_i \times m_i$$

$$z_{cg} = \frac{1}{m_t} \sum_{i=1}^{n} z_i \times m_i$$

University Copy For Library Use

• Ejercicio centro de masas de un sistema de masas.

Hallar el centro de masas de los siguientes cuerpos.



Primero calculamos la masa total:

m_t=10+20+30=60 [kg]

Después aplicamos la ecuación del centro de masas para averiguar la posición.

x_{cg}=(1/60)*(2*10+3*20+4*30)=3.333
y_{cg}=(1/60)*(2*10+4*20+2*30)=2.667
z_{cg}=(1/60)*(0*10+0*20+0*30)=0

$$\bar{x}_{cg} = \frac{1}{m_t}\sum_{i=1}^{n} x_i \times m_i$$

$$\bar{y}_{cg} = \frac{1}{m_t}\sum_{i=1}^{n} y_i \times m_i$$

$$\bar{z}_{cg} = \frac{1}{m_t}\sum_{i=1}^{n} z_i \times m_i$$

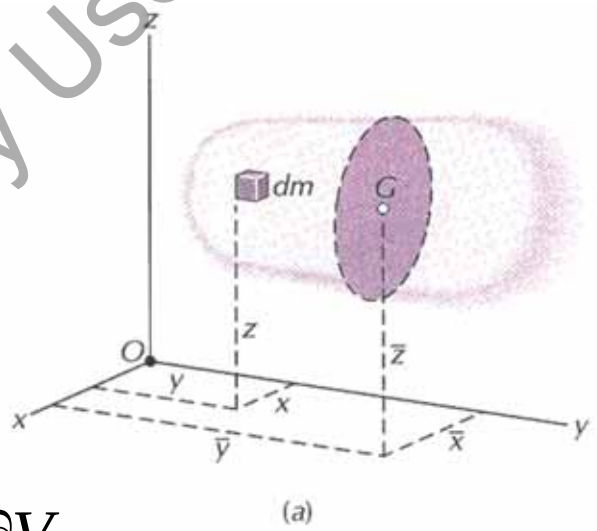
University Copy For Library Use

• Centro de masas de un sólido.

En la realidad no tenemos una suma de masas. En un sólido hay que integrar las masas en el volumen del sólido para obtener la posición del centro de masas y del centro de gravedad.

$$m_t = \int \partial m$$

$$M_O = \bar{r}_{cm} \times m_t = \int r \times \partial m = \int_V r \rho \partial V \Rightarrow \bar{r}_{cm} = \frac{1}{m_t} \int_V r \rho \partial V$$

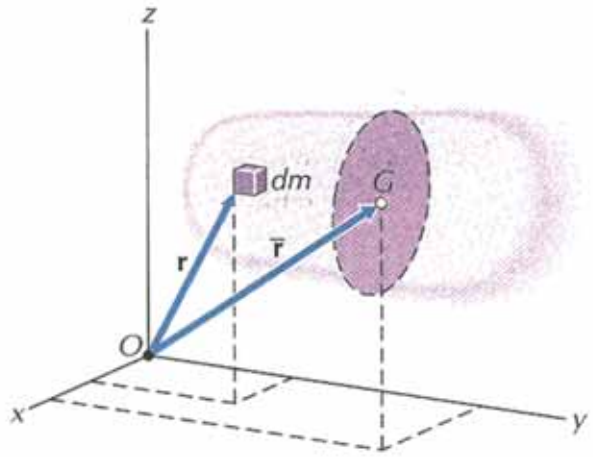


(a)

Si g es constante en el sólido el centro de masas coincide con el centro de gravedad

$$m_t g = \int \partial m g = \int \rho \partial V g =$$

$$M_O = \bar{r}_{cg} \times m_t g = \int r \times \partial m g = \int_V r \rho g \partial V \Rightarrow \bar{r}_{cg} = \frac{1}{m_t g} \int_V r \rho g \partial V$$

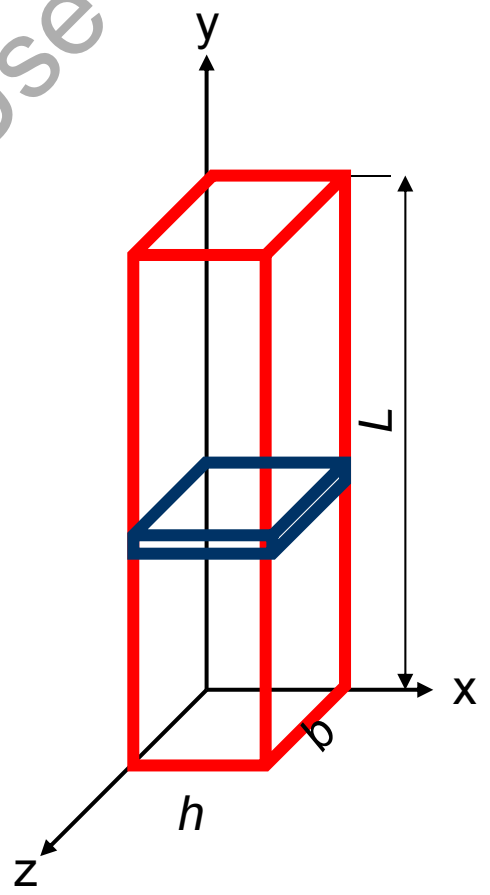


(b)

University Copy For Library Use

- Ejercicio sólido.

Calcular la posición en "y" del centro de masas de la figura.



Para una altura "y" podemos hacer una sección de volumen $b*h*\delta y$ cuyo peso se calcula:

$\delta W=\rho*g*b*h*\delta y$

$$\bar{y}_{cg}=\frac{\int_0^L y*\rho*g*b*h*\partial y}{\int_0^L \rho*g*b*h*\partial y}=\frac{\frac{L^2}{2}}{L}=\frac{L}{2}$$

University Copy For Library Use

- Centroides.

La palabra centroide se utiliza para una figura geométrica para la que se supone que la densidad es constante.

Centroide de líneas

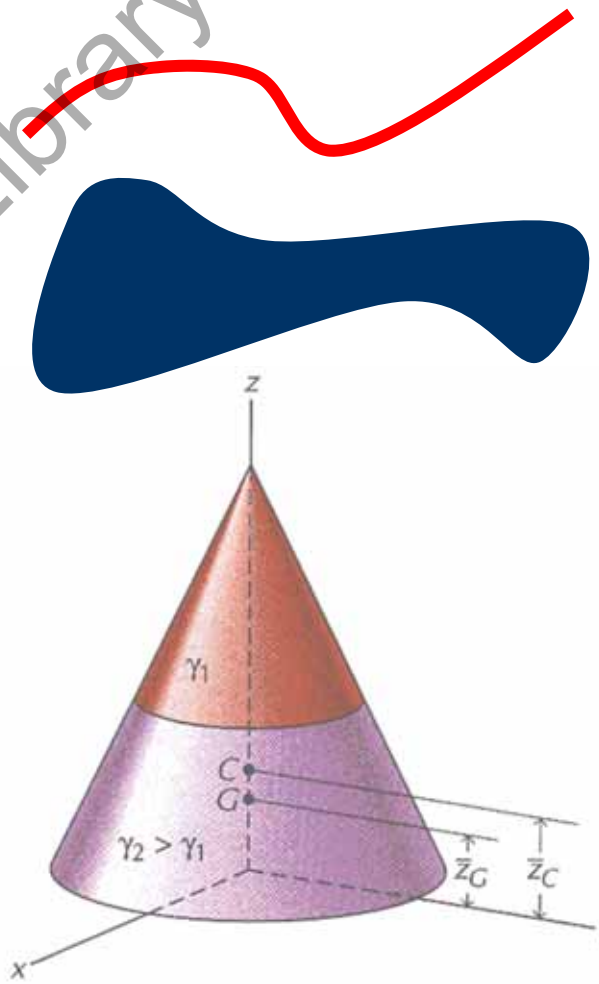
$$\bar{r} = \frac{1}{L}\int_L r\,dL$$

Centroide de áreas

$$\bar{r} = \frac{1}{A}\int_A r\,dA$$

Centroide de volúmenes

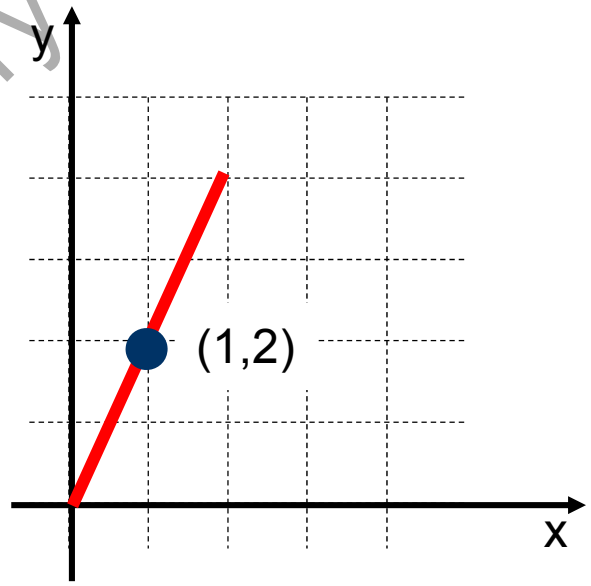
$$\bar{r} = \frac{1}{V}\int_V r\,dV$$



University Copy For Library Use

• Ejercicio centroide de línea.

Calcular el centroide en y de la línea y=2x que empieza en x=0 y acaba en x=2.



Primero simplificamos el diferencial de longitud:

$$\partial L = \sqrt{(\partial x)^2 + (\partial y)^2} = \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \partial x \sqrt{1 + (2)^2}$$

Integramos para tener la longitud:

$$L = \int_{x=0}^{2} \sqrt{5}\,\partial x = 2\sqrt{5} = 4.472[\text{mm}]$$

⇨ En línea recta
L=√(4²+2²)=4.472[mm]

Cálculo del momento en x:

$$M_x = \int_0^L y\,\partial L = \int_0^2 2x\sqrt{5}\,\partial x = 2\sqrt{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 4\sqrt{5} = 8.944[\text{mm}^2]$$

$$y_l = \frac{M_x}{L} = \frac{8.944}{4.472} = 2.000[\text{mm}]$$

Cálculo del momento en y:

$$M_y = \int_0^L x\,\partial L = \int_0^2 x\sqrt{5}\,\partial x = \sqrt{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2\sqrt{5} = 4.472[\text{mm}^2]$$

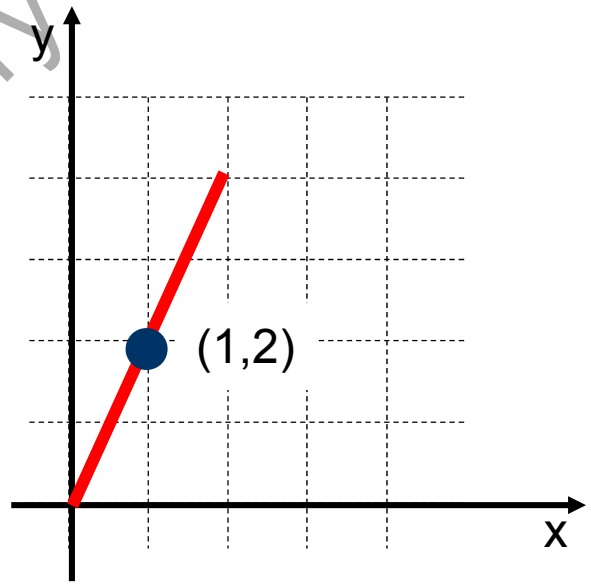
$$x_l = \frac{M_y}{L} = \frac{4.472}{4.472} = 1.000[\text{mm}]$$

University Copy For Library Use

- Ejercicio centroide de línea.

Usando la ecuación de centroide directamente se podría resolver:

$$\bar{r} = \frac{1}{L}\int_L r dL$$



$$(x,y)_{cg} = \frac{\left(\int_0^L x\partial L, \int_0^L y\partial L\right)}{\int_0^L \partial L} = \frac{\left(\int_0^2 x\sqrt{5}\partial x, \int_0^2 2x\sqrt{5}\partial x\right)}{\int_0^2 \sqrt{5}\partial x} = \frac{(4.472, 8.944)}{4.472} = (1,2)$$

University Copy For Library Use

- Centroides de superficies compuestas.

Si tenemos varias superficies y queremos hallar el centroide de todas ellas hay que ir sumando el área de cada superficie corregida por su posición del centro de gravedad.

$$r = \frac{1}{A}\int_A r\,dA$$

Elemento	A_i	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$	$A_i x_i$	$A_i y_i$	$A_i z_i$
$i=1$	A_1	$\bar{x}_1$	$\bar{y}_1$	$\bar{z}_1$	$A_1 x_1$	$A_1 y_1$	$A_1 z_1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$\sum A_i$				$\sum A_i x_i$	$\sum A_i y_i$	$\sum A_i z_i$

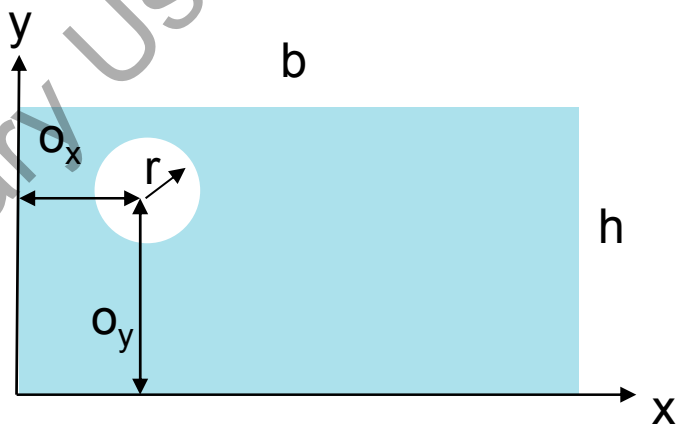
$$x_c = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i x_i \qquad y_c = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i y_i \qquad z_c = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i z_i$$

Al igual que se realiza la superposición para superficies se realiza para líneas, volúmenes o masas.

University Copy For Library Use

• Ejercicio de superficies compuestas.

Calcular el centro de masas de una placa con agujero.



Primero tenemos las superficies del rectángulo (bh) y círculo (πr^2).

$A_r=b*h$; $A_c=-\pi*r^2$; ⇨ $A=A_r+A_c=b*h-\pi*r^2$

Luego calculamos $M_y=x_{cg}*A$, $M_x=y_{cg}*A$

$\Sigma A_i x_i$: $M_{yr}=b/2*b*h$; $M_{yc}=-o_x*\pi*r^2$; ⇨ $M_y=M_{yr}+M_{yc}=b^2*h/2-o_x*\pi*r^2$

$\Sigma A_i y_i$: $M_{xr}=h/2*b*h$; $M_{xc}=-o_y*\pi*r^2$; ⇨ $M_x=M_{xr}+M_{xc}=b*h^2/2-o_y*\pi*r^2$

Calculamos la coordenada del centro de gravedad:

$x_{cg}=\Sigma A_i x_i/A= M_y/A=(b^2*h/2-o_x*\pi*r^2)/(b*h-\pi*r^2)$

$y_{cg}=\Sigma A_i y_i/A= M_x/A=(b*h^2/2-o_y*\pi*r^2)/(b*h-\pi*r^2)$

Si $o_x=b/2$ y $o_y=h/2$:

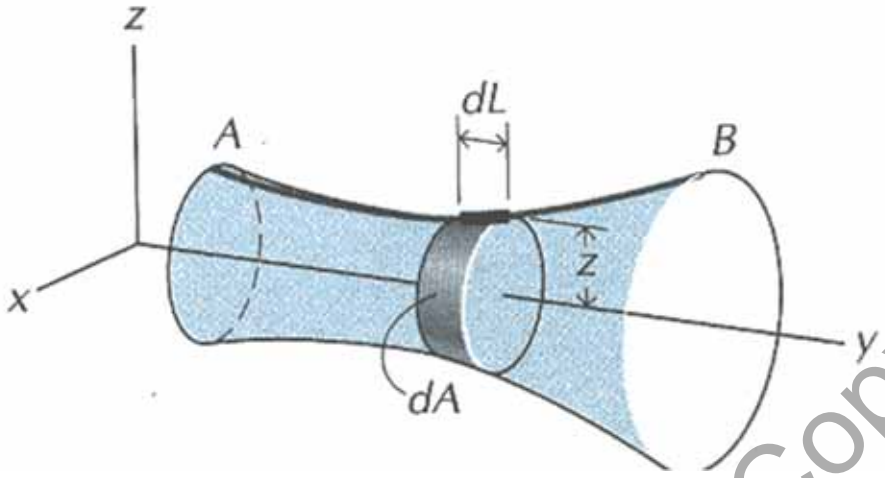
$x_{cg}=M_y/A=(b^2*h/2-b/2*\pi*r^2)/(b*h-\pi*r^2)=b/2$

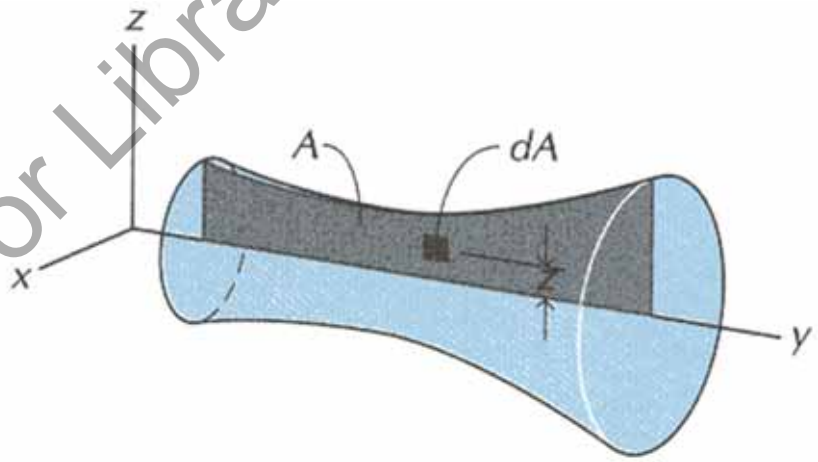
$y_{cg}=M_x/A=(b*h^2/2-h/2*\pi*r^2)/(b*h-\pi*r^2)=h/2$

University Copy For Library Use

- Teorema de Pappus-Guldin para revoluciones.

Área generada al revolucionar θ radianes una curva respecto al eje "y" y Volumen generado al revolucionar θ radianes una superficie respecto al eje "y".





$$dA = \theta z dL \Rightarrow A = \theta \int_L z dL$$

$$dV = \theta z dA \Rightarrow V = \theta \int_A z dA$$

$$A = \theta \bar{z} L$$

$$\bar{z} = \frac{1}{L} \int_L z dL$$

$$V = \theta \bar{z} A$$

$$\bar{z} = \frac{1}{A} \int_A z dA$$

University Copy For Library Use

- Ejercicio Pappus-Guldin para casa.

Sabemos calcular que el centroide de media circunferencia está a una distancia $2r/\pi$ y que el centroide de medio círculo está a $4r/3\pi$.

Calcular area y volumen de media esfera.

Aplicando Pappus-Guldin tenemos:

$A=$ [ ] $2\pi r^2$.

Aplicando Pappus-Guldin tenemos:

$V=$ [ ] $=2\pi r^3/3$.

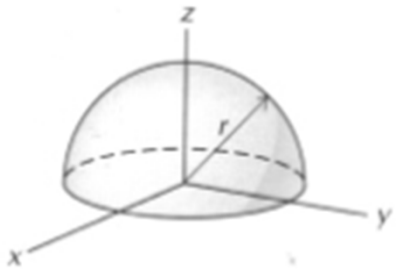
Semiesfera

$V = \frac{2\pi r^3}{3}$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = 0$

$\bar{z} = \frac{3r}{8}$



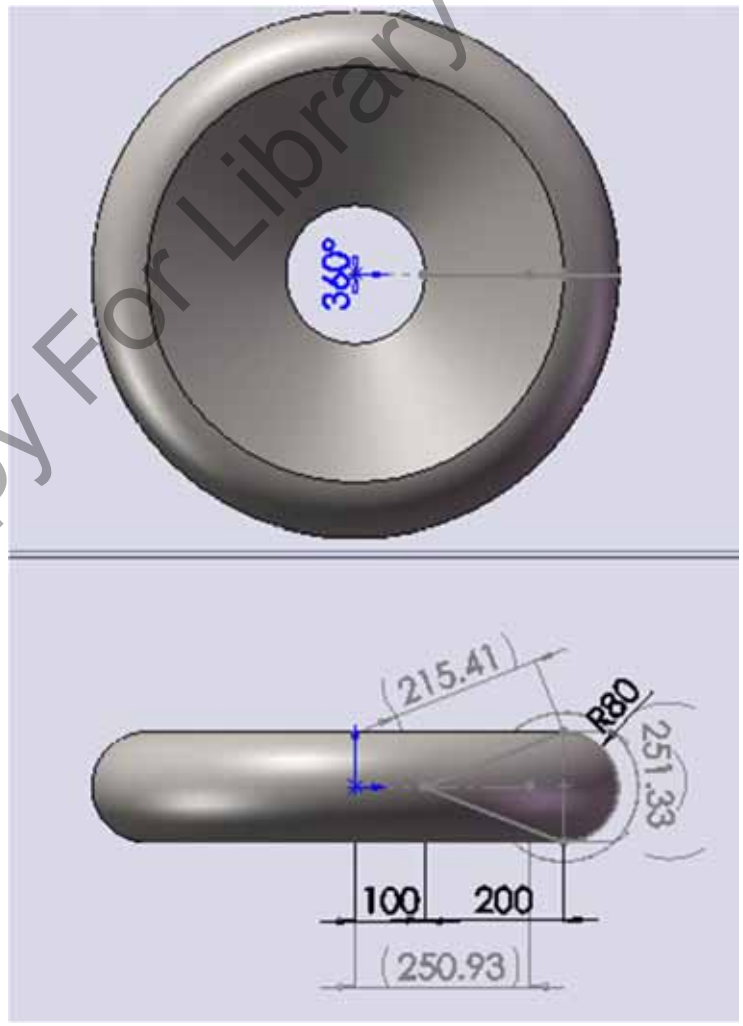
University Copy For Library Use

• Ejercicio Pappus-Guldin Riley 5-12 casa.

Calcular area y volumen de la pieza resultante de revolucionar un triángulo y medio círculo tal y como muestra SW.

Solución SW:

```
Mass properties of Riley_5_12 ( Part Configuration - Predeterminado )

Output  coordinate System: -- default --

Density = 0.01 grams per  cubic millimeter

Mass = 356412.21 grams

Volume = 44551526.18  cubic millimeters

Surface area = 1095541.60  square millimeters
```



University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Cálculo de centro de masas y centro de gravedad de masas puntuales e integrando en un espacio.

➢ Cálculo de centroides de líneas, superficies y volúmenes.

University Copy For Library Use

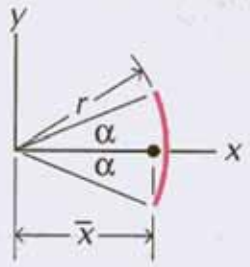
- Tablas de centroides de líneas y superficies (1/2).

Arco circular

$L = 2r\alpha$

$\bar{x} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$

$\bar{y} = 0$

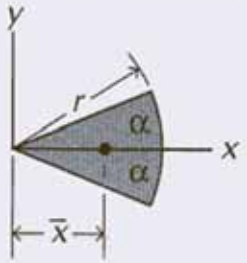


Sector circular

$A = r^2\alpha$

$\bar{x} = \frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$

$\bar{y} = 0$

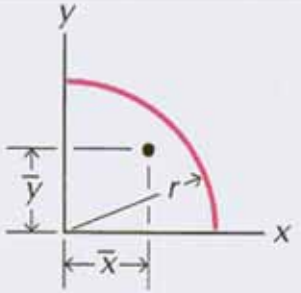


Arco de cuadrante circular

$L = \frac{\pi r}{2}$

$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$

$\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$

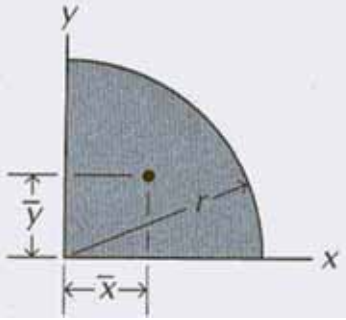


Cuadrante circular

$A = \frac{\pi r^2}{4}$

$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$

$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

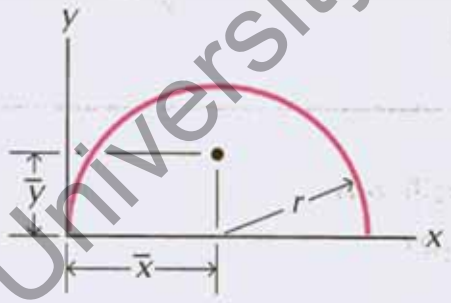


Semicircunferencia

$L = \pi r$

$\bar{x} = r$

$\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$

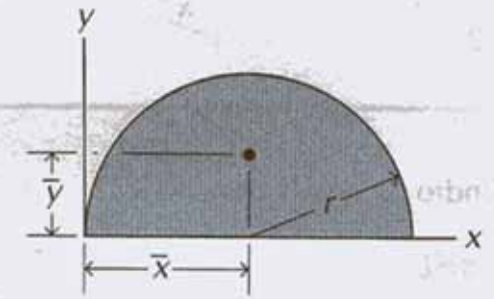


Superficie semicircular

$A = \frac{\pi r^2}{2}$

$\bar{x} = r$

$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$



University Copy For Library Use

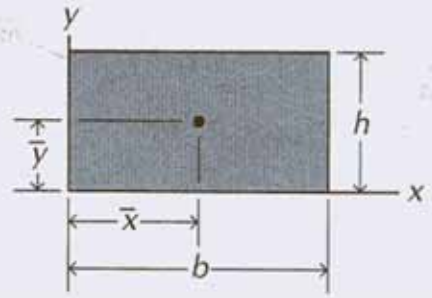
- Tablas de centroides de líneas y superficies (2/2).

Superficie rectangular

$A = bh$

$\bar{x} = \frac{b}{2}$

$\bar{y} = \frac{h}{2}$

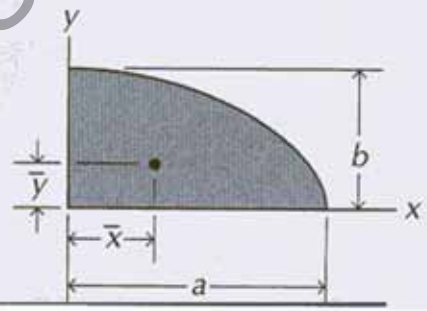


Cuadrante de elipse

$A = \frac{\pi ab}{4}$

$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$

$\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$

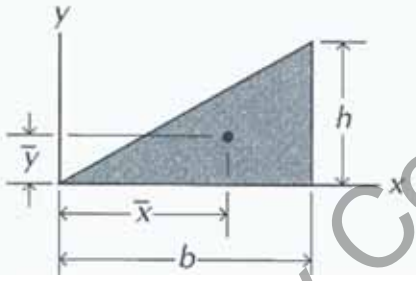


Superficie triangular

$A = \frac{bh}{2}$

$\bar{x} = \frac{2b}{3}$

$\bar{y} = \frac{h}{3}$

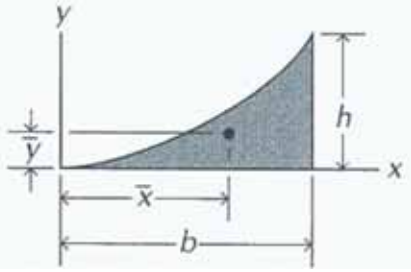


Encabezadura parabólica

$A = \frac{bh}{3}$

$\bar{x} = \frac{3b}{4}$

$\bar{y} = \frac{3h}{10}$

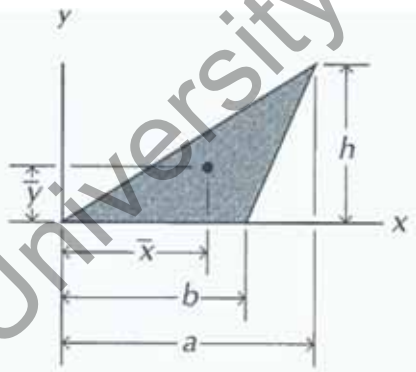


Superficie triangular

$A = \frac{bh}{2}$

$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$

$\bar{y} = \frac{h}{3}$

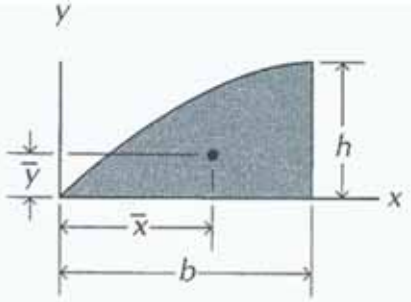


Cuadrante de parábola

$A = \frac{2bh}{3}$

$\bar{x} = \frac{5b}{8}$

$\bar{y} = \frac{2h}{5}$



University Copy For Library Use

- Tablas de centroides de volúmenes (1/2).

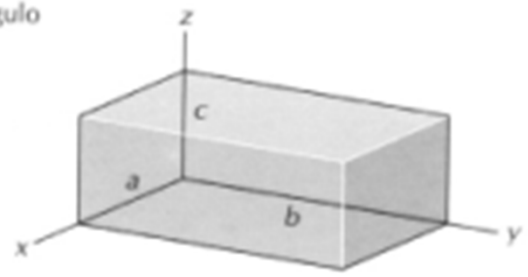
Paralelepípedo rectángulo

$V = abc$

$\bar{x} = \frac{a}{2}$

$\bar{y} = \frac{b}{2}$

$\bar{z} = \frac{c}{2}$



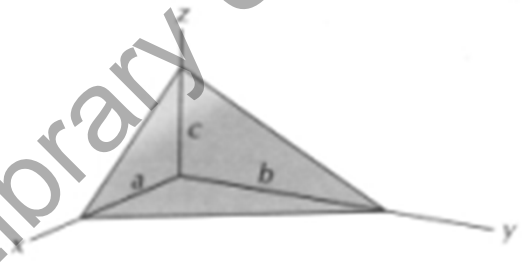
Tetraedro rectángulo

$V = \frac{abc}{6}$

$\bar{x} = \frac{a}{4}$

$\bar{y} = \frac{b}{4}$

$\bar{z} = \frac{c}{4}$



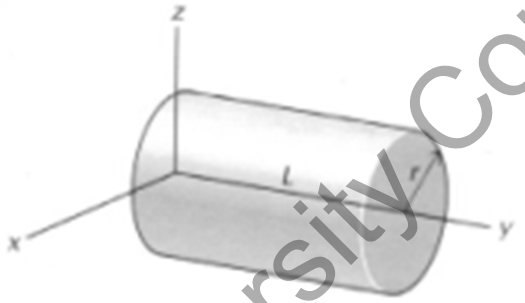
Cilindro de revolución

$V = \pi r^2 L$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = \frac{L}{2}$

$\bar{z} = 0$



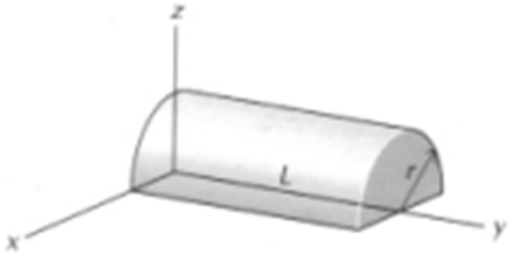
Semicilindro

$V = \frac{\pi r^2 L}{2}$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = \frac{L}{2}$

$\bar{z} = \frac{4r}{3\pi}$



University Copy For Library Use

- Tablas de centroides de volúmenes (2/2).

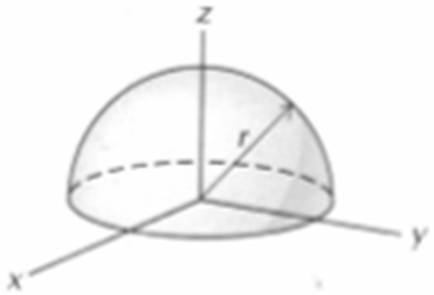
Semiesfera

$V = \frac{2\pi r^3}{3}$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = 0$

$\bar{z} = \frac{3r}{8}$



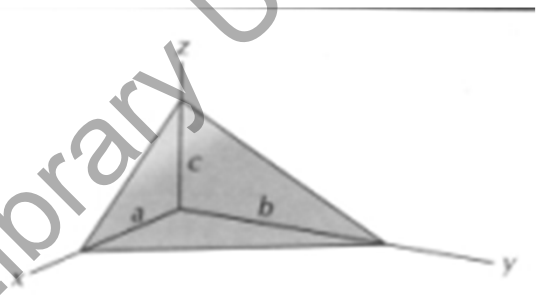
Tetraedro rectángulo

$V = \frac{abc}{6}$

$\bar{x} = \frac{a}{4}$

$\bar{y} = \frac{b}{4}$

$\bar{z} = \frac{c}{4}$



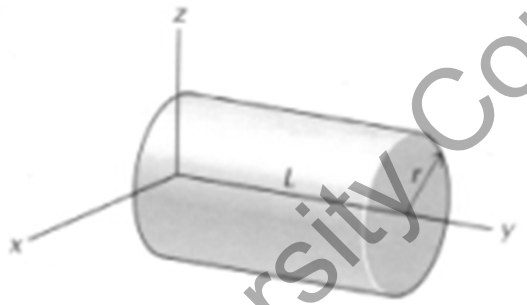
Cilindro de revolución

$V = \pi r^2 L$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = \frac{L}{2}$

$\bar{z} = 0$



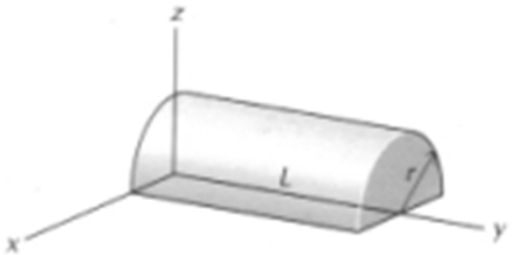
Semicilindro

$V = \frac{\pi r^2 L}{2}$

$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = \frac{L}{2}$

$\bar{z} = \frac{4r}{3\pi}$



University Copy For Library Use

- Tablas matemáticas.

$F(x)=\int f(x)dx$	$F(x)=\int f(x)dx$
$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}+C \quad con\ p\neq -1$	$\int \frac{1}{\cos ax}dx = \frac{1}{2a}\ln\frac{1+\sin ax}{1-\sin ax}+C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen} ax}dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}+C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad a>0$	$\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + C$
$\int \frac{dx}{x\ln a} = \log_a x + C \quad a>0$	$\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + C$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \operatorname{tgh} x + C$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \operatorname{arg\,senh}\frac{x}{a}+C$
$\int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}dx = \frac{1}{\operatorname{tg} x}+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arg\,cosh} x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + C$	$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \operatorname{arg\,tgh} x + C = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$	

(*) válida si $4ac > b^2$

Relaciones trigonométricas útiles:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$

$2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos(2x)$

$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$

$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$2\operatorname{sen} x\cos y = \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)$

$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

$2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\cos(x+y) + \cos(x-y)$

Funciones hiperbólicas:

$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh} x \cdot \cosh x$

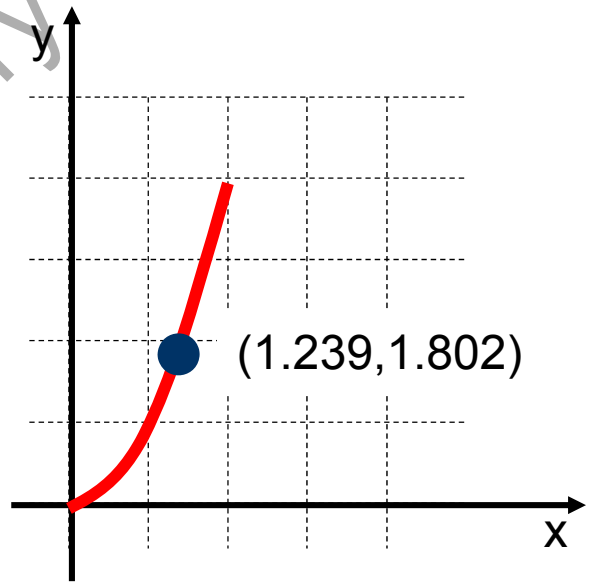
$\cosh(2x) = \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$

$F(x)=\int f(x)dx$
$\int \frac{K}{ax+b}dx = \frac{K}{a}\ln(ax+b)+C$
$\int \frac{K}{(ax+b)^p}dx = -\frac{K}{a(p-1)(ax+b)^{p-1}}+C \quad con \quad p>1$
$\int \frac{K}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{a-b}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x-b}\right\rvert + C$
$\int \frac{K}{x^2-a^2}dx = \frac{K}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C$
$\int \frac{Mx+N}{x^2+a^2}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+a^2)+\frac{N}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$
$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx = \frac{M}{2a}\ln\lvert ax^2+bx+c\rvert + \frac{2aN-bM}{a\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C \quad (*)$
$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^2}dx = \frac{(2aN-bM)x+bN-2cM}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{2aN-bM}{4ac-b^2}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx \quad (*)$
$\int \frac{K}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{4Ka}{4ac-b^2}\left[\frac{1}{4(n-1)a}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}dx\right] (*)$
$\int \frac{Kx}{(ax^2+bx+c)^n}dx = -\frac{K}{2(n-1)a(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{Kb}{2a}\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx \quad (*)$

University Copy For Library Use

• Ejercicio centroide de línea.

Calcular el centroide en y de la línea $y=x^2$ que empieza en x=0 y acaba en x=2.



Primero simplificamos el diferencial de longitud:

$$\partial L = \sqrt{(\partial x)^2 + (\partial y)^2} = \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \partial x \sqrt{1 + (2x)^2}$$

Integramos para tener la longitud:

$$L = \int_{x=0}^{2} \sqrt{1 + (2x)^2}\, \partial x = \left[\frac{x}{2} \sqrt{1 + (2x)^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arcsin} h(2x) \right]_0^2 =$$

$$\sqrt{17} + \frac{1}{4} \operatorname{arcsinh}(4) = 4.647[\text{mm}]$$

⇨ En línea recta $L=\sqrt{(4^2+2^2)}=4.472[\text{mm}]$

Cálculo del momento en x.

$$M_x = \int_0^L y \partial L = \int_0^2 x^2 \sqrt{1 + (2x)^2}\, \partial x = \left[\frac{1}{16} x(1 + (2x)^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{32} x \sqrt{1 + (2x)^2} - \frac{1}{64} \operatorname{arcsinh}(2x) \right]_0^2 =$$

$$\frac{33}{16}\sqrt{17} - \frac{1}{64} \operatorname{arcsinh}(4) = 8.471[\text{mm}^2]$$

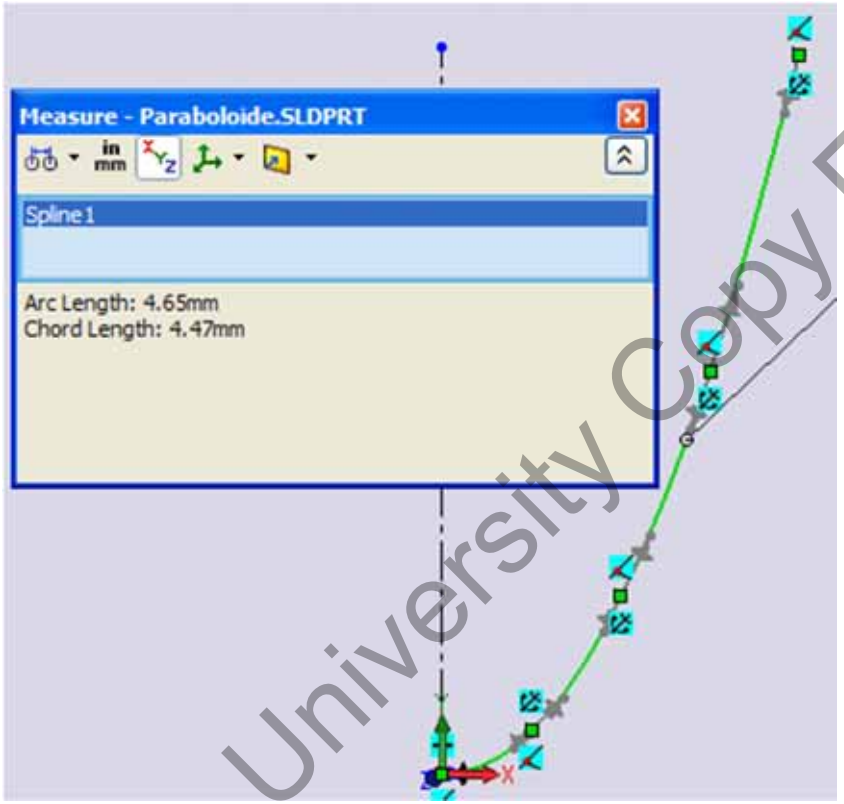
$$y_l = \frac{M_x}{L} = \frac{8.471}{4.647} = 1.802[\text{mm}]$$

University Copy For Library Use

- Superficie paraboloide revolución de línea.

Calcular la superficie de revolución de $y=x^2$ que empieza en x=0 y acaba en x=2.

Por Pappus-Guldin sabemos que $A= 2\pi * 1.239 * 4.647=36.17\ mm^2$ que podemos comparar a SolidWorks.



University Copy For Library Use

• Resolución integrales.

Para resolver las integrales se pueden aplicar las siguientes tácticas sugeridas por Menacho.

$$L=\int_{x=0}^{2}\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\left|\begin{matrix}u=\sqrt{1+(2x)^2} & du=\dfrac{4x}{\sqrt{1+(2x)^2}}dx\\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right|=\left[x\sqrt{1+(2x)^2}\right]_0^2-\int_0^2\frac{4x^2}{\sqrt{1+(2x)^2}}dx=$$

$$=\left[x\sqrt{1+(2x)^2}\right]_0^2-\int_0^2\frac{(2x)^2+1-1}{\sqrt{1+(2x)^2}}dx=\left[x\sqrt{1+(2x)^2}\right]_0^2-\int_0^2\sqrt{1+(2x)^2}\,dx+\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}dx=$$

$$=\left[x\sqrt{1+(2x)^2}\right]_0^2-L+\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}dx=\left|\begin{matrix}t=2x\\ dt=2dx\end{matrix}\right|=\left[x\sqrt{1+(2x)^2}\right]_0^2-L+\int_{x=0}^{x=2}\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}dt=$$

$$=\left[x\sqrt{1+(2x)^2}\right]_0^2-L+\left[\frac{1}{2}\operatorname{arg\,sinh}(2x)\right]_0^2$$

$$\Rightarrow\quad 2L=\left[x\sqrt{1+(2x)^2}\right]_0^2+\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsin}h(2x)\right]_0^2$$

$$\Rightarrow\quad L=\left[\frac{x}{2}\sqrt{1+(2x)^2}+\frac{1}{4}\operatorname{arcsin}h(2x)\right]_0^2=\sqrt{17}+\frac{1}{4}\operatorname{arcsinh}(4)=4.647[\text{mm}]$$

$$I=\int_0^2 x^2\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^2(2x)^2\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^2\left((2x)^2+1-1\right)\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\left(1+(2x)^2\right)^{3/2}dx-\frac{1}{4}\underbrace{\int_0^2\sqrt{1+(2x)^2}\,dx}_{=(a)}=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\left(1+(2x)^2\right)^{3/2}dx-\frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{1+(2x)^2}+\frac{1}{4}\operatorname{arcsin}h(2x)\right]_0^2=$$

$$\left|\begin{matrix}u=\left(1+(2x)^2\right)^{3/2} & du=12x\sqrt{1+(2x)^2}\,dx\\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{1}{4}\left[x\left(1+(2x)^2\right)^{3/2}\right]_0^2-\frac{12}{4}\int_0^2 x^2\sqrt{1+(2x)^2}\,dx-\left[\frac{x}{8}\sqrt{1+(2x)^2}+\frac{1}{16}\operatorname{arcsin}h(2x)\right]_0^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left[x\left(1+(2x)^2\right)^{3/2}\right]_0^2-3\cdot I-\left[\frac{x}{8}\sqrt{1+(2x)^2}+\frac{1}{16}\operatorname{arcsin}h(2x)\right]_0^2$$

$$\Rightarrow\quad 4\cdot I=\left[\frac{x}{4}\left(1+(2x)^2\right)^{3/2}-\frac{x}{8}\sqrt{1+(2x)^2}-\frac{1}{16}\operatorname{arcsin}h(2x)\right]_0^2$$

$$\Rightarrow\quad I=\left[\frac{x}{16}\left(1+(2x)^2\right)^{3/2}-\frac{x}{32}\sqrt{1+(2x)^2}-\frac{1}{64}\operatorname{arcsin}h(2x)\right]_0^2=$$

$$=\left[\frac{1}{16}x(1+(2x)^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{32}x\sqrt{1+(2x)^2}-\frac{1}{64}\operatorname{arcsinh}(2x)\right]_0^2=$$

$$\frac{33}{16}\sqrt{17}-\frac{1}{64}\operatorname{arcsinh}(4)=8.471[\text{mm}^2]$$

University Copy For Library Use

• Resolución integrales.

Otra manera de hacer la resolución de integrales es el uso de un software matemático como Maple (figura), Mathematika o Matlab.

Curve length y=x^2 between 0 and 2.

Assume .

```
> restart; L1:=int(sqrt(1+(2*x)^2), x=0..b);
> simplify(eval(L1, b=2),ln);
> L:=evalf(eval(L1, b=2));
```

$$L1 := \frac{1}{2} b \sqrt{1+4b^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arcsinh}(2b)$$

$$\sqrt{17} + \frac{1}{4}\operatorname{arcsinh}(4)$$

$$L := 4.646783763$$

Curve Moment in y for xcg of line

Assume .

```
> My1:=int(x*sqrt(1+(2*x)^2), x=0..b);
> simplify(eval(My1, b=2),ln);
> My:=evalf(eval(My1, b=2));
> xl:=evalf(My/L);
```

$$My1 := \frac{1}{12}(1+4b^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{17}{12}\sqrt{17} - \frac{1}{12}$$

$$My := 5.757732972$$

$$xl := 1.239079171$$

Curve Moment in x for ycg of line

Assume .

```
> Mx1:=int(x^2*sqrt(1+(2*x)^2), x=0..b);
> simplify(eval(Mx1, b=2),ln);
> Mx:=evalf(eval(Mx1, b=2));
> yl:=evalf(Mx/L);
```

$$Mx1 := \frac{1}{16} b (1+4b^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{1}{32} b \sqrt{1+4b^2} - \frac{1}{64}\operatorname{arcsinh}(2b)$$

$$\frac{33}{16}\sqrt{17} - \frac{1}{64}\operatorname{arcsinh}(4)$$

$$Mx := 8.471175470$$

$$yl := 1.823019082$$

University Copy For Library Use

• Calcular centro de gravedad de la figura.

Calcular centro gravedad de prisma *b*h*L* con agujero radio *r*, a o_x y o_y y profundidad *p*.

Primero calculamos volúmenes: $V_t=bhL-\pi r^2p$;

Calculamos centros gravedad:

$x_p=b/2$; $x_a=o_x$;

$y_p=h/2$; $y_a=o_y$;

$z_p=L/2$; $z_a=L-p/2$;

Calculamos Momentos:

$M_{yz}=xV= b/2*bhl-(o_x)*\pi r^2p$;

$M_{xz}=yV= h/2*bhl-(o_y)*\pi r^2p$;

$M_{xy}=zV= L/2*bhl-(L-p/2)*\pi r^2p$;

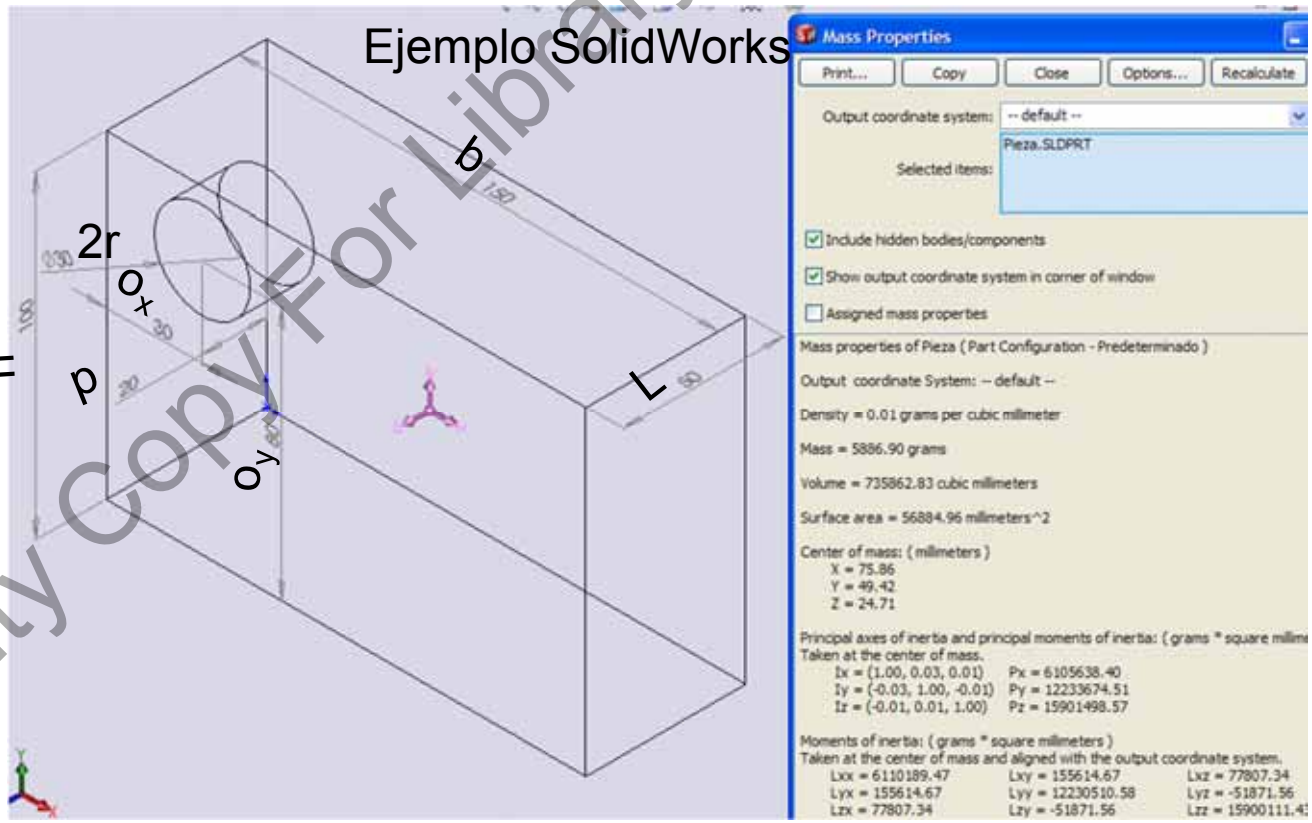
Calculamos Centros:

$x_{cg}=M_{yz}/V= (b/2*bhl-(o_x)*\pi r^2p)/(bhL-\pi r^2p)$;

$y_{cg}=M_{xz}/V= (h/2*bhl-(o_y)*\pi r^2p) /(bhL-\pi r^2p)$;

$z_{cg}=M_{xy}/V= (L/2*bhl-(L-p/2)*\pi r^2p) /(bhL-\pi r^2p)$;

Ejemplo SolidWorks



Si sustituimos los valores de dimensiones por los de la figura comprobamos que el cálculo es correcto.

University Copy For Library Use

- Calcular centro de gravedad de la figura para casa.

Si b=150, h=100, L=50, Ox=30, Oy=80, p=20, r=15 comparar con SW utilizando [mm].

Primero calculamos volúmenes: $V_t=bhL-\pi r^2 p$;

Calculamos centros gravedad:

$x_p=75$; $x_a=30$; [mm]

$y_p=50$; $y_a=80$; [mm]

$z_p=25$; $z_a=40$; [mm]

Calculamos Momentos:

[mm⁴]

[mm⁴]

[mm⁴]

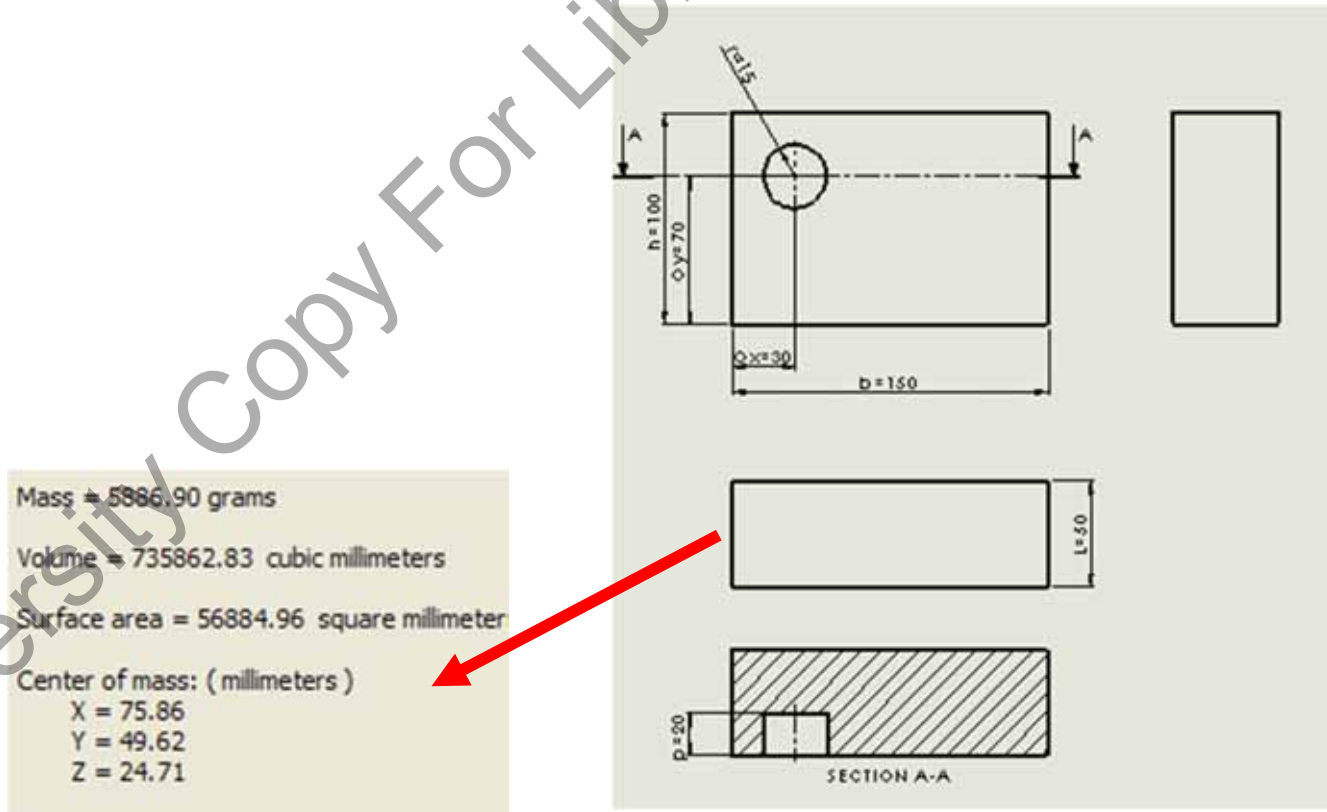
Calculamos Centros:

x_{cg}= 7.586E+01 [mm]

y_{cg}= 4.942E+01 [mm]

z_{cg}= 2.471E+01 [mm]

Ejemplo SolidWorks



University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Tablas de figuras geométricas básicas.

➢ Tablas de ecuaciones matemáticas a utilizar en mecánica.

➢ Ejercicio de cálculo de centroide de una parábola.

➢ Ejercicio de cálculo de centro de masas de un prisma con un taladro.

University Copy For Library Use

S06t.- Momentos de Superficie.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ...

- Repaso sesión anterior.
  - Tablas de figuras geométricas básicas.
  - Tablas de ecuaciones matemáticas a utilizar en mecánica.
  - Ejercicio de cálculo de centroide de una parábola.
  - Ejercicio de cálculo de centro de masas de un prisma con un taladro.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos de esta sesión

- Aprender a calcular el momento de superficie integrando
- Aprender a calcular el momento de superficie con el uso de tablas a base de descomponer una figura en sumas y restas de figuras conocidas.
- Saber aplicar teorema de Steiner.
- Saber calcular radio de giro de una superficie.
- Saber calcular productos mixtos
- Saber la dirección y valor de momento de superficie máximo con círculo de Mohr.

$$I_x = \int_A y^2 dA;\ I_y = \int_A x^2 dA;\quad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}};$$

$$I_{x'} = I_x + Ay^2$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA;$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{(I_x - I_y)}$$

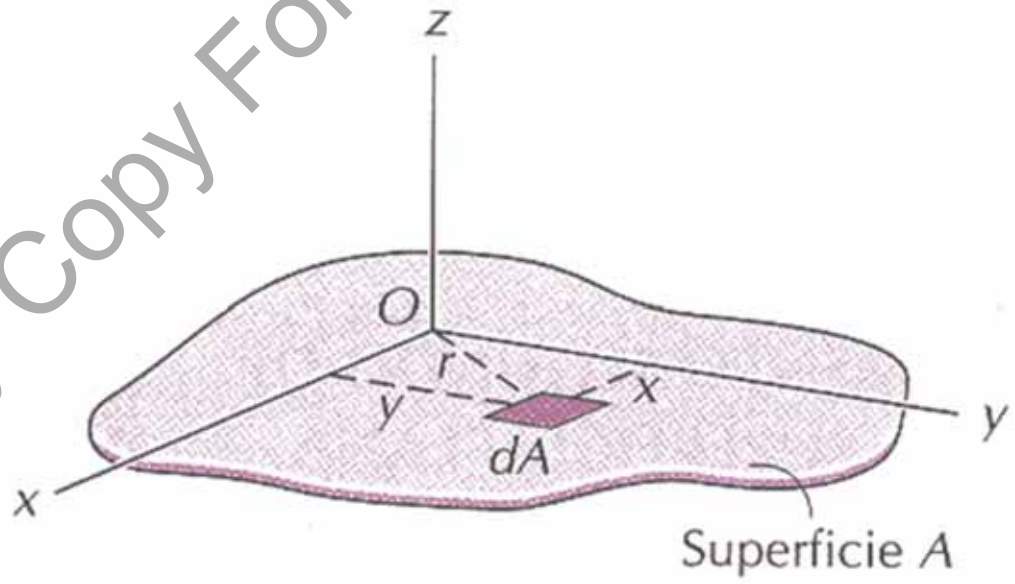
$$I_{u,v} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \left[\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2\right]^{1/2}$$

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Momentos de segundo orden.

Una vez introducido el concepto de centro de masas y de gravedad podemos introducir momentos de segundo orden. Estos momentos de superficie se utilizarán en la asignatura de elasticidad y resistencia de materiales para analizar esfuerzos y deformaciones en vigas.



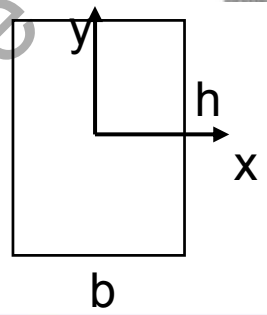
$$I_x = \int_A y^2 dA;\ I_y = \int_A x^2 dA;$$

$$J_z = \int_A r^2 dA = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA \Rightarrow J_z = I_x + I_y$$

University Copy For Library Use

• Ejemplo momentos de segundo orden.

Si tenemos un rectángulo de base "b" y altura "h". Calcular los momentos de inercia respecto al centro de masas.

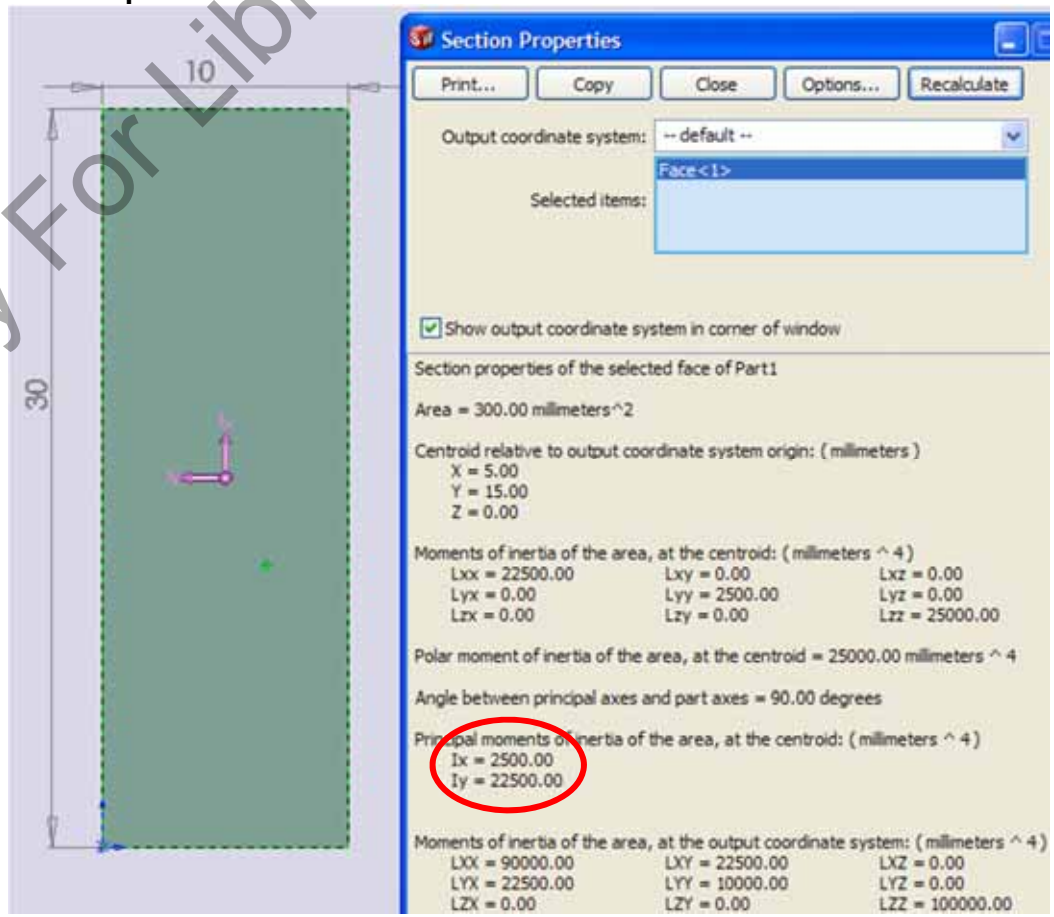


Primero suponemos el diferencial de area a utilizar para resolver:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \partial y = \left[\frac{by^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h \partial x = \left[\frac{hx^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{hb^3}{12}$$

Comprobamos la solución usando tablas o algún programa CAD como SolidWorks:

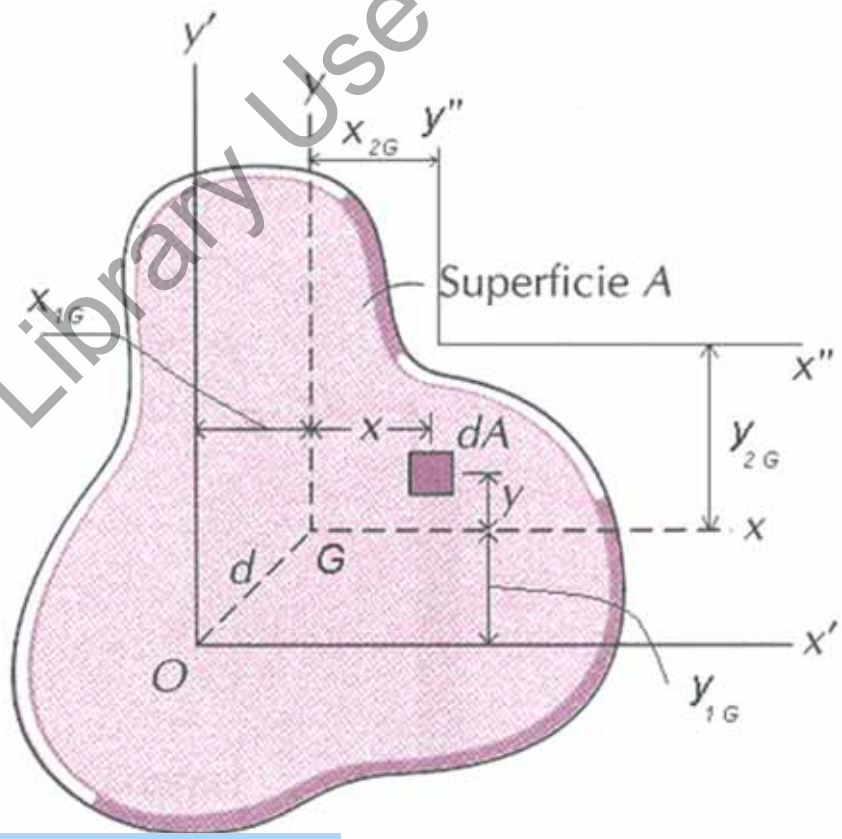


University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Teorema de Steiner.

Cuando una sección no está colocada con los ejes sobre su centro de masas entonces podemos usar la siguiente relación para calcular la inercia sobre los nuevos ejes a partir de la inercia calculado con el centro de masas.

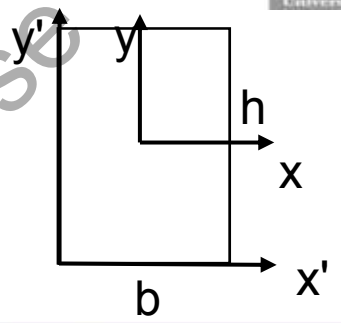


$$I_{x'} = \int_A (y_x + \bar{y})^2 dA = \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} + 2\bar{y} \underbrace{\int_A y dA}_{0\,si\,"y"\,centroide} + \bar{y}^2 \underbrace{\int_A dA}_{\bar{y}^2 A};$$

$$I_{x'} = I_x + A\bar{y}^2$$

University Copy For Library Use

• Ejemplo aplicación Steiner.



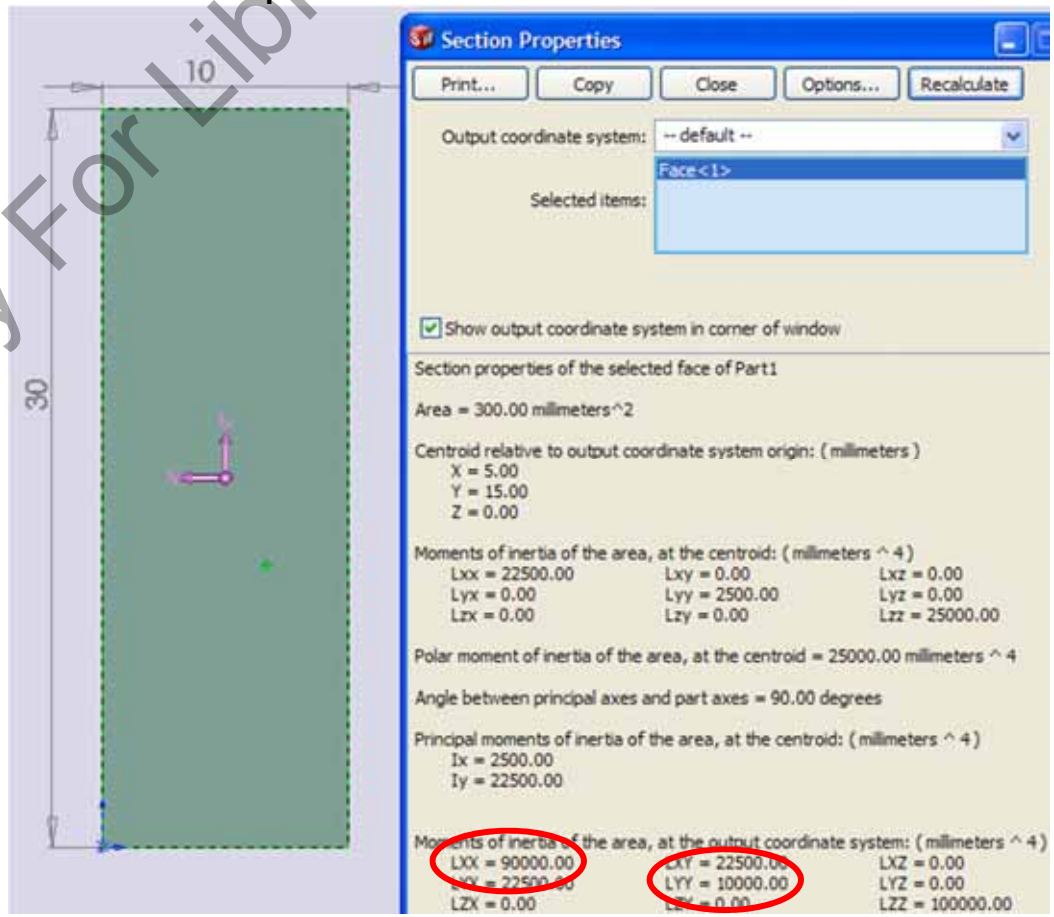
Si tenemos un rectángulo de base "b" y altura "h". Calcular los momentos de inercia respecto a los ejes x' e y'.

Como ya sabemos calcular el momento de inercia con respecto al centro gravedad aplicamos Steiner:

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{y'} = \frac{hb^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{3}$$

Comprobamos la solución usando tablas o algún programa CAD como SolidWorks:



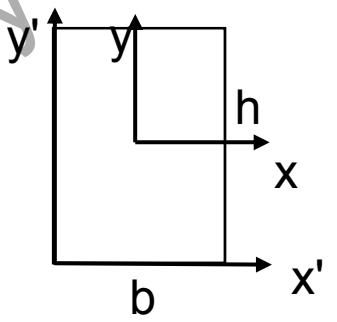
University Copy For Library Use

• Radio de giro de una superficie.

Se suele calcular una distancia conocida como radio de giro. Cuanto mayor sea el radio de giro menor será la deformación de la pieza.

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad k_{x'} = \sqrt{k_x^2 + y^2};$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad k_{y'} = \sqrt{k_y^2 + x^2};$$



Ejemplo de sección rectangular:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}; \quad k_{x'} = \sqrt{\frac{I_{x'}}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{3bh}} = \frac{h}{\sqrt{3}};$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}; \quad k_{y'} = \sqrt{\frac{I_{y'}}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{3bh}} = \frac{b}{\sqrt{3}};$$

Comprobación:

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{h^2}{12} + \frac{h^2}{4}}$$

$$\frac{b}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{b^2}{12} + \frac{b^2}{4}}$$

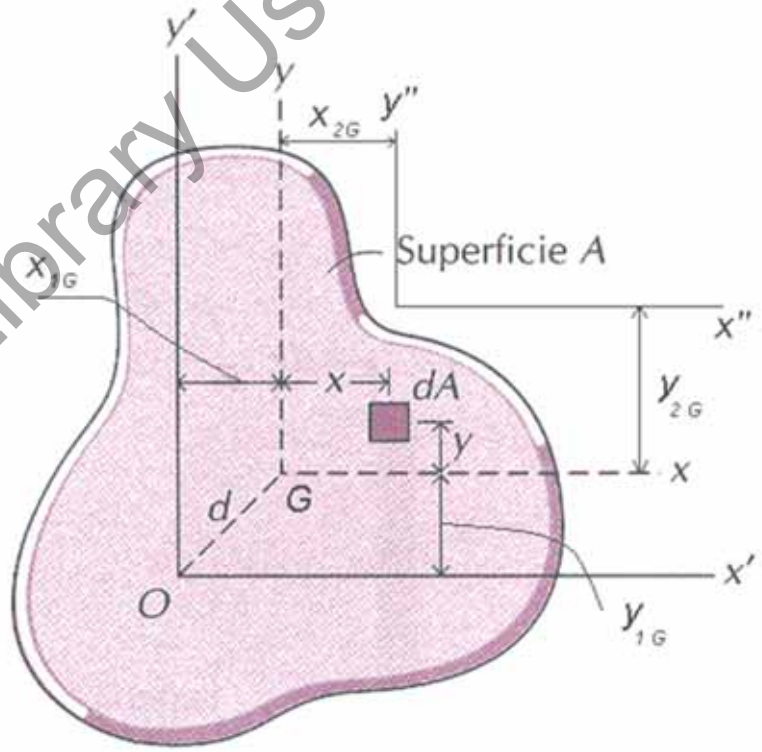
University Copy For Library Use

• Momentos segundos mixtos.

El momento segundo mixto es conocido como producto de inercia de superficie.

Este momento se ve afectado por "x" y por "y". Por tanto a diferencia de los momentos de inercia anteriores este puede ser negativo.

Para piezas simétricas estos productos de inercia son cero si se calculan sobre los ejes de simetría. A estos momentos también se aplica Steiner de manera mixta.



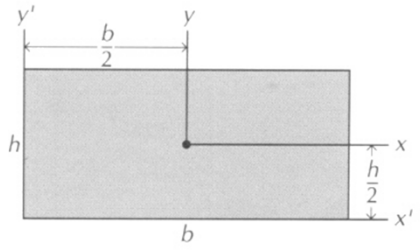
$$I_{xy} = \int_A xy\,dA;$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

University Copy For Library Use

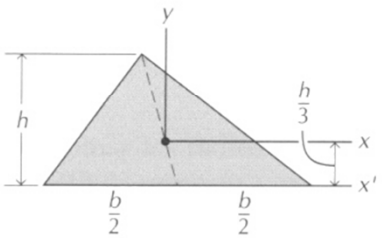
• Tablas de momentos de inercia.

A nivel de ejemplo se incorporan tablas de momentos de inercia de figuras geométricas sencillas.



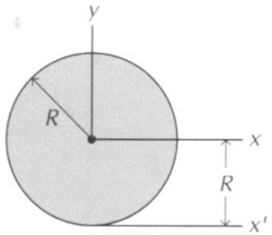
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{x'} = \frac{bh^3}{3} \qquad A = bh$$

$$I_{xy} = 0; \quad I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{4}$$

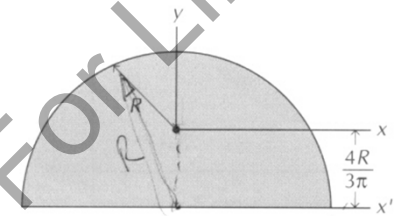


$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_{x'} = \frac{bh^3}{12} \qquad A = \frac{1}{2}bh$$

$$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}; \quad I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{24}$$

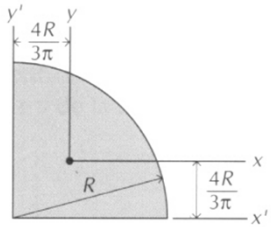


$$I_x = \frac{\pi R^4}{4} \qquad I_{x'} = \frac{5\pi R^4}{4} \qquad A = \pi R^2$$



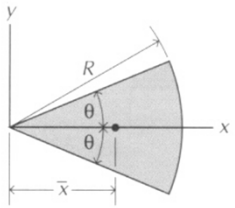
$$I_x = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{8R^4}{9\pi} \qquad I_y = \frac{\pi R^4}{8} \qquad I_{xy} = 0; \quad I_{x'y'} = \frac{2R^4}{3}$$

$$I_{x'} = \frac{\pi R^4}{8} \qquad A = \frac{1}{2}\pi R^2$$



$$I_x = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{4R^4}{9\pi} \qquad I_{xy} = \frac{(9\pi - 32)R^4}{72\pi}; \quad I_{x'y'} = \frac{R^4}{8}$$

$$I_{x'} = \frac{\pi R^4}{16} \qquad A = \frac{1}{4}\pi R^2$$



$$I_x = \frac{R^4}{4}\left(\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right) \qquad I_y = \frac{R^4}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\frac{R \operatorname{sen}\theta}{\theta} \qquad A = \theta R^2$$

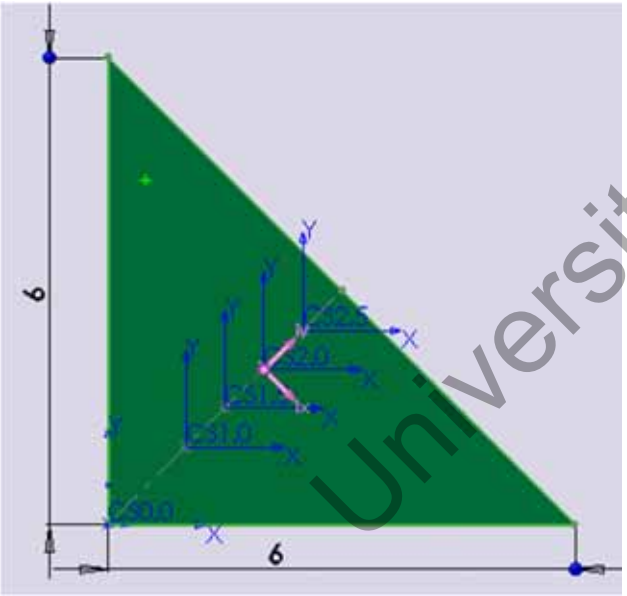
University Copy For Library Use

• Ejemplo triángulo.

Para entender el triángulo hacemos un triángulo rectángulo en SW de lados 6x6 con c.g. en (2,2).

Según tablas en c.g:
Ix=36, Ixy=-18

Según tablas en origen:
Ix=108, Ixy=+54



CS0.0

Moments of inertia of the area, at the output coordinate system: (millimeters ^ 4)

LXX = 108.00	LXY = 54.00	LXZ = 0.00
LYX = 54.00	LYY = 108.00	LYZ = 0.00
LZX = 0.00	LZY = 0.00	LZZ = 216.00

CS1.0

Moments of inertia of the area, at the output coordinate system: (millimeters ^ 4)

LXX = 54.00	LXY = -0.00	LXZ = 0.00
LYX = -0.00	LYY = 54.00	LYZ = 0.00
LZX = 0.00	LZY = 0.00	LZZ = 108.00

CS1.5

Moments of inertia of the area, at the output coordinate system: (millimeters ^ 4)

LXX = 40.50	LXY = -13.50	LXZ = 0.00
LYX = -13.50	LYY = 40.50	LYZ = 0.00
LZX = 0.00	LZY = 0.00	LZZ = 81.00

CS2.0
c.g.

CS1.999
cerca c.g.

Moments of inertia of the area, at the output coordinate system: (millimeters ^ 4)

LXX = 36.00	LXY = -18.00	LXZ = 0.00
LYX = -18.00	LYY = 36.00	LYZ = 0.00
LZX = 0.00	LZY = 0.00	LZZ = 72.00

CS2.5

Moments of inertia of the area, at the output coordinate system: (millimeters ^ 4)

LXX = 40.50	LXY = -13.50	LXZ = -0.00
LYX = -13.50	LYY = 40.50	LYZ = -0.00
LZX = -0.00	LZY = -0.00	LZZ = 81.00

University Copy For Library Use

• Tablas de momentos de inercia.

A modo de ejemplo se incorpora una tabla con la información de momentos de inercia de perfiles utilizados en construcción.

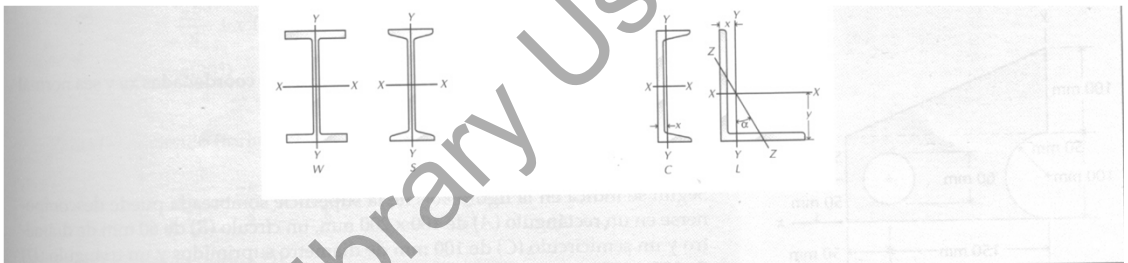
Comprobación W610x125:

I_x=985e6 [mm^4]

A=15935[mm^2]

k_x=249[mm]

Si hacemos k_x^2*A=987e6 ligeramente diferente al 985e6 tabulado, error que surge de no usar 4 dígitos significativos en las tablas.



Forma	Área mm^2	Altura mm	Anchura mm	Grosor Alas mm	Grosor Alma mm	Eje XX I_x 10^{6}mm^4	Eje XX k_x mm	Eje YY I_y 10^{6}mm^4	Eje YY k_y mm
W610 × 125	15935	612	229	19,6	11,9	985	249	39,3	49,5
W457 × 113	14385	463	280	17,3	10,8	554	196	63,3	66,3
W356 × 64	8130	347	203	13,5	7,7	178	148	18,8	48,0
W305 × 45	5670	313	166	11,2	6,6	99,1	132	8,45	38,6
W254 × 33	4185	258	146	9,1	6,1	49,1	108	4,75	33,8
S457 × 104	13290	457	159	17,6	18,1	358	170	10,0	27,4
S305 × 74	9485	305	139	16,7	17,4	127	116	6,53	26,2
S254 × 52	6645	254	126	12,5	15,1	61,2	96,0	3,48	22,9

Forma	Área mm^2	Altura mm	Anchura mm	Grosor Alas mm	Grosor Alma mm	Eje XX I_x 10^{6}mm^4	Eje XX k_x mm	Eje YY I_y 10^{6}mm^4	Eje YY k_y mm	Eje YY x mm
C381 × 74	9485	381	94,4	16,5	18,2	168	133	4,58	22,0	20,3
C305 × 45	5690	305	80,5	12,7	13,0	67,4	109	2,14	19,4	17,1
C254 × 45	5690	254	77,0	11,1	17,1	42,9	86,9	1,64	17,0	16,5

Forma	Área mm^2	Eje XX I_x 10^{6}mm^4	Eje XX k_x mm	Eje XX y mm	Eje YY I_y 10^{6}mm^4	Eje YY k_y mm	Eje YY x mm
L203 × 203 × 25,4	9675	37,0	62,0	60,2	37,0	62,0	60,2
L203 × 152 × 25,4	8385	33,6	63,2	67,3	16,1	43,9	41,9
L203 × 102 × 25,4	7095	29,0	64,0	77,5	4,83	26,2	26,7
L152 × 152 × 25,4	7095	14,8	45,7	47,2	14,8	45,7	47,2
L152 × 102 × 19,1	4475	10,2	47,8	52,8	3,61	28,4	27,4
L102 × 102 × 19,1	3510	3,19	30,2	32,3	3,19	30,2	32,3
L102 × 76 × 12,7	2095	2,10	31,8	33,8	1,01	21,9	21,0
L76 × 76 × 12,7	1775	0,924	22,8	23,7	0,924	22,8	23,7

University Copy For Library Use

• Momentos de superficies compuestas.

Una vez se entiende el teorema de Steiner se puede aplicar para hallar los momentos de superficies compuestas.

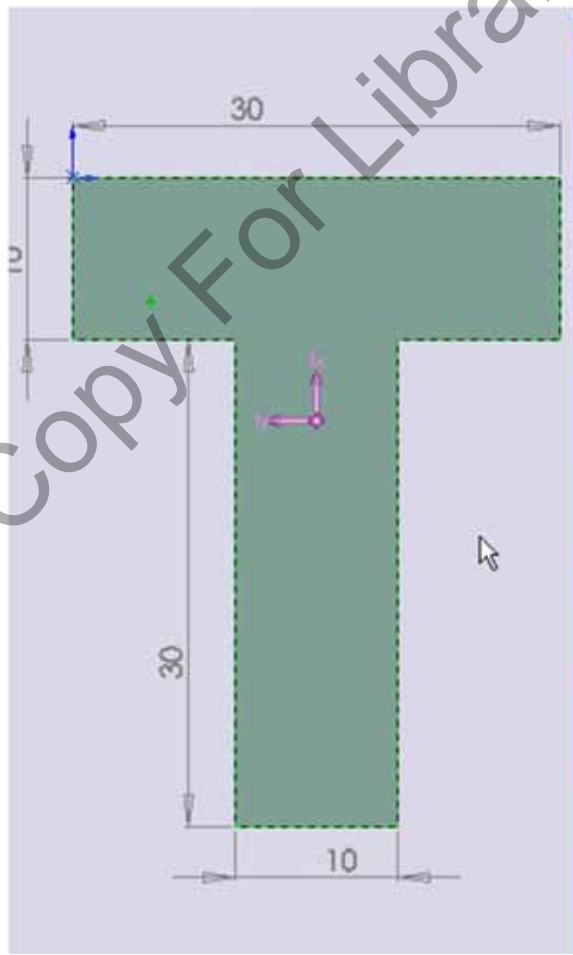
$$I_{x'} = I_x + A\bar{y}^2$$

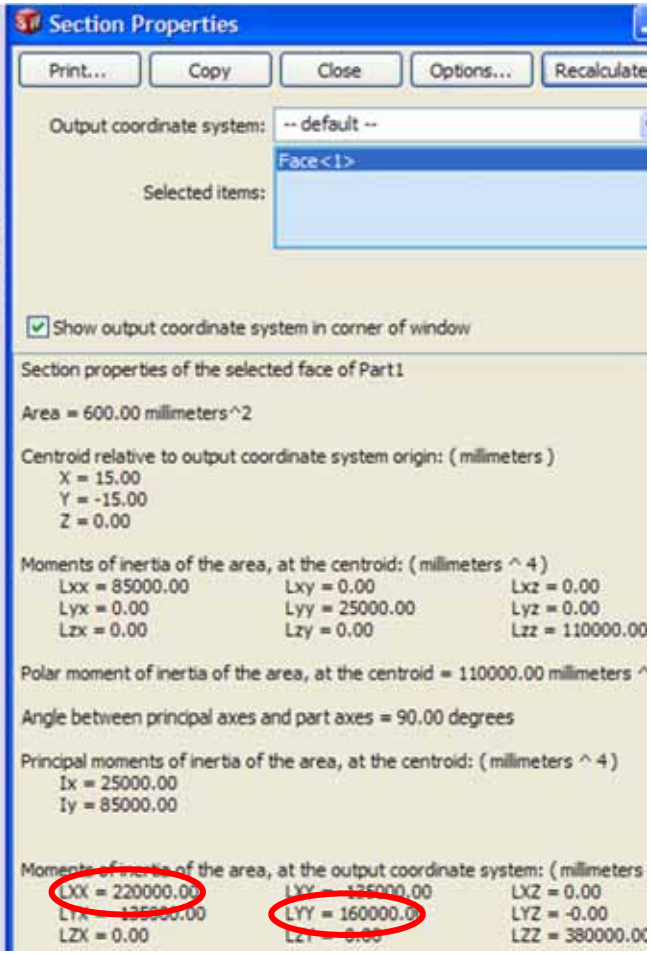
$$I_{y'} = I_y + A\bar{x}^2$$

$$I_{x'} = I_{x_1'} + I_{x_2'} + I_{x_3'} + \ldots$$

$$I_{y'} = I_{y_1'} + I_{y_2'} + I_{y_3'} + \ldots$$

Una vez más al quitar material (agujeros) los momentos de inercia se restan.





University Copy For Library Use

- Ejercicio para casa.

Calcular el centro de gravedad de la pieza en forma de "T" de 30x10 y 10x30 y los momentos de inercia respecto a dicho centro de gravedad y a los ejes de la figura.

$I_{x1'} =$

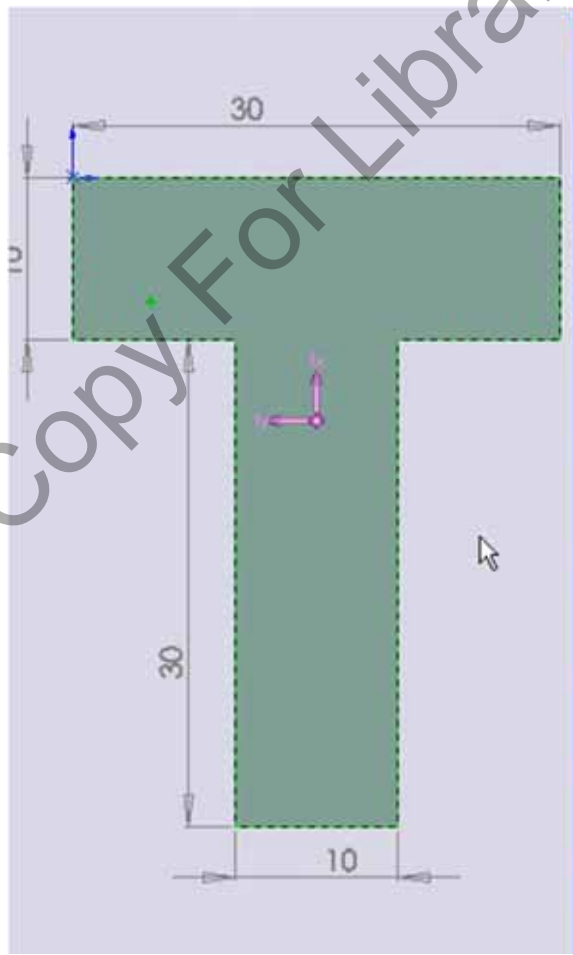
$I_{y1'} =$

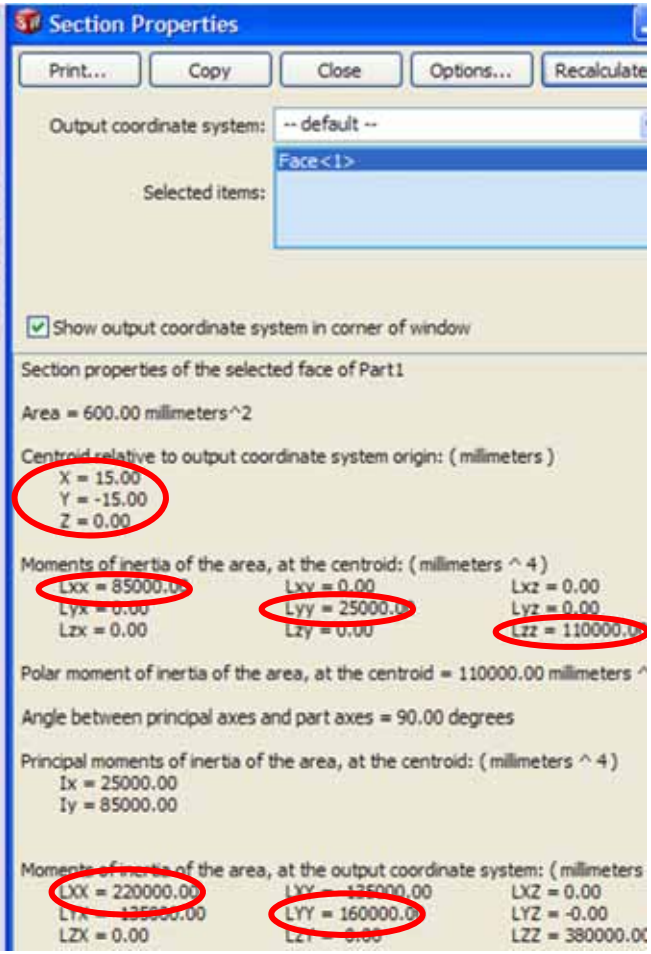
$I_{x2'} =$

$I_{y2'} =$

$I_{x'} =$

$I_{y'} =$





University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Cálculo de momentos de segundo orden.

➢ Teorema de Steiner para calcular momentos en otros ejes.

➢ Momentos de inercia de piezas compuestas.

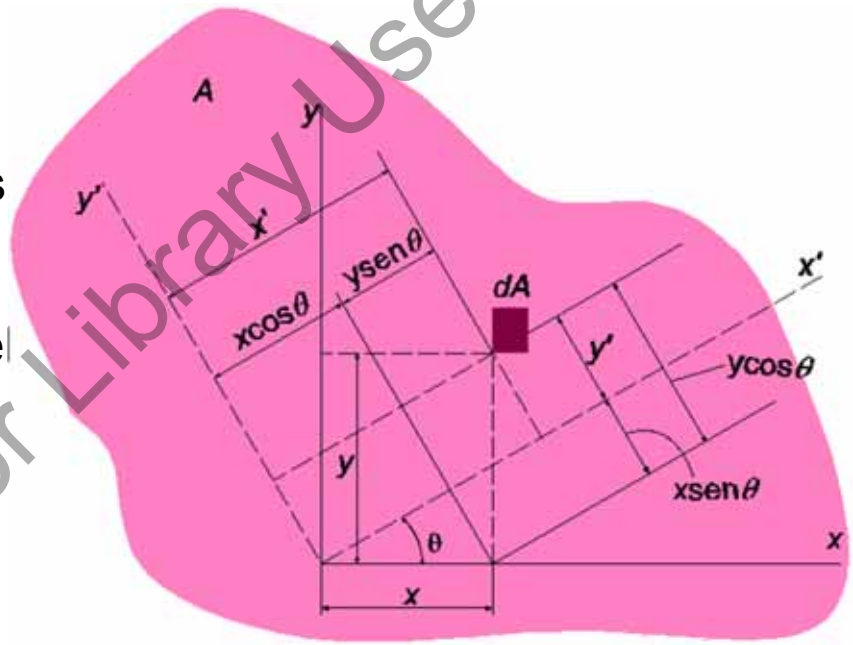
University Copy For Library Use

• Momentos principales.

Si en lugar de trasladar los ejes para calcular momentos los vamos girando un ángulo θ podemos encontrar que la suma de inercias es constante.

Por lo tanto es posible encontrar el ángulo en que el momento es máximo en una dirección y por tanto mínimo en la dirección normal.

Existe una única dirección principal máxima excepto para la sección circular.



$$J_z = I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'} = \text{ctte} \;\therefore\; \underbrace{I_{x'} = \text{mín} \Rightarrow I_{y'} = \text{máx}}_{I_u \text{ o } I_v} \text{ o vicev.}$$

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta)^2 dA;$$

$$= \cos^2\theta \int y^2 dA + \text{sen}^2\theta \int x^2 dA - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \int xy dA$$

$$= I_x \cos^2\theta + I_y \text{sen}^2\theta - 2I_{xy}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

University Copy For Library Use

- Cálculo momentos principales.

Mediante identidades trigonométricas:

$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \text{sen}^2\theta - 2I_{xy}\text{sen}\,\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\theta - I_{xy}\text{sen}\,2\theta$$

Al buscar máximo y mínimo:

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -\left(I_x - I_y\right)\text{sen}\,2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{\left(I_x - I_y\right)}$$

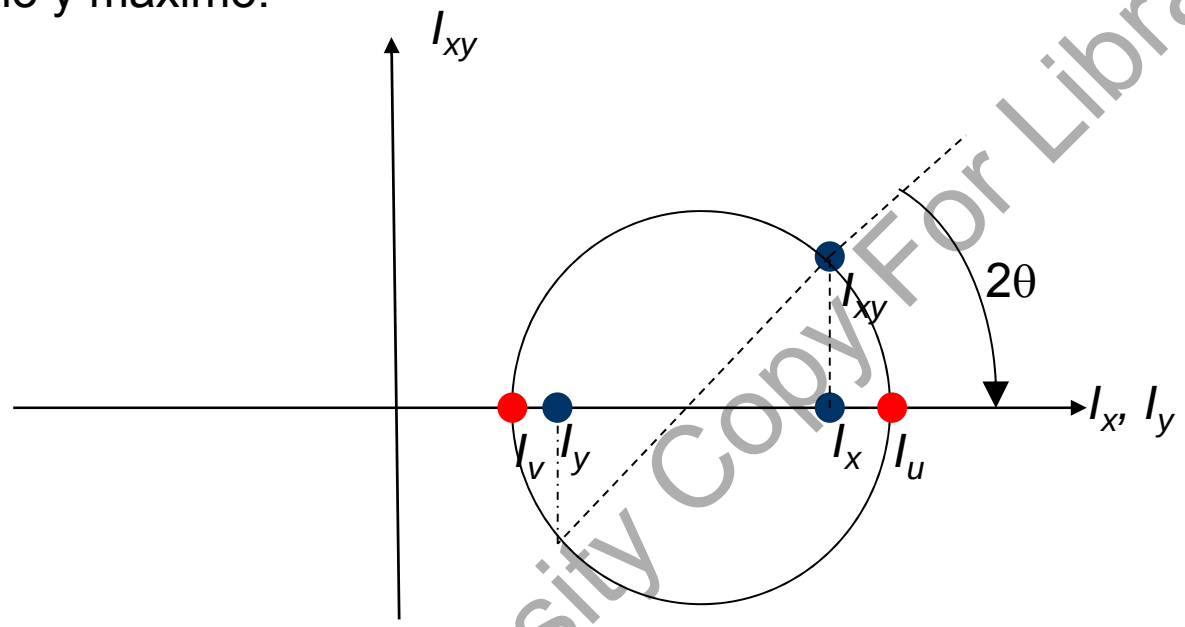
Esta última ecuación se anula para valores de 2θ desfasados 180º (máximo o mínimo). Sustituyendo se obtienen los ejes principales *u, v* correspondientes a dichos máximos o mínimos.

$$I_{u,v} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \left[\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2\right]^{1/2}$$

University Copy For Library Use

- Cálculo momentos principales círculo Mohr.

Para entender mejor que hacemos con la ecuación anterior de cálculo de momentos principales podemos colocar los momentos de manera gráfica para ver como calcular mínimo y máximo.

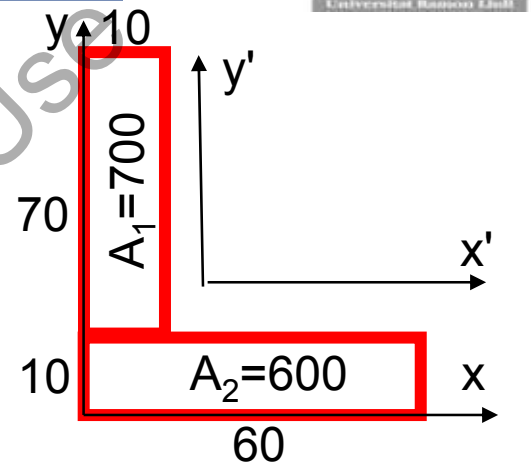


$$I_{u,v} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \left[\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

University Copy For Library Use

• Ejercicio ejes principales Riley 10.11.

Calcular inercia en ejes principales de la figura en forma de "T".



Primero calculamos el centro de masas del conjunto.

$$\bar{x} = \frac{600\cdot 30 + 700\cdot 5}{600+700} = 16.54;$$

$$\bar{y} = \frac{600\cdot 5 + 700\cdot 45}{600+700} = 26.54$$

Calculamos los momentos de inercia respecto al centro de gravedad en direcciones paralelas a "x" e "y".

$$I_{x'} = \frac{10\cdot 70^3}{12} + 700(45-26.54)^2 + \frac{60\cdot 10^3}{12} + 600(5-26.54)^2 = 8.033e5;$$

Encontramos principales.

$$I_{y'} = \frac{70\cdot 10^3}{12} + 700(5-16.54)^2 + \frac{10\cdot 60^3}{12} + 600(30-16.54)^2 = 3.878e5;$$

$$I_{x'y'} = 0 + 700(5-16.54)(45-26.54) + 0 + 600(30-16.54)(5-26.54) = -3.231e5;$$

$$I_{u,v} = 10^5\left(\frac{8.033+3.878}{2} \pm \left[\left(\frac{8.033-3.878}{2}\right)^2 + (-3.231)^2\right]^{1/2}\right) = MAX: 9.796\text{E}+05; \min: 2.114\text{E}+05$$

Encontramos dirección.

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{2(-3.231)}{(8.033-3.878)}\right) = 28.63^{o}$$

University Copy For Library Use

• Ejercicio ejes principales para casa.

Primero calculamos el centro de masas del conjunto.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}; \bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

Para cada figura

$$I_{x'} = I_x + A\bar{y}^2; I_{y'} = I_y + A\bar{x}^2; I_{xy'} = I_{xy} + A\bar{x}\bar{y};$$

Calculamos los momentos de inercia respecto al centro de gravedad en direcciones paralelas a "x" e "y".

Componemos momentos.

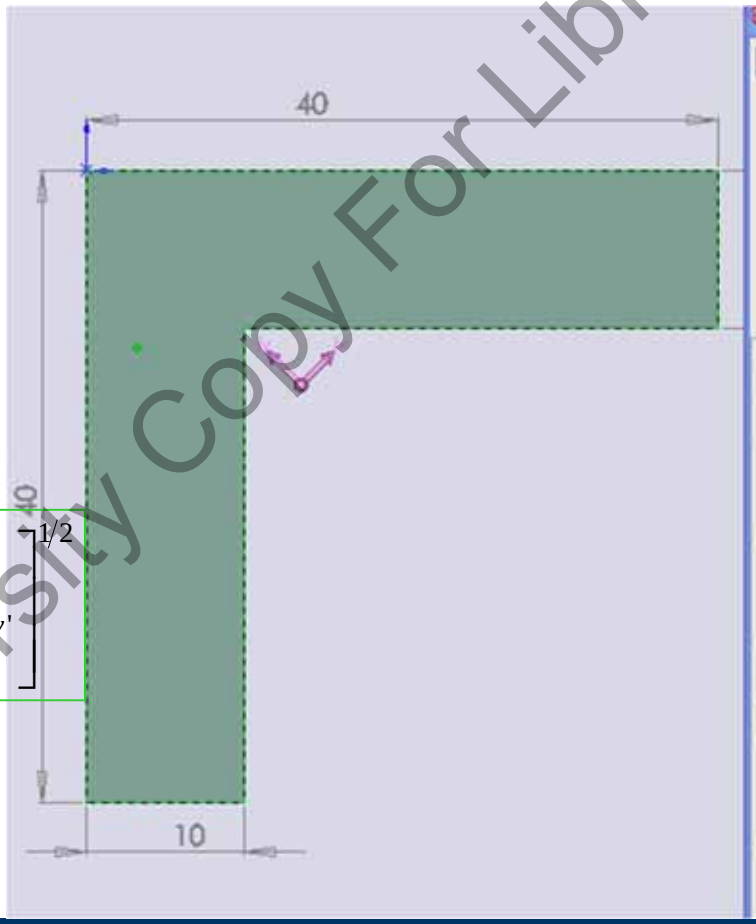
$$I_{x'} = \sum I_{x_i'}; I_{y'} = \sum I_{y_i'};$$
$$I_{x'y'} = \sum I_{x_i'y_i'};$$

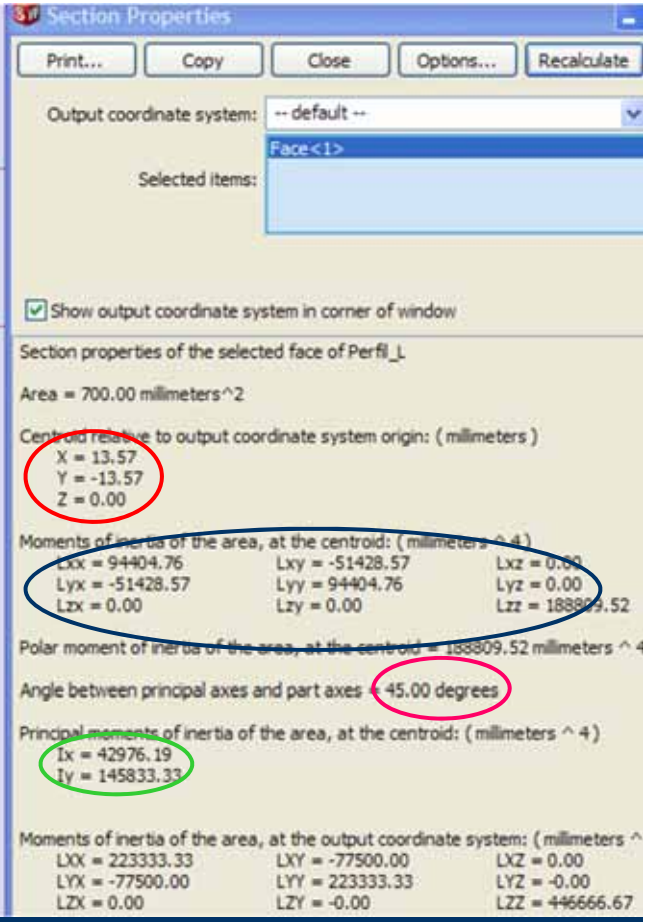
Encontramos principales.

$$I_{u,v} = \frac{I_{x'} + I_{y'}}{2} \pm \left[\left(\frac{I_{x'} - I_{y'}}{2} \right)^2 + I_{x'y'}^2 \right]^{1/2}$$

Encontramos dirección.

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{2I_{xy}}{(I_x - I_y)} \right)$$





University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Riley 10.54.

Antes de hacer el ejercicio vamos a calcular los momento de inercia respecto a ejes por centro gravedad por si no tenemos las tablas.

$$I_x = \int_A y^2 dA;\ I_y = \int_A x^2 dA;\ I_{xy} = \int_A xy dA;$$

en centroide:

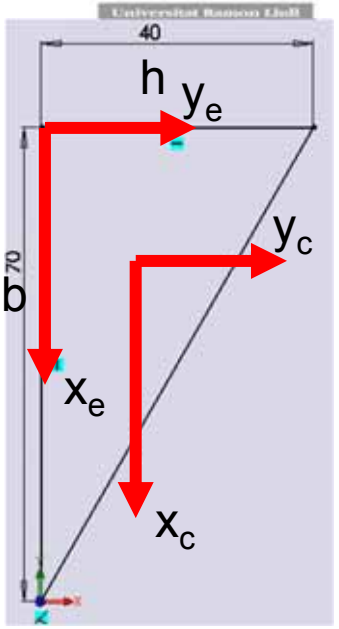
$$x = -\frac{b}{h}y + \frac{b}{3}$$

$$y = -\frac{h}{b}x + \frac{h}{3}$$

$$I_{xc} = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2\left(-\frac{b}{h}y + \frac{b}{3}\right)dy = \left[-\frac{by^4}{4h} + \frac{by^3}{9}\right]_{-h/3}^{2h/3} = \frac{bh^3}{36};$$

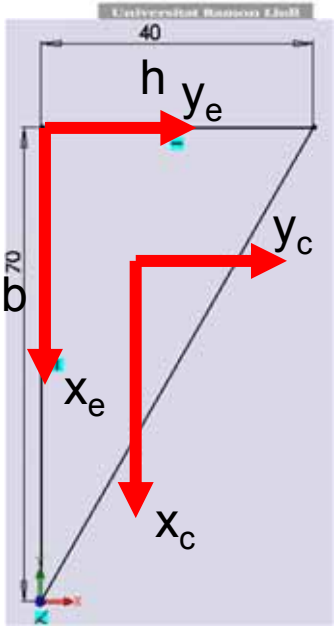
$$I_{yc} = \int_{-b/3}^{2b/3} x^2\left(-\frac{h}{b}x + \frac{h}{3}\right)dx = \left[-\frac{hx^4}{4b} + \frac{hx^3}{9}\right]_{-b/3}^{2b/3} = \frac{b^3h}{36};$$

$$I_{xyc} = \int_{-b/3}^{2b/3}\int_{-h/3}^{-\frac{h}{b}x+\frac{h}{3}} xy\,dy\,dx = \int_{-b/3}^{2b/3} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-h/3}^{-\frac{h}{b}x+\frac{h}{3}} dx = [\ldots]_{-b/3}^{2b/3} = -\frac{b^2h^2}{72};$$



Como estos ejes son difíciles lo calcularemos respecto a Xe,Ye por la esquina y luego desharemos Steiner.

University Copy For Library Use



- Ejercicio casa Riley 10.54.

Repetimos por la esquina. $x = -\frac{b}{h}y + b;\ y = -\frac{h}{b}x + h$

$$I_{xe} = \int_0^h y^2\left(-\frac{b}{h}y + b\right)dy = \left[-\frac{by^4}{4h} + \frac{by^3}{3}\right]_0^h = \frac{bh^3}{12};$$

$$I_{ye} = \int_0^b x^2\left(-\frac{h}{b}x + h\right)dx = \left[-\frac{hx^4}{4b} + \frac{hx^3}{3}\right]_{-b/3}^{2b/3} = \frac{b^3h}{12};$$

$$I_{xye} = \int_0^b \int_0^{-\frac{h}{b}x+h} xydydx = \int_0^b x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{-\frac{h}{b}x+h} dx = \frac{h^2}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3b} + \frac{x^4}{4b^2}\right]_0^b = \frac{b^2h^2}{24};$$

Deshacemos Steiner:

$$I_{xc} = I_{xe} - x_c{}^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36};$$

$$I_{yc} = I_{ye} - y_c{}^2 A = \frac{hb^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36};$$

$$I_{xyc} = I_{xye} - x_c y_c A = \frac{h^2b^2}{24} - \left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right)\frac{bh}{2} = -\frac{h^2b^2}{72};$$

University Copy For Library Use

• Ejercicio casa Riley 10.54.

Calcular momentos de superficie máximo y mínimo.

Primero usamos los ejes del centro de masas que conocemos por tablas:

$I_{xxc}=bh^3/36=70*40^3/36=1.244e5[mm^4]$

$I_{yyc}=hb^3/36=40*70^3/36=3.811e5[mm^4]$

$I_{xyc}=-b^2h^2/72=-70^2*40^2/72=-1.089e5[mm^4]$

$$I_{u,v}=\frac{I_x+I_y}{2}\pm\left[\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2\right]^{1/2}$$

$$\tan 2\theta=-\frac{2I_{xy}}{(I_x-I_y)}$$

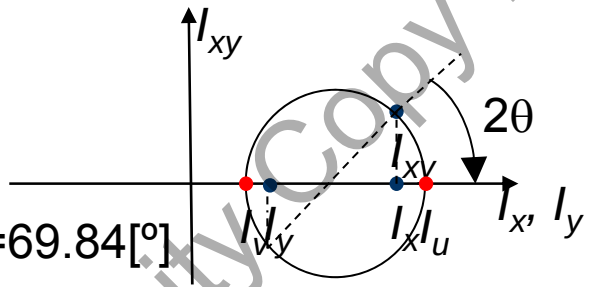
Usamos la ecuación de círculo de Mohr para saber direcciones principales:

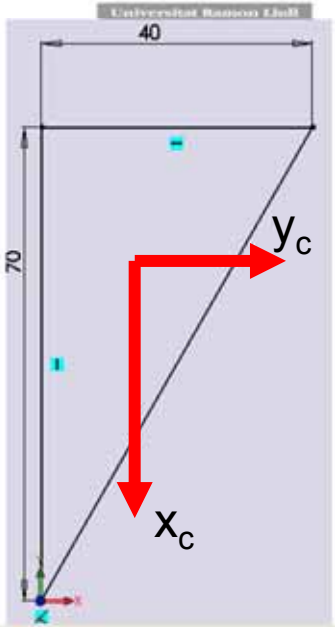
$I_{max}=4.211e5[mm^4]$

$I_{min}=8.447e4[mm^4]$

$\theta_{xc}=-20.16[º]$

Respecto a x: 90-20.16=69.84[º]





Section properties of Sketch1 of Part1

Area = 1400.00 millimeters^2

Centroid relative to sketch origin: (millimeters)
X = 13.33
Y = 46.67

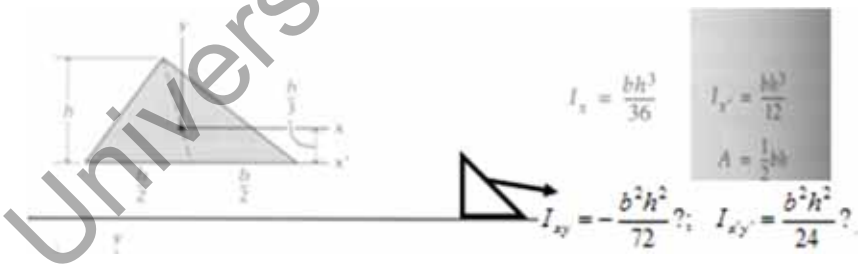
Centroid relative to part origin: (millimeters)
X = 13.33
Y = 46.67
Z = 0.00

Moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ^ 4)
Lxx = 381111.11 Lxy = -108888.89
Lyx = -108888.89 Lyy = 124444.44

Polar moment of inertia of the area, at the centroid = 505555.56 millimeters ^ 4

Angle between principal axes and sketch axes = 69.84 degrees

Principal moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ^ 4)
Mx = 84473.78
My = 421081.77



b[mm]	h[mm]	A[mm2]	Ixxc[mm4]	Iyyc[mm4]	Ixyc[mm4]	Imax[mm4]	Imin[mm4]	angulo[º]
7.000E+01	4.000E+01	1.400E+03	1.244E+05	3.811E+05	-1.089E+05	4.211E+05	8.447E+04	-2.016E+01

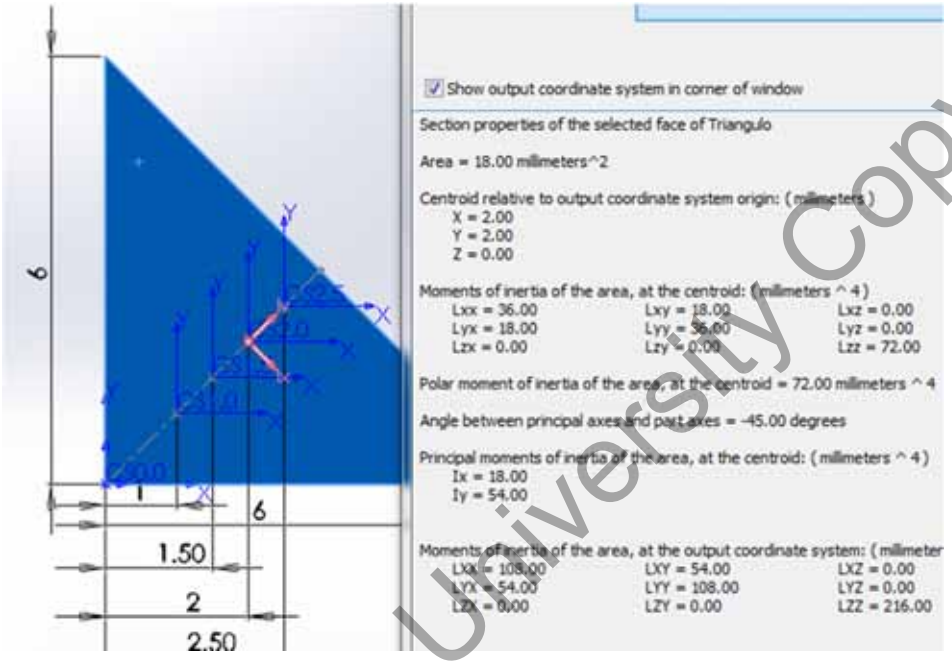
University Copy For Library Use

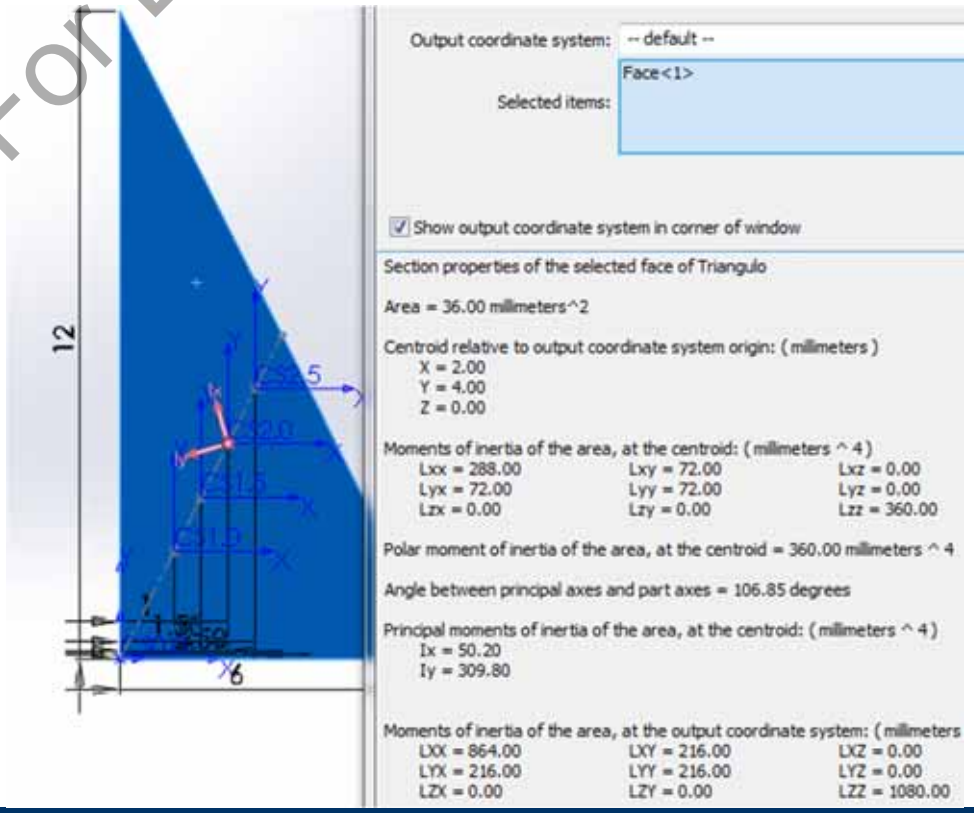
- Ejercicio sencillo triángulo.

Calcular momentos de superficie máximo y mínimo para triángulo 6x6 y 6x12.

6x6: Ix=Iy=36, Ixy=-18, Imax=36+18=54, Imin=36-18=18, giro de 45º de X para ser max

6x12: Ix=288, Iy=72, Ixy=-72, C=180, R=$\sqrt{108^2+72^2}$=129.8, Imax=180+129.8=309.8, Imin=180-129.8=50.2, giro 0.5*atan(72/108)=16.85º de X para ser max 90+16.85=106.85º





University Copy For Library Use

- Resumen.
  - Cálculo de momentos principales.
  - Introducción a círculo de Mohr.

University Copy For Library Use

S07t.- Control hasta Ejes Principales.

University Copy For Library Use

Mejora 1314 ...

- Repaso sesión anterior .
  - Cálculo de momentos principales.
  - Introducción a círculo de Mohr.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

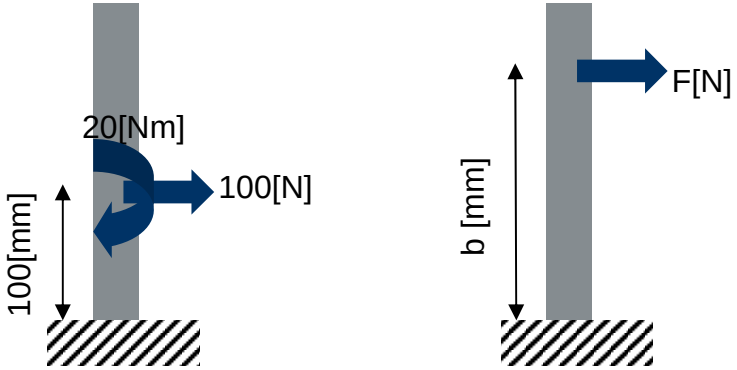
• Objetivos de esta sesión

➢ Realizar una actividad de seguimiento que permita al alumno analizar su capacidad de seguimiento de la asignatura y al profesor analizar si el alumnado sigue de manera correcta el ritmo del curso.

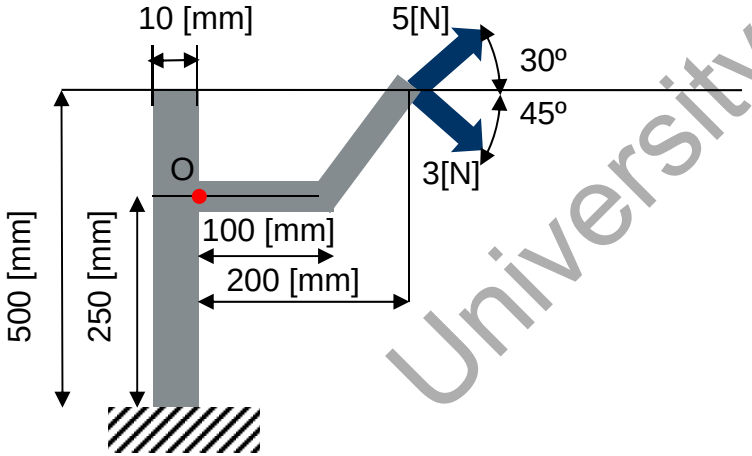
University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 21.10.2008a

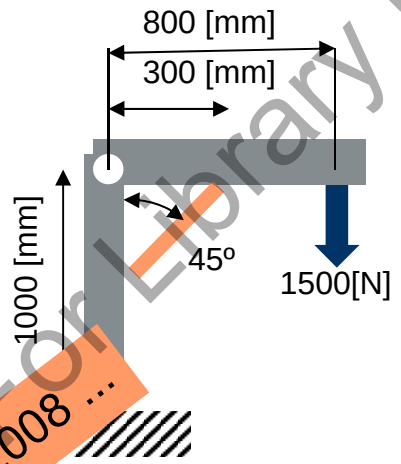
1.- Sustituir la fuerza y el momento por una única fuerza aplicada en un punto. Dar valor de la fuerza "F" y la distancia "b".



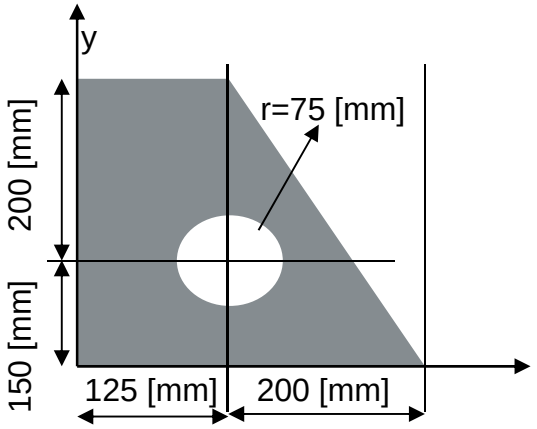
2.- Calcular fuerza resultante "R" y momento "M" y sentido de dicha fuerza respecto O.



3.- Calcular fuerzas y momentos en rótula y fuerza del muelle de gas.



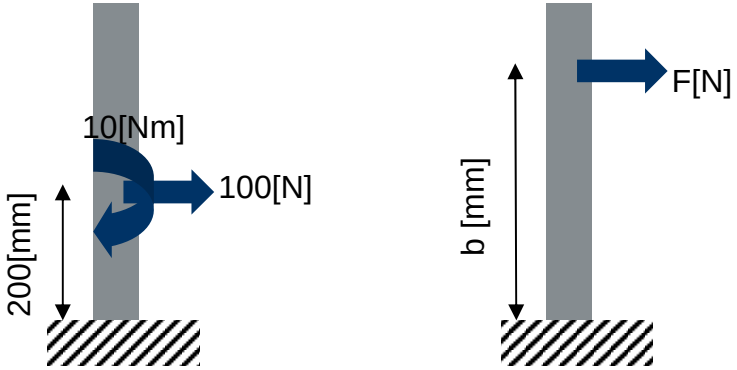
4.- Calcular centro de gravedad y peso de la chapa si cada m^2 pesa 10kg .



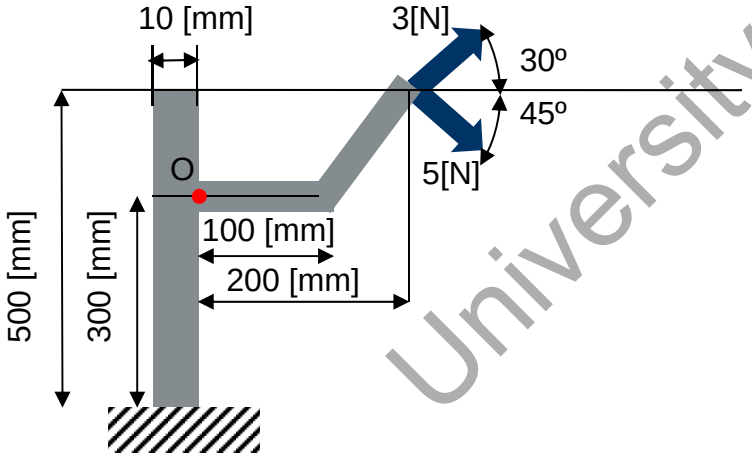
Ejercicios 2008 ...
University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 21.10.2008b

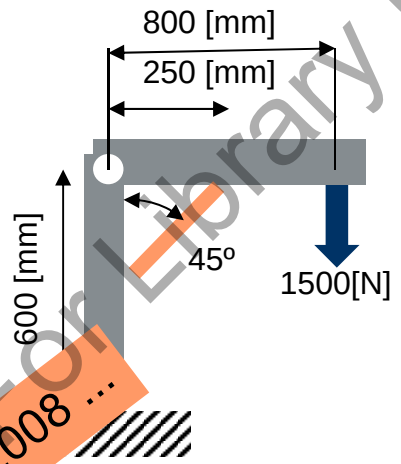
1.- Sustituir la fuerza y el momento por una única fuerza aplicada en un punto. Dar valor de la fuerza "F" y la distancia "b".



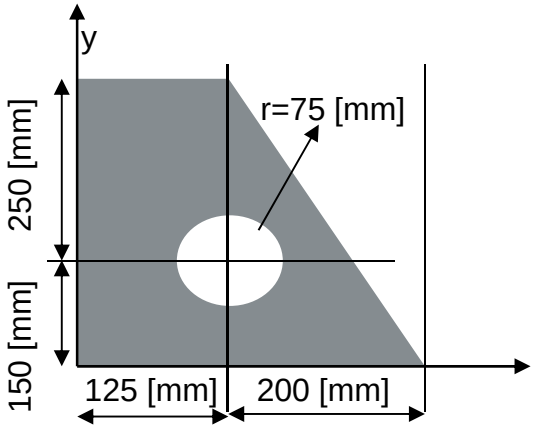
2.- Calcular fuerza resultante "R" y momento "M" y sentido de dicha fuerza respecto "O".



3.- Calcular fuerzas y momentos en rótula y fuerza del muelle de gas.



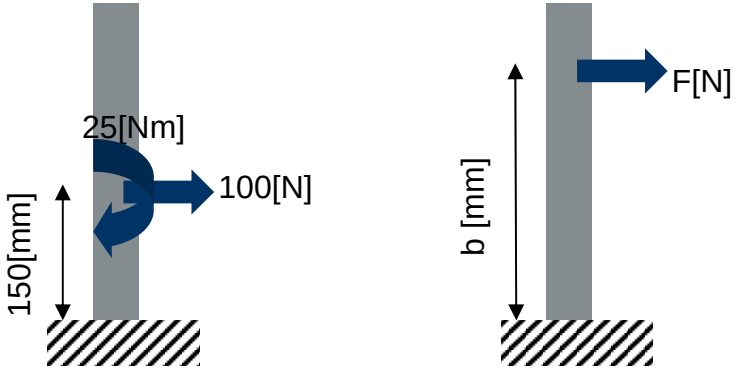
4.- Calcular centro de gravedad y peso de la chapa si cada m^2 pesa 10kg .



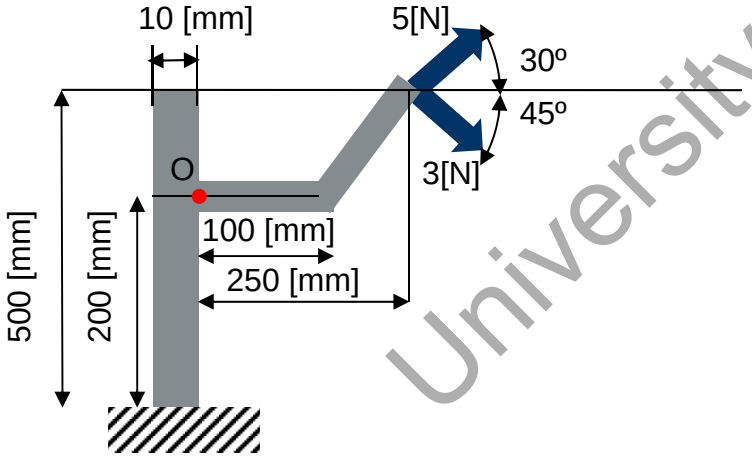
Ejercicios 2008 ...
University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 21.10.2008c

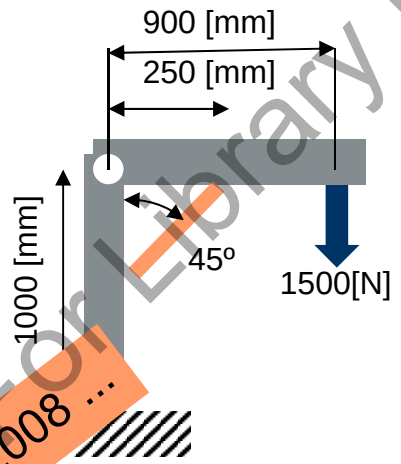
1.- Sustituir la fuerza y el momento por una única fuerza aplicada en un punto. Dar valor de la fuerza "F" y la distancia "b".



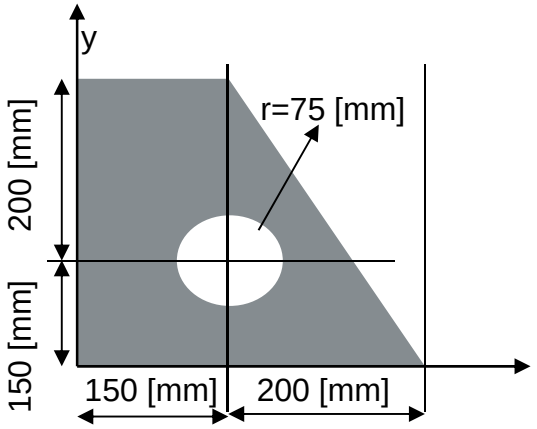
2.- Calcular fuerza resultante "R" y momento "M" y sentido de dicha fuerza respecto O.



3.- Calcular fuerzas y momentos en rótula y fuerza del muelle de gas.



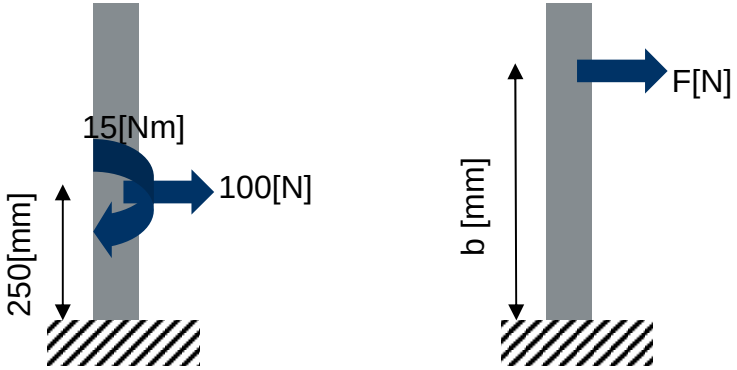
4.- Calcular centro de gravedad y peso de la chapa si cada m^2 pesa 10kg .



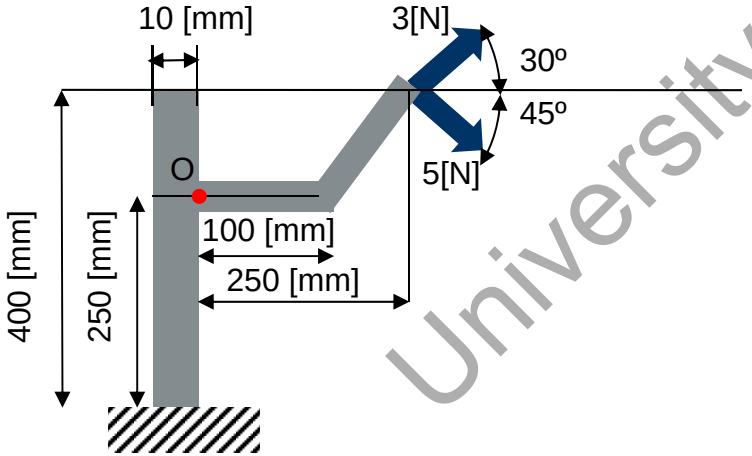
Ejercicios 2008 ...
University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 21.10.2008d

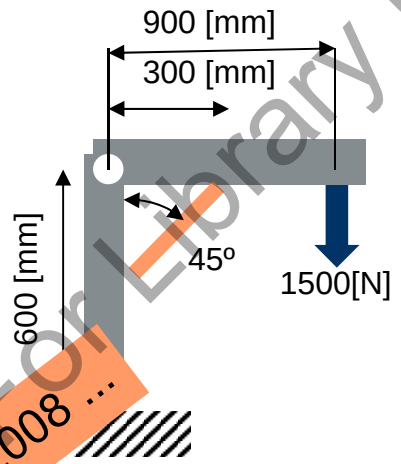
1.- Sustituir la fuerza y el momento por una única fuerza aplicada en un punto. Dar valor de la fuerza "F" y la distancia "b".



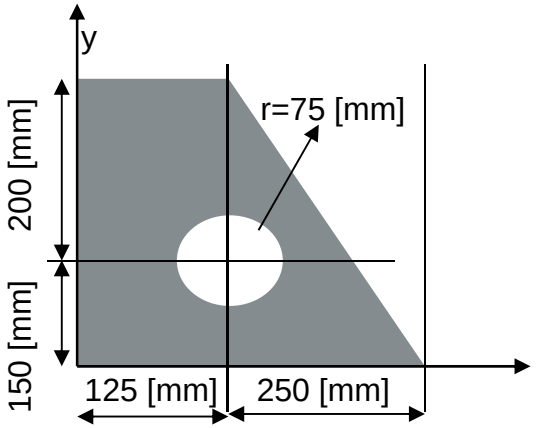
2.- Calcular fuerza resultante "R" y momento "M" y sentido de dicha fuerza respecto "O".



3.- Calcular fuerzas y momentos en rótula y fuerza del muelle de gas.



4.- Calcular centro de gravedad y peso de la chapa si cada m^2 pesa 10kg .

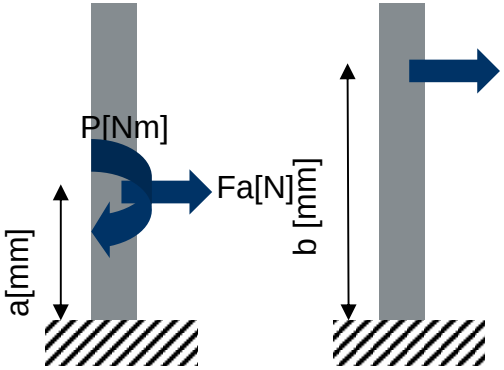


Ejercicios 2008 ...
University Copy For Library Use

Soluciones a,b,c y d

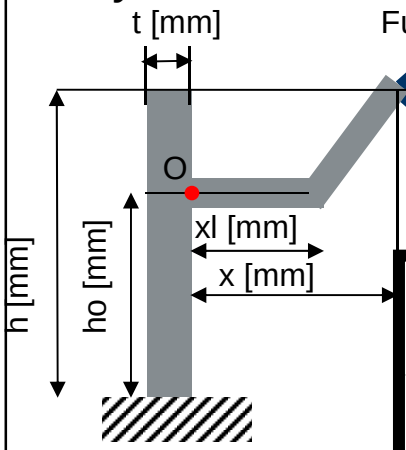
21.10.2008

1.- Sustituir la fuerza y el momento por una única fuerza aplicada en un punto. Dar valor de la fuerza "F" y la distancia "b".



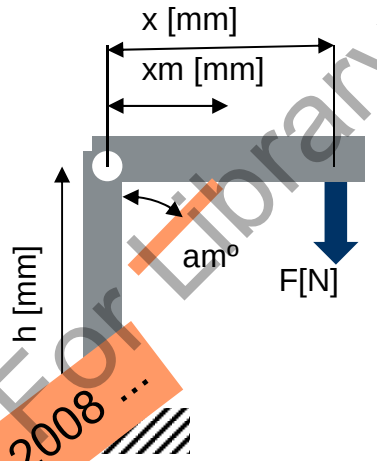
F[N]	b[mm]
1.000E+02	3.000E+02
1.000E+02	3.000E+02
1.000E+02	4.000E+02
1.000E+02	4.000E+02

2.- Calcular fuerza resultante "R" y momento "M" y sentido de dicha fuerza respecto "O".



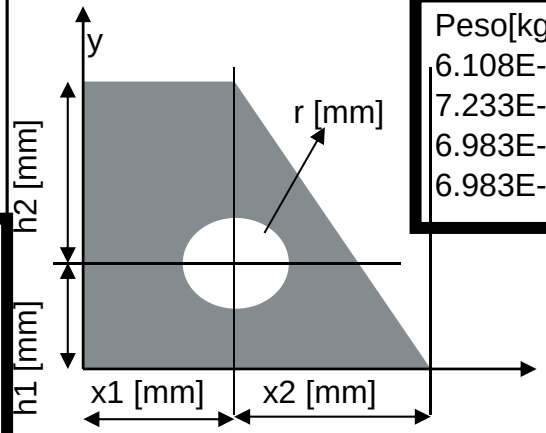
Rx[N]	Ry[N]	Mz[N·mm]
6.451E+00	3.787E-01	-1.537E+03
6.134E+00	-2.036E+00	-1.634E+03
6.451E+00	3.787E-01	-1.841E+03
6.134E+00	-2.036E+00	-1.429E+03

3.- Calcular fuerzas y momentos en rótula y fuerza del muelle de gas.



Fm[N]	Fax[N]	Fay[N]
5.657E+03	-4.000E+03	-2.500E+03
6.788E+03	-4.800E+03	-3.300E+03
7.637E+03	-5.400E+03	-3.900E+03
6.364E+03	-4.500E+03	-3.000E+03

4.- Calcular centro de gravedad y peso de la chapa si cada m^2 pesa 10kg .



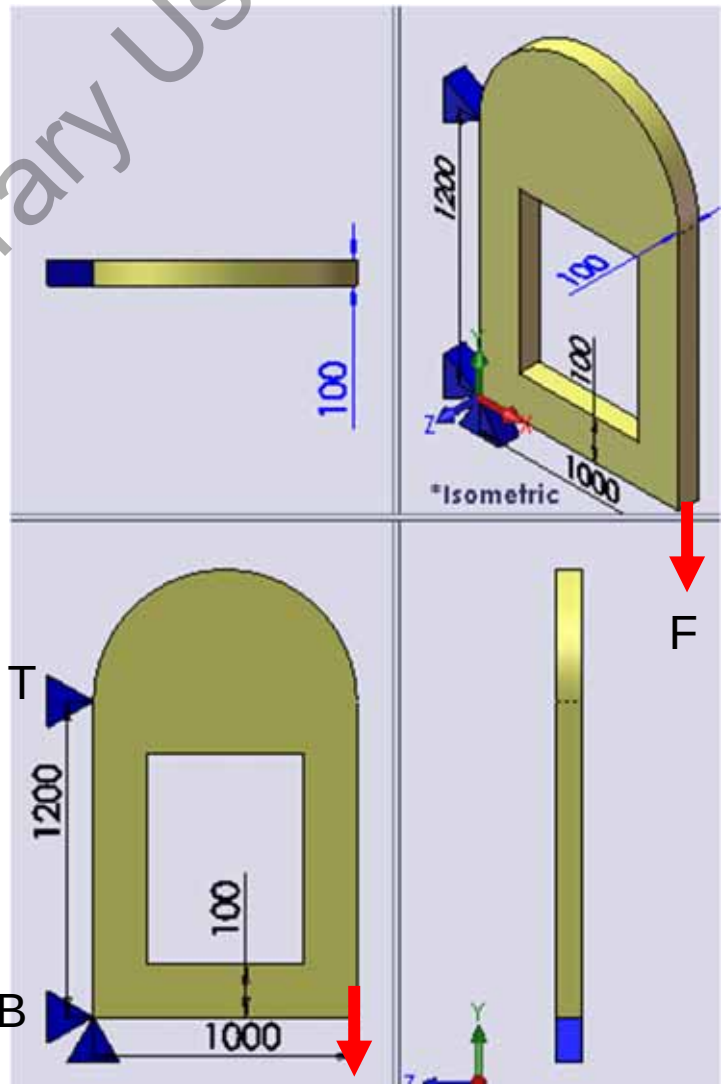
Peso[kg]	xcg[mm]	ycg[mm]
6.108E-01	1.184E+02	1.488E+02
7.233E-01	1.187E+02	1.753E+02
6.983E-01	1.270E+02	1.521E+02
6.983E-01	1.381E+02	1.448E+02

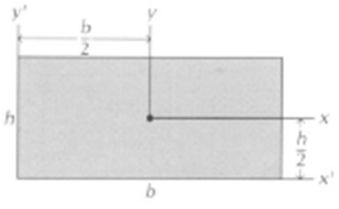
University Copy For Library Use
Ejercicios 2008 ...

Nombre y apellidos: 15.10.2009a

Si la ventana de la figura es de acero de densidad 8000 kg/m^3, calcular:

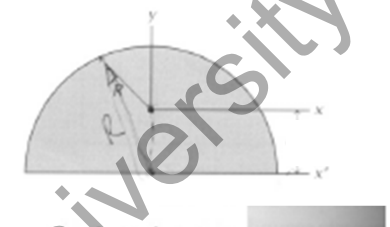
1. Peso de la ventana.
2. Centroide arco circular si sabemos volumen esfera $4\pi r^3/3$ y superficie semicírculo es $\pi r^2/2$.
3. Centro de gravedad de la ventana.
4. Reacciones en B y T sólo con la fuerza F.
5. Reacciones en B y T con F y el peso de la ventana.
6. Inercia de la superficie.





$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{x'} = \frac{bh^3}{3} \qquad A = bh$$

$$I_{xy} = 0; \qquad I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{4}$$



$$I_{xy} = 0; \qquad I_{x'y'} = \frac{2R^4}{3}$$

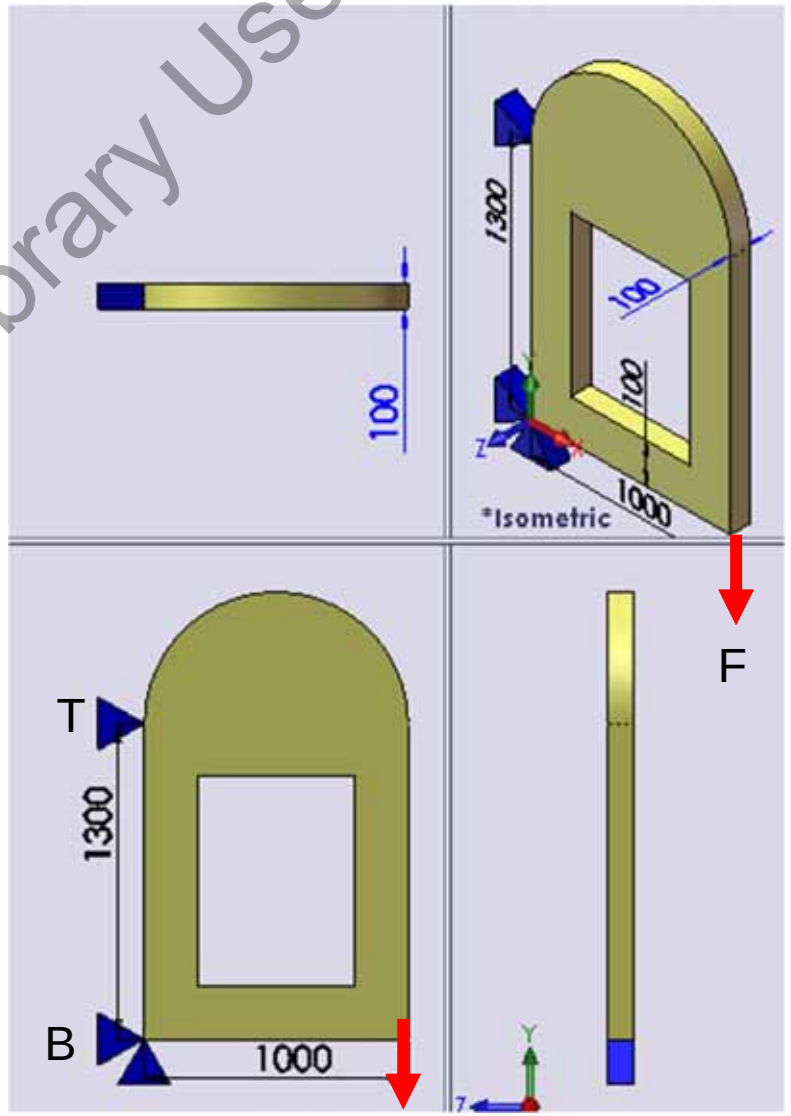
University Copy For Library Use

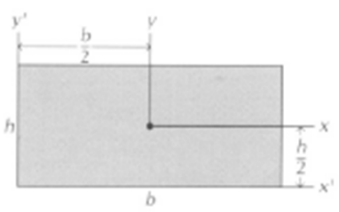
Nombre y apellidos:

15.10.2009b

Si la ventana de la figura es de acero de densidad 8000 kg/m^3, calcular:

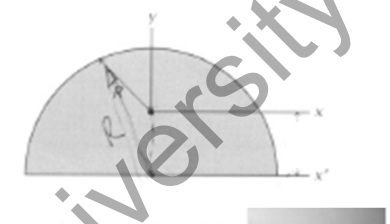
1. Peso de la ventana.
2. Centroide arco circular si sabemos volumen esfera $4\pi r^3/3$ y superficie semicírculo es $\pi r^2/2$.
3. Centro de gravedad de la ventana.
4. Reacciones en B y T sólo con la fuerza F.
5. Reacciones en B y T con F y el peso de la ventana.
6. Inercia de la superficie.





$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{x'} = \frac{bh^3}{3} \qquad A = bh$$

$$I_{xy} = 0; \qquad I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{4}$$



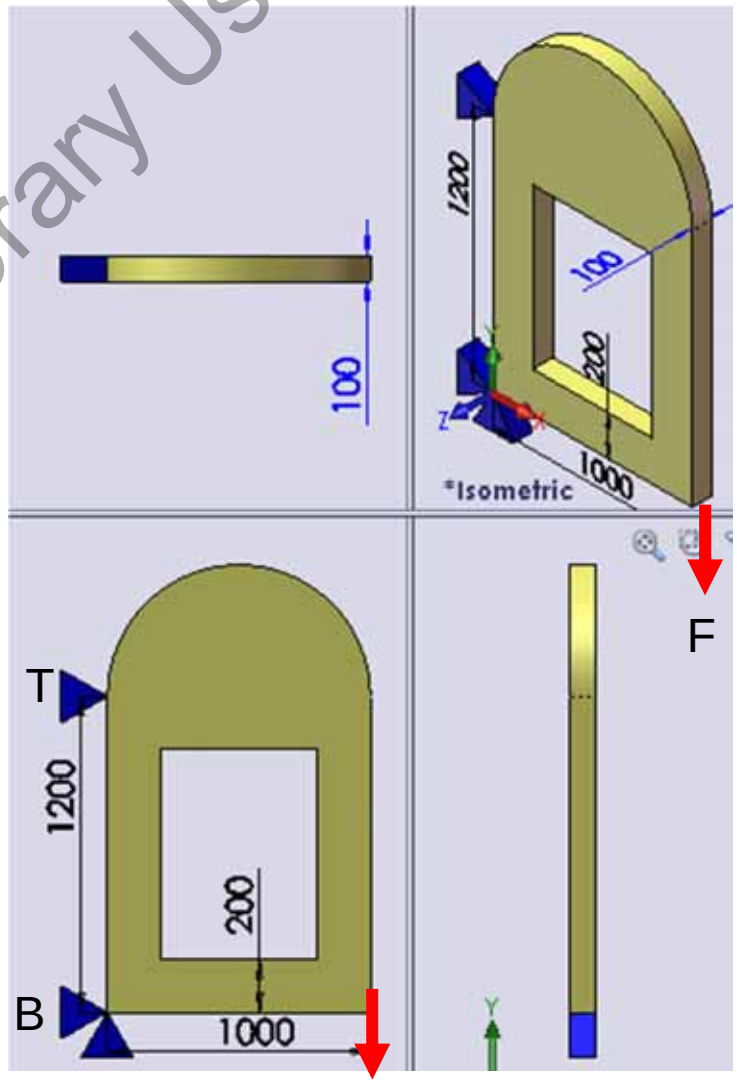
$$I_{xy} = 0; \qquad I_{x'y'} = \frac{2R^4}{3}$$

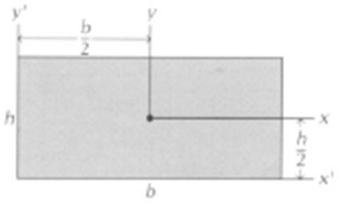
University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 15.10.2009c

Si la ventana de la figura es de acero de densidad 8000 kg/m^3, calcular:

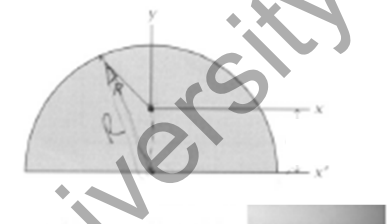
1. Peso de la ventana.
2. Centroide arco circular si sabemos volumen esfera $4\pi r^3/3$ y superficie semicírculo es $\pi r^2/2$.
3. Centro de gravedad de la ventana.
4. Reacciones en B y T sólo con la fuerza F.
5. Reacciones en B y T con F y el peso de la ventana.
6. Inercia de la superficie.





$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{x'} = \frac{bh^3}{3} \qquad A = bh$$

$$I_{xy} = 0; \qquad I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{4}$$



$$I_{xy} = 0; \qquad I_{x'y'} = \frac{2R^4}{3}$$

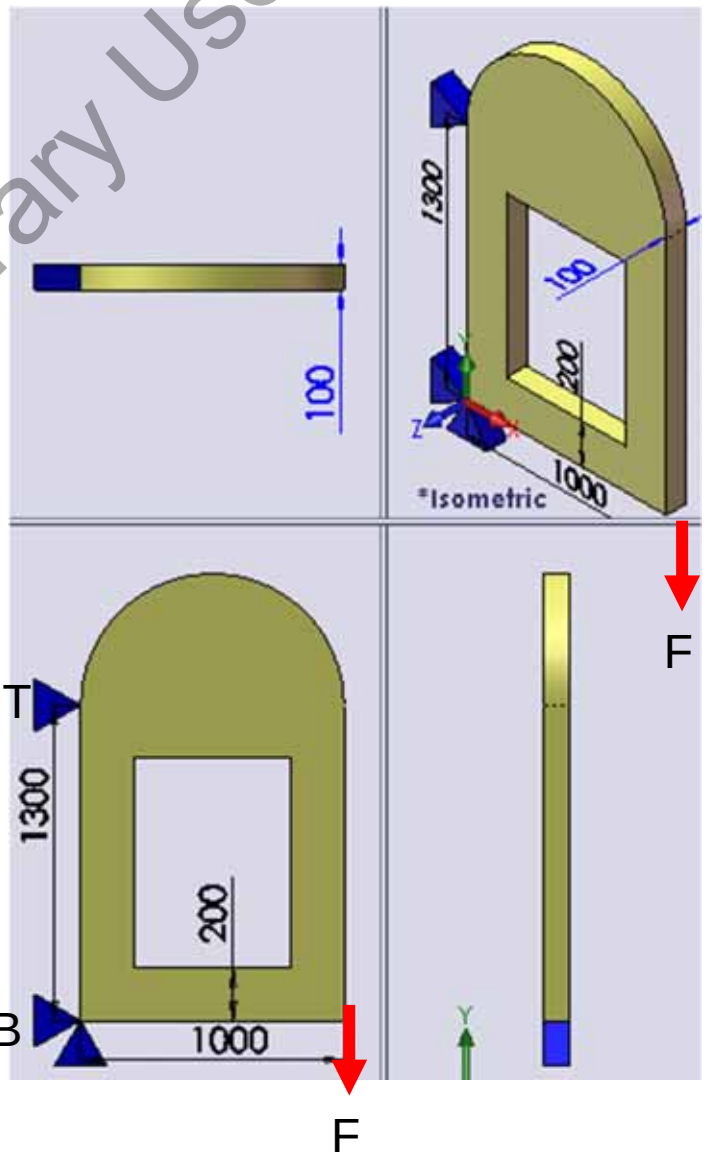
University Copy For Library Use

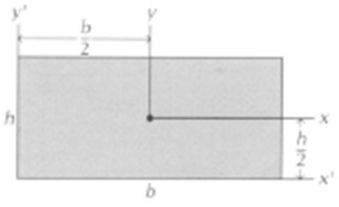
Nombre y apellidos:

15.10.2009d

Si la ventana de la figura es de acero de densidad 8000 kg/m^3, calcular:

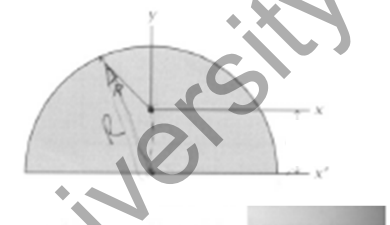
1. Peso de la ventana.
2. Centroide arco circular si sabemos volumen esfera $4\pi r^3/3$ y superficie semicírculo es $\pi r^2/2$.
3. Centro de gravedad de la ventana.
4. Reacciones en B y T sólo con la fuerza F.
5. Reacciones en B y T con F y el peso de la ventana.
6. Inercia de la superficie.





$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{x'} = \frac{bh^3}{3} \qquad A = bh$$

$$I_{xy} = 0; \qquad I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{4}$$

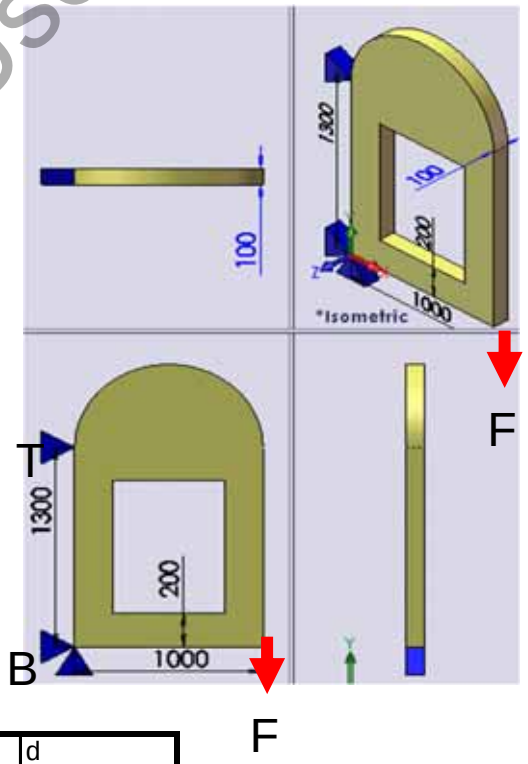


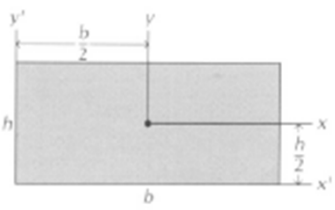
$$I_{xy} = 0; \qquad I_{x'y'} = \frac{2R^4}{3}$$

University Copy For Library Use

Soluciones a, b, c y d: 15.10.2009

1. Peso de la ventana. $m=\delta e(bh-(b-2t)(h-2t)+\pi b^2/8)$
2. Centroide arco circular si sabemos volumen esfera $4\pi r^3/3$ y superficie semicírculo es $\pi r^2/2$.
   $z=4\pi r^3/3/(2\pi*\pi r^2/2)=4r/3\pi$.
3. Centro de gravedad de la ventana. $y=(h/2*bh+....)/(bh+(b-2t)(h-2t)+\pi b^2/8)$.
4. Reacciones en B y T sólo con la fuerza F.
   $R_{xB}=Fb/h$, $R_{yB}=F$, $R_{xT}=-Fb/h$
5. Reacciones en B y T con F y el peso de la ventana.
   $R_{xB}=(Fb+mgb/2)/h$, $R_{yT}=F+mg$, $R_{xT}=-(Fb+mgb/2)/h$
6. Inercia de la superficie.
   $I_x=bh^3/12+(h/2)^2bh-(b-2t)(h-2t)^3/12-(h/2)^2(b-2t)(h-2t)+...$
   $I_y=hb^3/12+(b/2)^2bh+...$
   $I_{yx}=0+(h/2)(b/2)bh+...$





$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_{x'} = \frac{bh^3}{3}$ $A = bh$ $I_{xy} = 0;$ $I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{4}$

$I_{xy} = 0;$ $I_{x'y'} = \frac{2R^4}{3}$

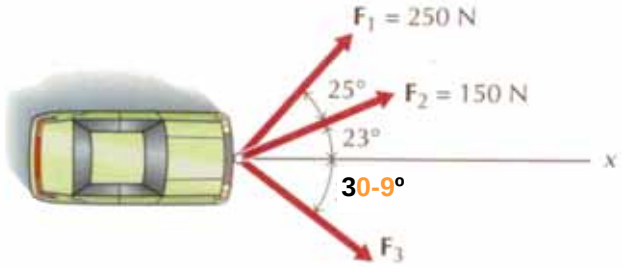
	a	b	c	d
m[kg]	6.342E+02	6.502E+02	8.902E+02	9.222E+02
cgy[m]	1.002E+00	1.067E+00	8.866E-01	9.437E-01
cgx[m]	5.000E-01	5.000E-01	5.000E-01	5.000E-01
RbxF[N]	8.333E+02	7.692E+02	8.333E+02	7.692E+02
RbyF[N]	1.000E+03	1.000E+03	1.000E+03	1.000E+03
RtxF[N]	-8.333E+02	-7.692E+02	-8.333E+02	-7.692E+02
RbxFM[N]	3.425E+03	3.222E+03	4.471E+03	4.248E+03
RbyFM[N]	7.219E+03	7.376E+03	9.730E+03	1.004E+04
RtxFM[N]	-3.425E+03	-3.222E+03	-4.471E+03	-4.248E+03
Ixx[m^4]	1.011E+00	1.177E+00	1.168E+00	1.373E+00
Iyy[m^4]	2.801E-01	2.891E-01	3.883E-01	4.049E-01
Ixy[m^4]	3.973E-01	4.334E-01	4.933E-01	5.439E-01

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 08.10.2010

1a: Dar F_3. para que se mueva en x.

1b: Dar resultante R en x.



2a: Dar R_{ax}, R_{ay}, R_{ex}, R_{ey}

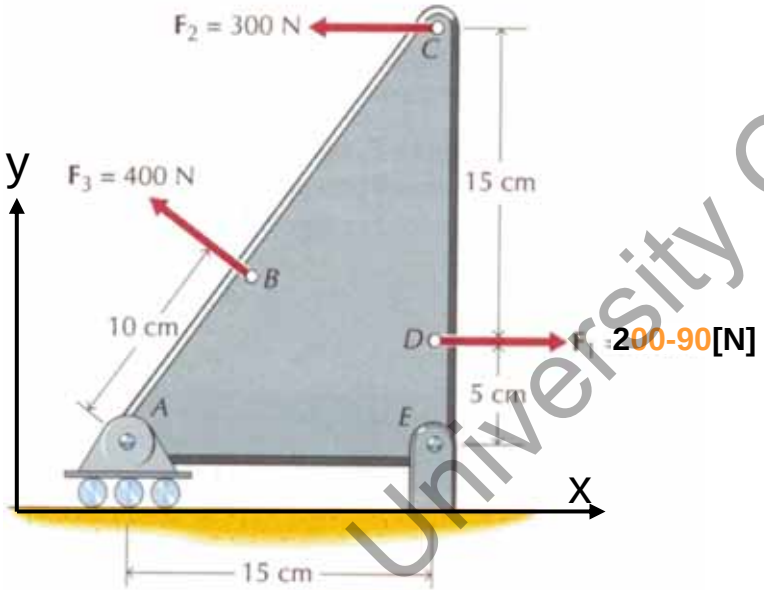
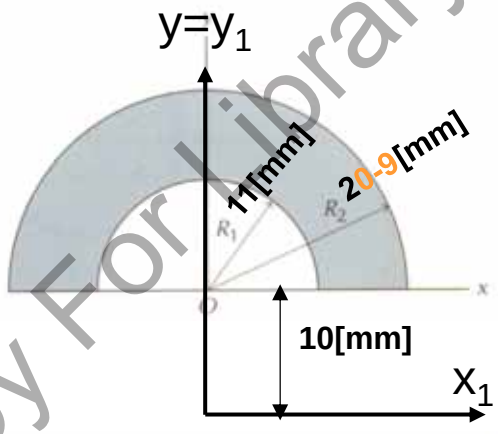


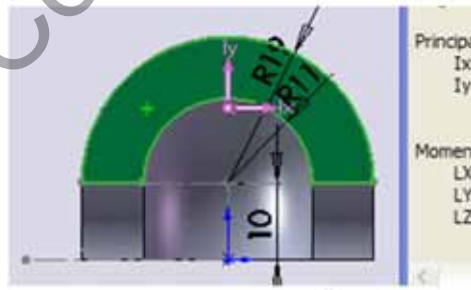
Figura P4-7

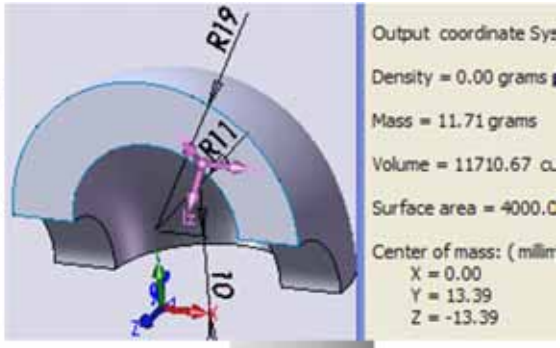
3a: Dar coordenadas x_1,y_1 de c.g.

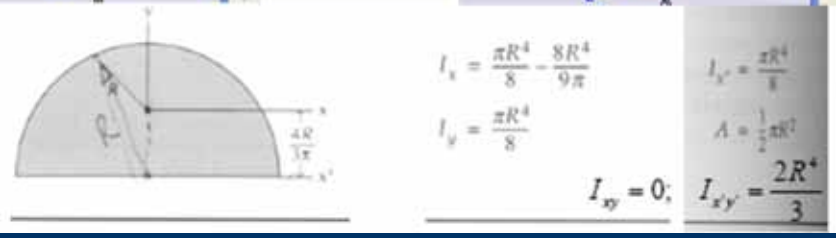
3b: Dar Ix

3c: Dar volumen de revolución de 90º respecto x_1.





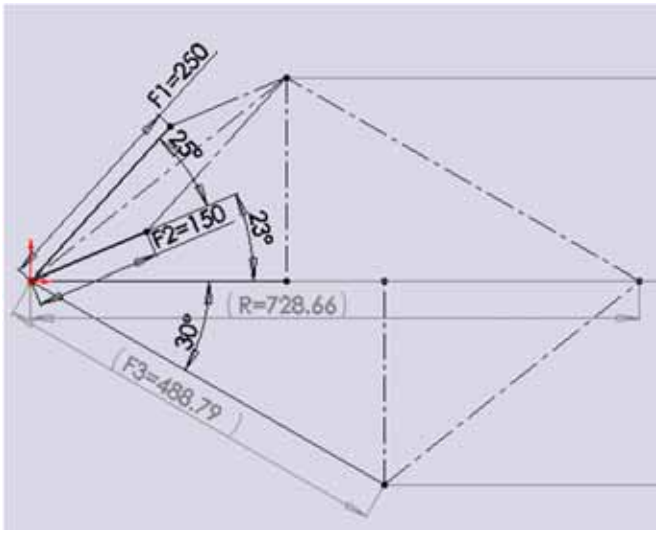


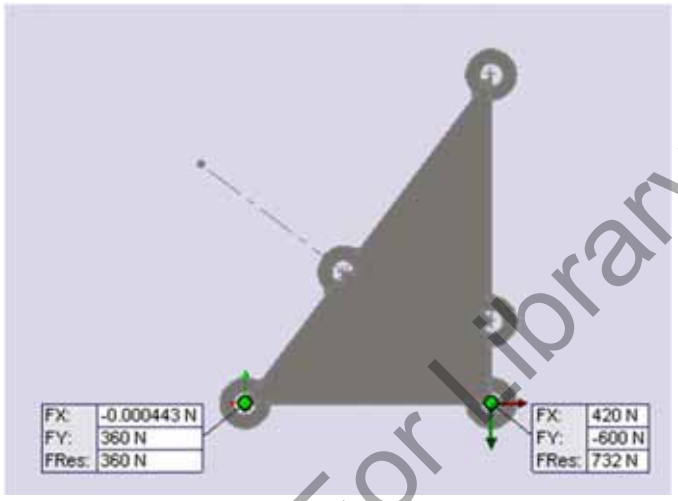


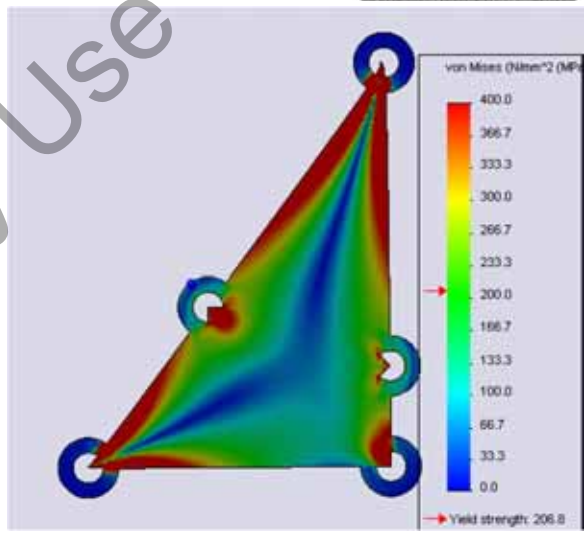
University Copy For Library Use

SOLUCIONES:

08.10.2010



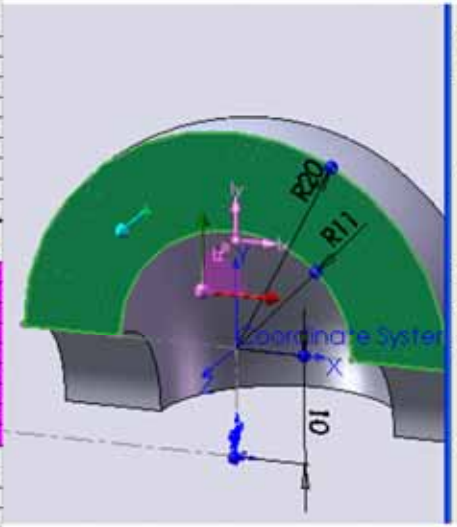




	F1[N]	a1-a2[°]	F2[N]	a2[°]	a3[°]	F3[N]	R[N]
ej1-v00	2.500E+02	2.500E+01	1.500E+02	2.300E+01	3.000E+01	4.888E+02	7.287E+02
ej1-v01	2.500E+02	2.500E+01	1.500E+02	2.300E+01	3.100E+01	4.745E+02	7.121E+02
ej1-v02	2.500E+02	2.500E+01	1.500E+02	2.300E+01	3.200E+01	4.612E+02	6.965E+02
ej1-v03	2.500E+02	2.500E+01	1.500E+02	2.300E+01	3.300E+01	4.487E+02	6.817E+02
ej1-v04	2.500E+02	2.500E+01	1.500E+02	2.300E+01	3.400E+01	4.371E+02	6.677E+02
ej1-v05	2.500E+02	2.500E+01	1.500E+02	2.300E+01	3.500E+01	4.261E+02	6.544E+02
ej1-v06	2.500E+02	2.500E+01	1.500E+02	2.300E+01	3.600E+01	4.158E+02	6.417E+02
ej1-v07	2.500E+02	2.500E+01	1.500E+02	2.300E+01	3.700E+01	4.061E+02	6.297E+02
ej1-v08	2.500E+02	2.500E+01	1.500E+02	2.300E+01	3.800E+01	3.970E+02	6.182E+02
ej1-v09	2.500E+02	2.500E+01	1.500E+02	2.300E+01	3.900E+01	3.883E+02	6.072E+02

	F1[N]	d1[cm]	F2[N]	d2[cm]	F3[N]	d3[cm]	dAE[cm]	Ex[N]	Ey[N]	Ay[N]
ej2-v00	2.000E+02	5.000E+00	3.000E+02	2.000E+01	4.000E+02	1.000E+01	1.500E+01	4.200E+02	-6.000E+02	3.600E+02
ej2-v01	2.100E+02	5.000E+00	3.000E+02	2.000E+01	4.000E+02	1.000E+01	1.500E+01	4.100E+02	-5.967E+02	3.567E+02
ej2-v02	2.200E+02	5.000E+00	3.000E+02	2.000E+01	4.000E+02	1.000E+01	1.500E+01	4.000E+02	-5.933E+02	3.533E+02
ej2-v03	2.300E+02	5.000E+00	3.000E+02	2.000E+01	4.000E+02	1.000E+01	1.500E+01	3.900E+02	-5.900E+02	3.500E+02
ej2-v04	2.400E+02	5.000E+00	3.000E+02	2.000E+01	4.000E+02	1.000E+01	1.500E+01	3.800E+02	-5.867E+02	3.467E+02
ej2-v05	2.500E+02	5.000E+00	3.000E+02	2.000E+01	4.000E+02	1.000E+01	1.500E+01	3.700E+02	-5.833E+02	3.433E+02
ej2-v06	2.600E+02	5.000E+00	3.000E+02	2.000E+01	4.000E+02	1.000E+01	1.500E+01	3.600E+02	-5.800E+02	3.400E+02
ej2-v07	2.700E+02	5.000E+00	3.000E+02	2.000E+01	4.000E+02	1.000E+01	1.500E+01	3.500E+02	-5.767E+02	3.367E+02
ej2-v08	2.800E+02	5.000E+00	3.000E+02	2.000E+01	4.000E+02	1.000E+01	1.500E+01	3.400E+02	-5.733E+02	3.333E+02
ej2-v09	2.900E+02	5.000E+00	3.000E+02	2.000E+01	4.000E+02	1.000E+01	1.500E+01	3.300E+02	-5.700E+02	3.300E+02

	R1[mm]	R2[mm]	d[mm]	ang[rad]	ycg[mm]	A[mm2]	Ix[mm4]	V[mm3]
ej3-v00	1.100E+01	2.000E+01	1.000E+01	1.571E+00	2.014E+01	4.383E+02	5.708E+04	1.387E+04
ej3-v01	1.100E+01	2.100E+01	1.000E+01	1.571E+00	2.052E+01	5.027E+02	7.062E+04	1.620E+04
ej3-v02	1.100E+01	2.200E+01	1.000E+01	1.571E+00	2.095E+01	5.702E+02	8.624E+04	1.871E+04
ej3-v03	1.100E+01	2.300E+01	1.000E+01	1.571E+00	2.127E+01	6.409E+02	1.041E+05	2.141E+04
ej3-v04	1.100E+01	2.400E+01	1.000E+01	1.571E+00	2.165E+01	7.147E+02	1.241E+05	2.431E+04
ej3-v05	1.100E+01	2.500E+01	1.000E+01	1.571E+00	2.204E+01	7.917E+02	1.476E+05	2.740E+04
ej3-v06	1.100E+01	2.600E+01	1.000E+01	1.571E+00	2.242E+01	8.718E+02	1.737E+05	3.071E+04
ej3-v07	1.100E+01	2.700E+01	1.000E+01	1.571E+00	2.281E+01	9.550E+02	2.029E+05	3.422E+04
ej3-v08	1.100E+01	2.800E+01	1.000E+01	1.571E+00	2.320E+01	1.041E+03	2.356E+05	3.795E+04
ej3-v09	1.100E+01	2.900E+01	1.000E+01	1.571E+00	2.359E+01	1.131E+03	2.720E+05	4.191E+04



Area = 438.25 millimeters^2

Centroid relative to output coordinate system origin
X = 0.00
Y = 10.14
Z = 0.00

Moments of inertia of the area, at the centroid: (m
Lxx = 11978.37 Lxy = 0.00
Lyx = 0.00 Lyy = 57082.35
Lzx = 0.00 Lzy = 0.00

Polar moment of inertia of the area, at the centroid

Angle between principal axes and part axes = 0.00

Principal moments of inertia of the area, at the cent
Ix = 11978.37
Iy = 57082.35

Moments of inertia of the area, at the output coord
LXX = 57082.35 LXY = 0.00
LYX = 0.00 LYY = 57082.35
LZX = -0.00 LZY = 0.00

Volume = 13867.81 cubic millimeters

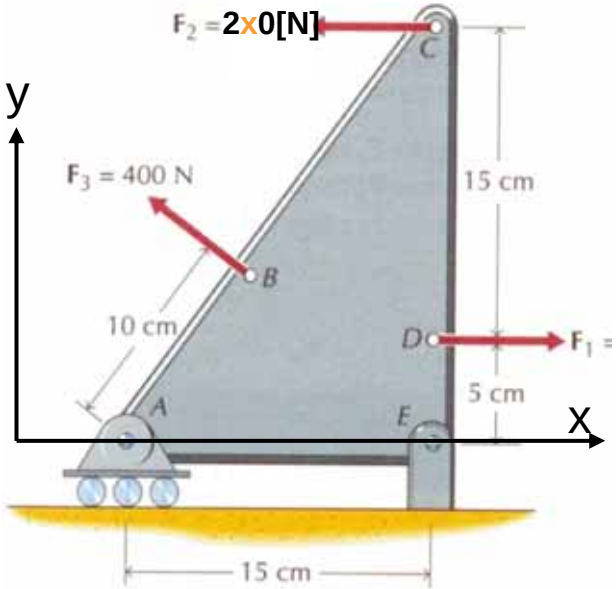
Surface area = 4325.81 square millimeters

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 04.10.2011

1a: Calcular F_{1max} para que no vuelque

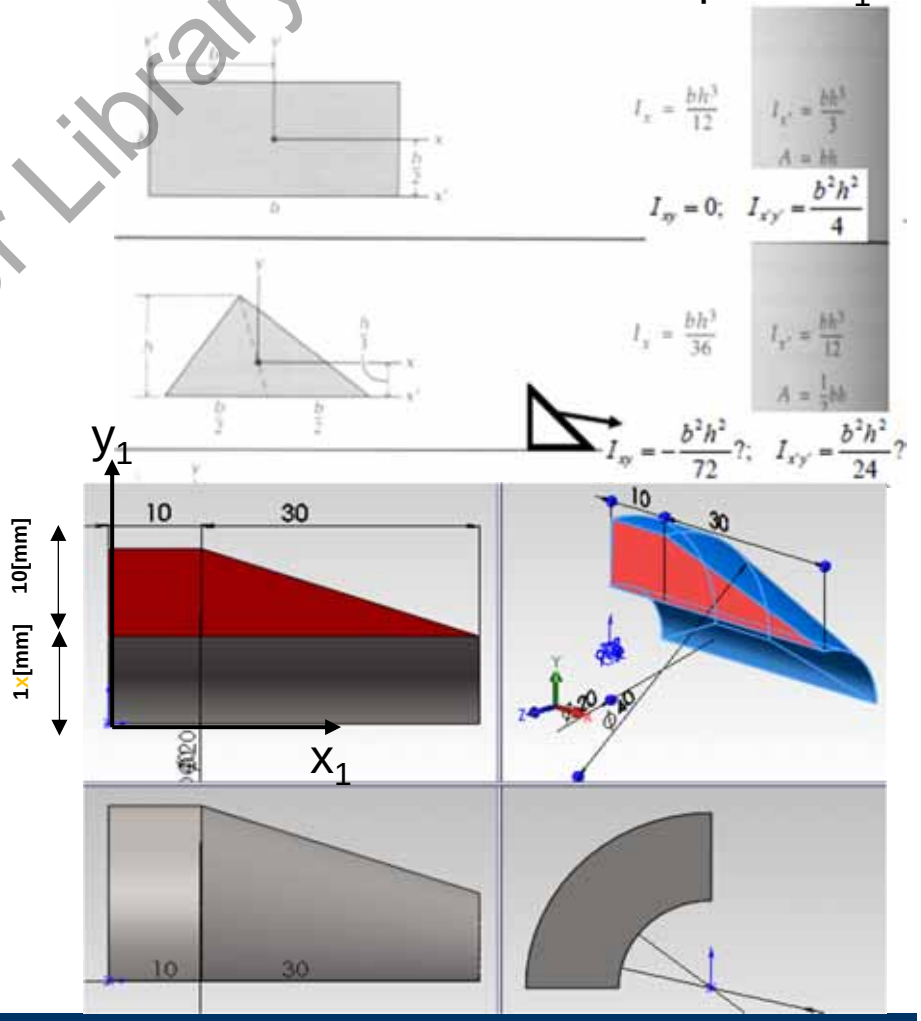
1b: Si $F_1=F_2$ dar reacciones R_{ax}, R_{ay}, R_{ex}, R_{ey}



2a: Dar coordenadas x_1,y_1 de centroide sección

2b: Dar I_{x1} de sección

2c: Dar volumen de revolución de 90º respecto x_1.



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 04.10.2011

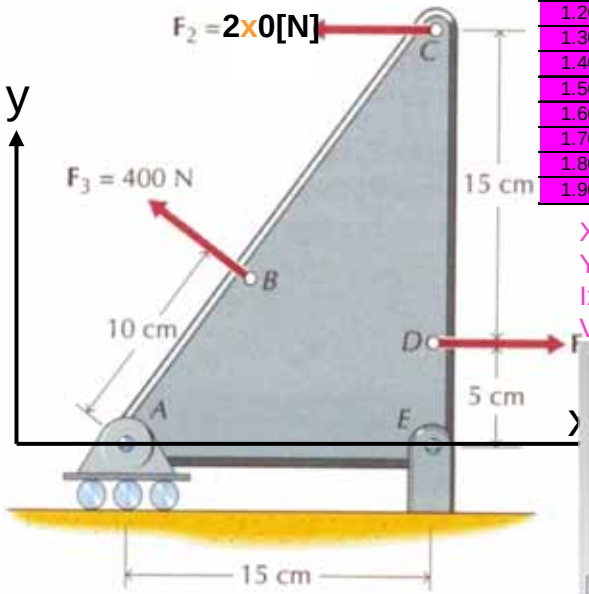
1a: Calcular F_{1max} para que no vuelque

1b: Si $F_1=F_2$ dar reacciones R_{ax}, R_{ay}, R_{ex}, R_{ey}

2a: Dar coordenadas x_1,y_1 de centroide sección

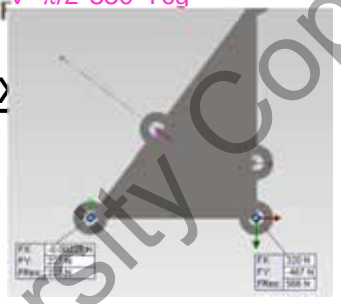
2b: Dar I_{x1} de sección

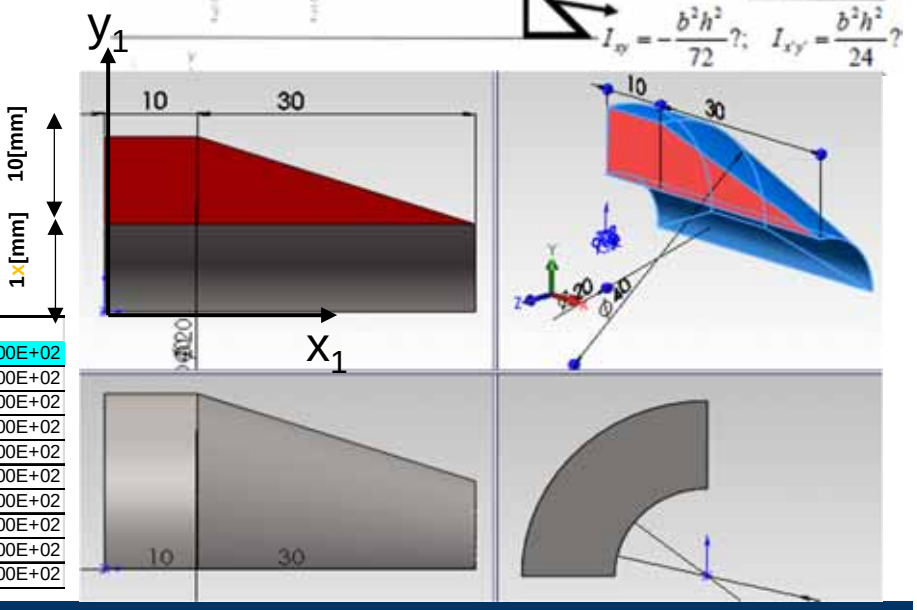
2c: Dar volumen de revolución de 90º respecto x_1.



r[mm]	xcg[mm]	ycg[mm]	Ix1[mm4]	V[mm3]
1.000E+01	1.400E+01	1.400E+01	5.083E+04	5.498E+03
1.100E+01	1.400E+01	1.500E+01	5.808E+04	5.890E+03
1.200E+01	1.400E+01	1.600E+01	6.583E+04	6.283E+03
1.300E+01	1.400E+01	1.700E+01	7.408E+04	6.676E+03
1.400E+01	1.400E+01	1.800E+01	8.283E+04	7.069E+03
1.500E+01	1.400E+01	1.900E+01	9.208E+04	7.461E+03
1.600E+01	1.400E+01	2.000E+01	1.018E+05	7.854E+03
1.700E+01	1.400E+01	2.100E+01	1.121E+05	8.247E+03
1.800E+01	1.400E+01	2.200E+01	1.228E+05	8.639E+03
1.900E+01	1.400E+01	2.300E+01	1.341E+05	9.032E+03

Xcg=(100*5+150*20)/350
Ycg=((1x+5)*100+(1x+10/3)*150)/350
Ix=10*10^3/12+(1x+5)^2*100+30*10^3/36+(1x+10/3)^2*150
V=π/2*350*Ycg





F2[N]	F1max[N]	Ay[N]	Ey[N]	Ex[N]
2.000E+02	8.800E+02	2.267E+02	-4.667E+02	3.200E+02
2.100E+02	9.200E+02	2.367E+02	-4.767E+02	3.200E+02
2.200E+02	9.600E+02	2.467E+02	-4.867E+02	3.200E+02
2.300E+02	1.000E+03	2.567E+02	-4.967E+02	3.200E+02
2.400E+02	1.040E+03	2.667E+02	-5.067E+02	3.200E+02
2.500E+02	1.080E+03	2.767E+02	-5.167E+02	3.200E+02
2.600E+02	1.120E+03	2.867E+02	-5.267E+02	3.200E+02
2.700E+02	1.160E+03	2.967E+02	-5.367E+02	3.200E+02
2.800E+02	1.200E+03	3.067E+02	-5.467E+02	3.200E+02
2.900E+02	1.240E+03	3.167E+02	-5.567E+02	3.200E+02

F_{1max}=(2x0*20+400*0.8*10*0.8-400*0.6*(15-10*0.6))/5
Ax=0, Ex=400*0.8
Ey=(2x0*5-2x0*20-400*10)/15, Ay=-400*0.6-Ey

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 02.10.2012

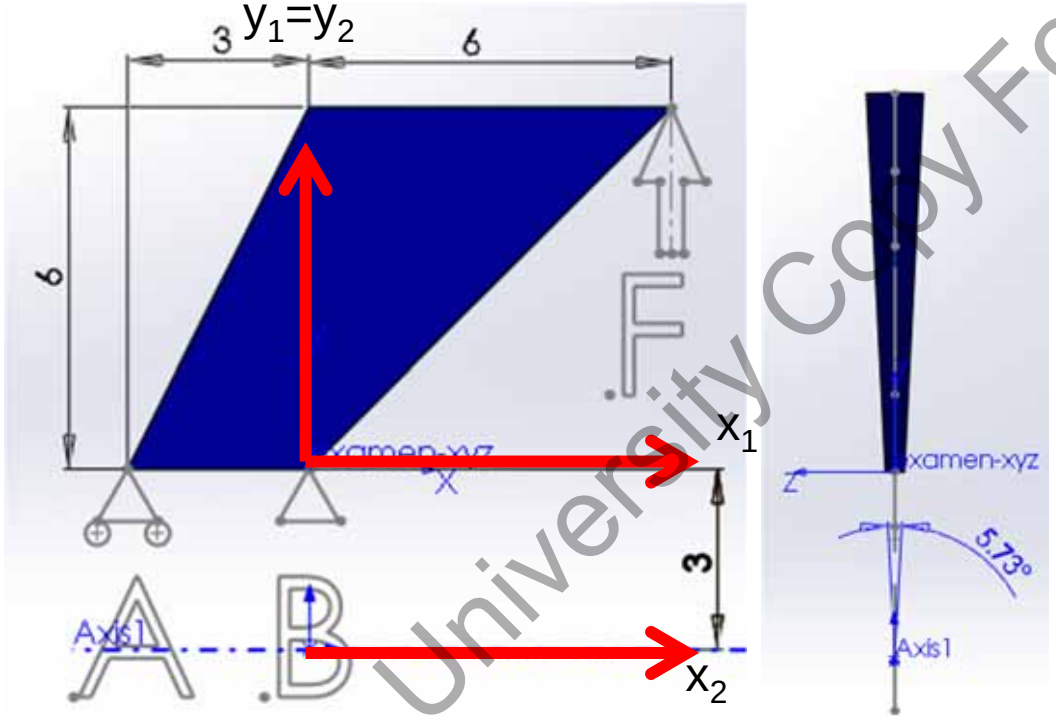
1a: Sin considerar el peso calcular reacción en A si F=1x[N].

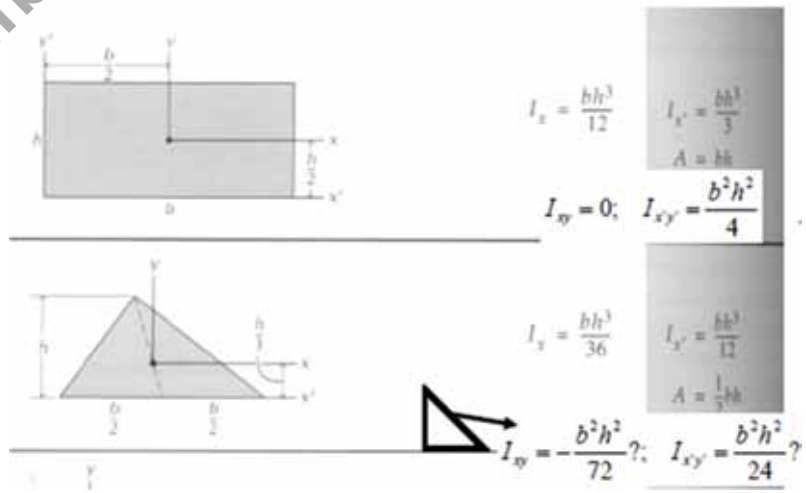
1b: Dar coordenadas x_1,y_1 de centroide sección

1c: Dar I_{x1}, I_{y1}, I_{xy1} de sección

1d: Dar volumen revolución de 0.1[rad] respecto x_2.

1e: Dar F para que no vuelque considerando g en "-y" con δ=8000[kg/m^3].



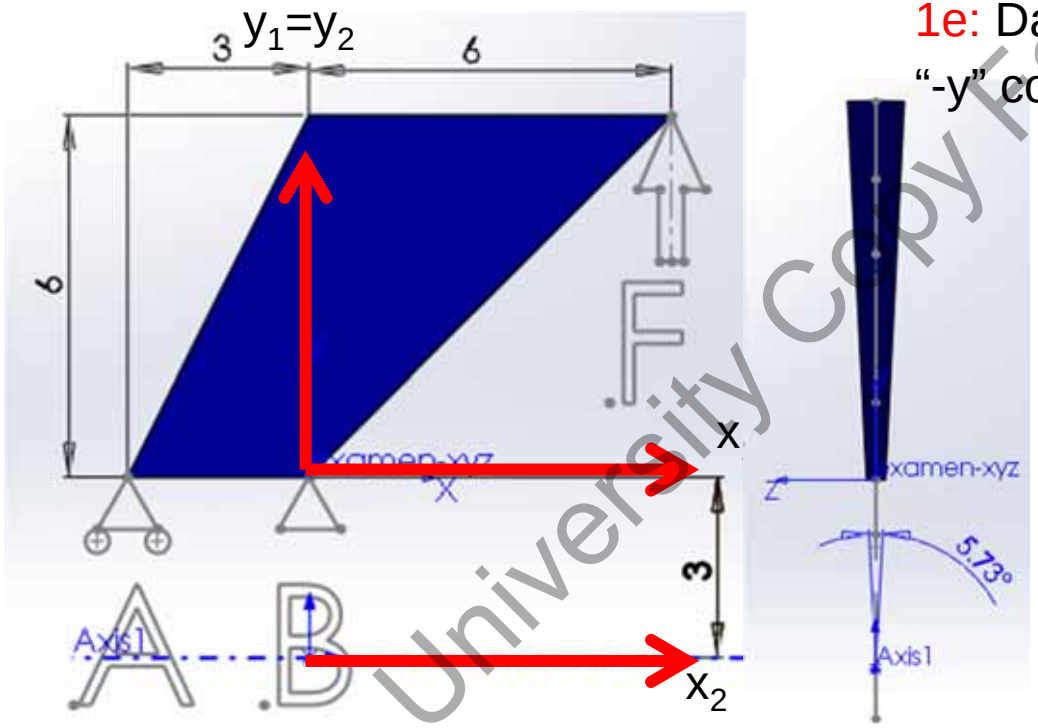


University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 02.10.2012

1a: Sin considerar el peso calcular reacción en A si F=1[N]. A=6F/3

1b: Dar coordenadas x_1,y_1 de centroide sección. x=(-1*9+2*18)/(9+18)=1[mm], y=(2*9+4*18)/(9+18)=3.333[mm]



1c: Dar I_{x1}, I_{x1}, I_{xy1} de sección

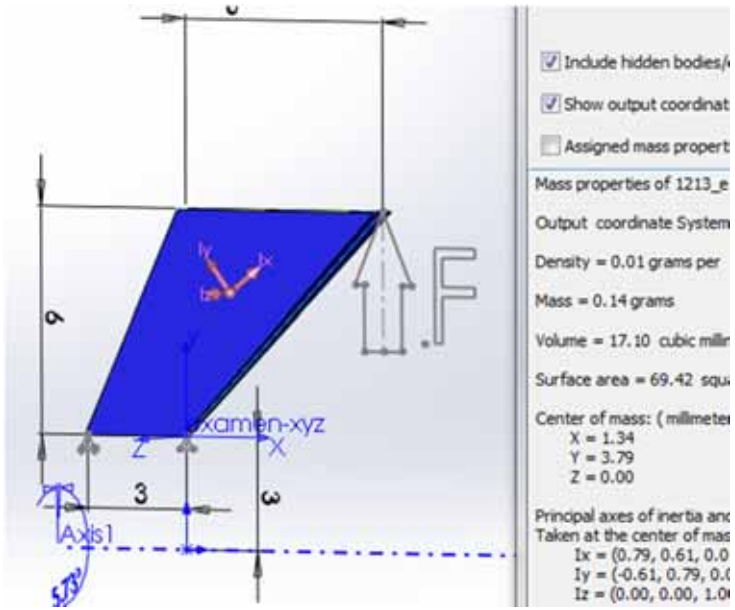
$I_{x1}=(3*6^3/36+2^2*9+6*6^3/36+4^2*18)=378[mm^4]$,

$I_{y1}=(6*3^3/36+1^2*9+6*6^3/36+2^2*18)=121.5[mm^4]$,

$I_{xy1}=(3^2*3^3/72+1*(-2)*9+3^2*6^3/72+(-2)*(-4)*18)=148.5[mm^4]$

1d: Dar volumen revolución de 0.1[rad] respecto x_2. $V=0.1*(3+3.333)*27=17.1[mm^3]$

1e: Dar F para que no vuelque considerando g en "-y" con δ=8000[kg/m^3]. $F=\delta Vgx/6=0.2236[N]$

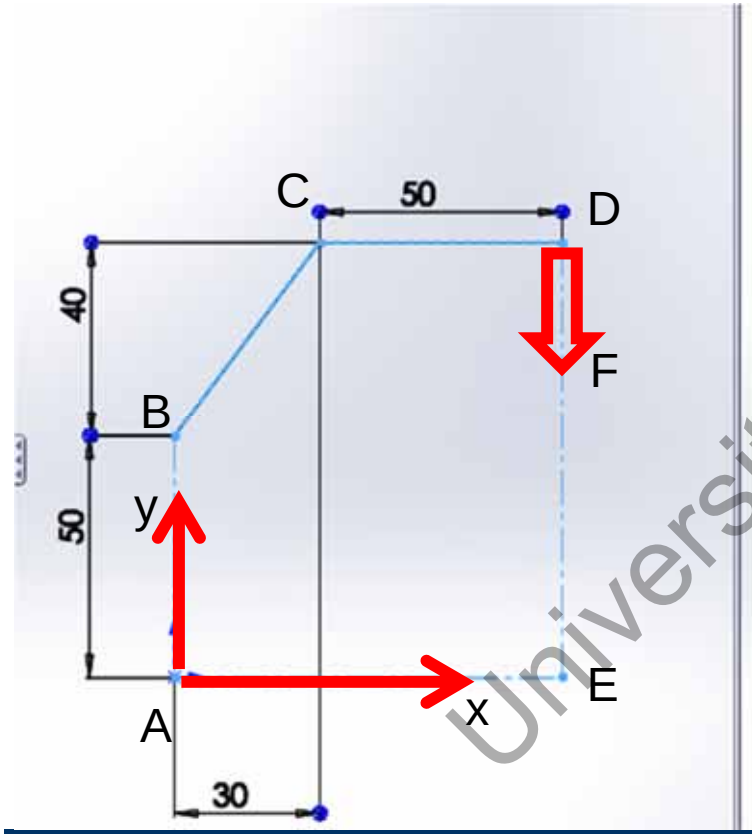


University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 04.10.2013

1a: Si empotramos en A dar reacciones si F=1x[N].

1b: Dar coordenadas x,y de centroide de línea BCD



1c: Dar x,y de centroide de sección ABCDEA

1d: Dar superficie revolución de 0.1[rad] de línea BCD respecto x.

1e: Dar volumen revolución de 0.1[rad] de sección ABCDEA respecto x.

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 04.10.2013

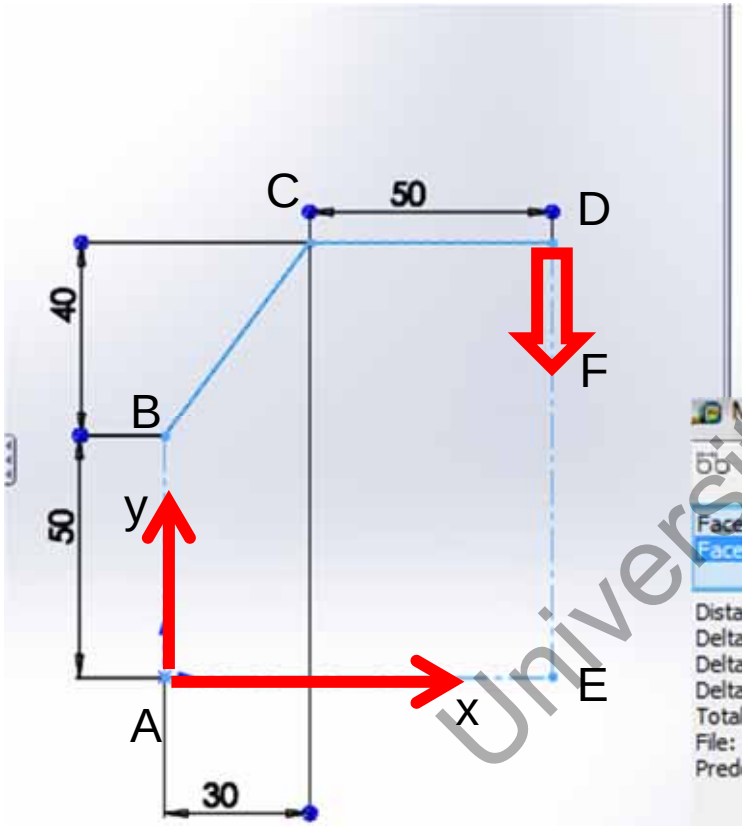
1a: Si empotramos en A dar reacciones si F=1x[N]. Ax=0,Ay=F,Amz=F*80

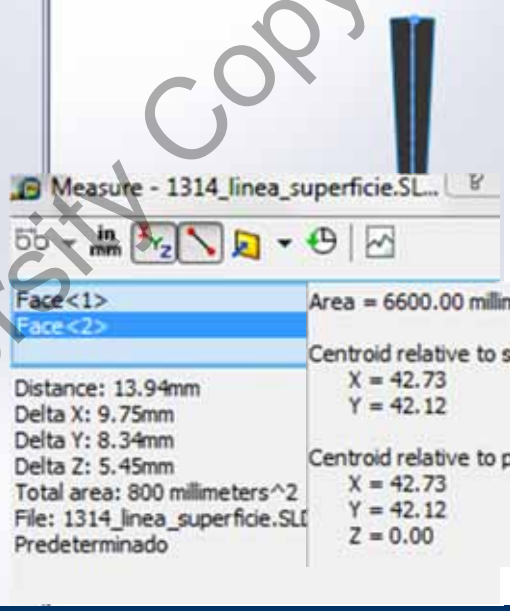
1b: Dar coordenadas x,y de centroide de línea BCD x=(15*50+55*50)/(50+50)=35[mm], y=(70*50+90*50)/(50+50)=80 [mm]

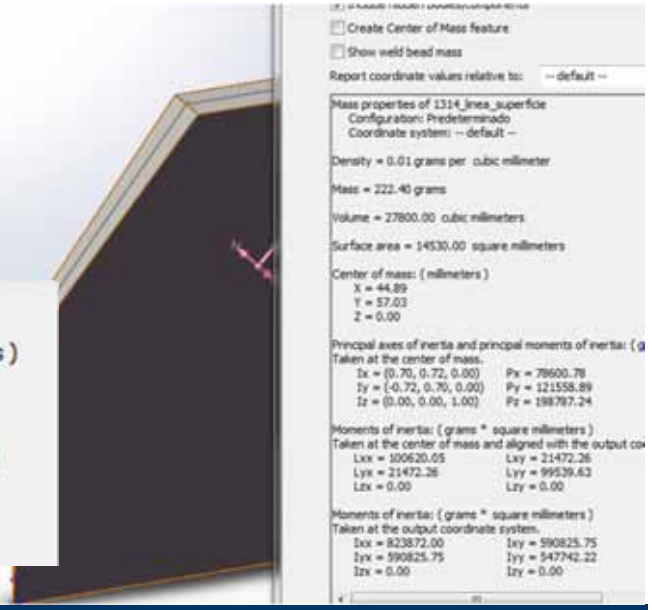
1c: Dar x,y de centroide de sección ABCDEA x=(40*90*80-(10)*40*30/2)/ (90*80-40*30/2)=282000/6600=42.73[mm], y=(45*90*80-(50+2*40/3)*40*30/2)/ (90*80-40*30/2)=278000/6600=42.12[mm],

1d: Dar superficie revolución de 0.1[rad] de línea BCD respecto x. S=0.1*80*100=800 [mm^2]

1e: Dar volumen revolución de 0.1[rad] de sección ABCDEA respecto x. V=0.1*42.12*6600=27800 [mm^3]







University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Primer control de cuatro a realizar durante el curso puntuado con 0.70 puntos de la nota final. Todos los cuatro controles suman 3.50 puntos.

University Copy For Library Use

S08t.- Cargas Distribuidas.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ...

- Repaso sesión anterior.

➢ Primer control de cuatro a realizar durante el curso.

Se dedican 20 minutos a comentar los errores observados en los controles.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos de esta sesión

➢ Comprender como se puede sustituir una fuerza distribuida a lo largo de una curva por una fuerza resultante a una distancia determinada.

➢ Comprender que la fuerza resultante es el área bajo la curva y el punto de aplicación el centroide del área bajo la curva.

➢ Calcular fuerzas resultantes y puntos de aplicación como composición de sumas y restas de figuras conocidas.

$$R = \int_L w\partial x = \int_L \partial R$$

$$\partial R = w\partial x \cong \text{Área bajo la curva}$$

$$\bar{x}R = \int x\partial R$$

$$d = \bar{x} = \frac{\int xdR}{R}$$

University Copy For Library Use

• Pasar de carga distribuida a concentrada.

Ya hemos aprendido a calcular el centro de gravedad para aplicar el peso de un sólido en dicho punto y satisfacer el mismo equilibrio de fuerzas y momentos.

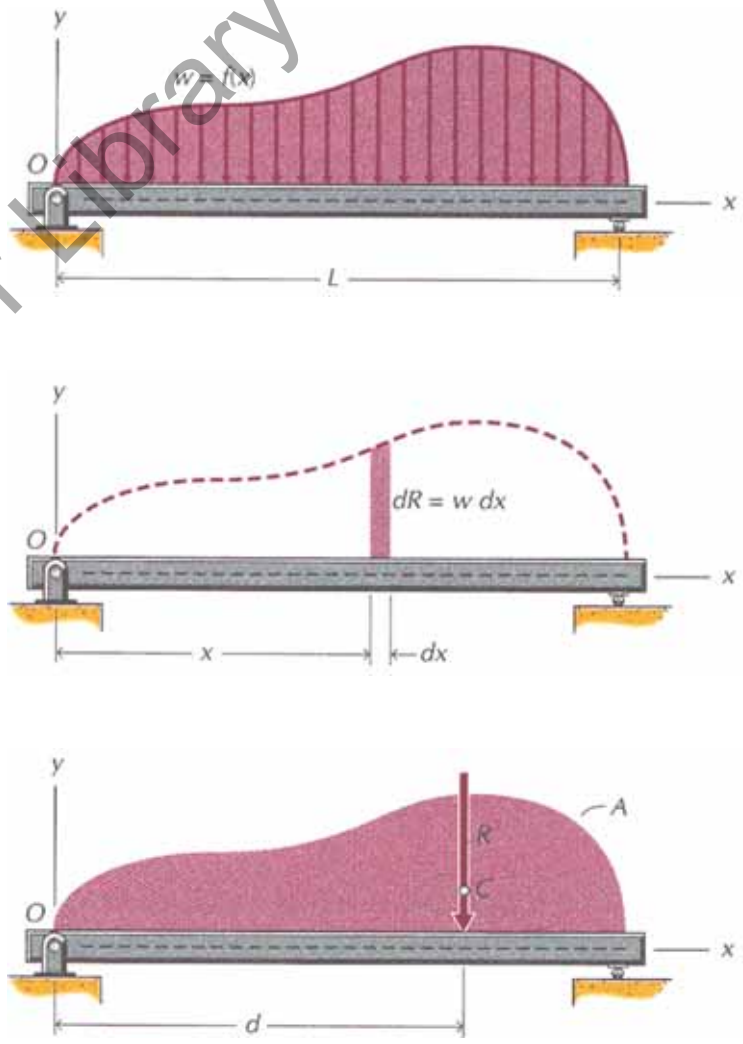
De la misma forma vamos a proceder para pasar una carga concentrada a carga aplicada en un punto.

$$R = \int_L w\partial x = \int_L \partial R$$

$$\partial R = w\partial x \cong \text{Área bajo la curva}$$

$$\bar{x}R = \int x\partial R$$

$$d = \bar{x} = \frac{\int x dR}{R}$$

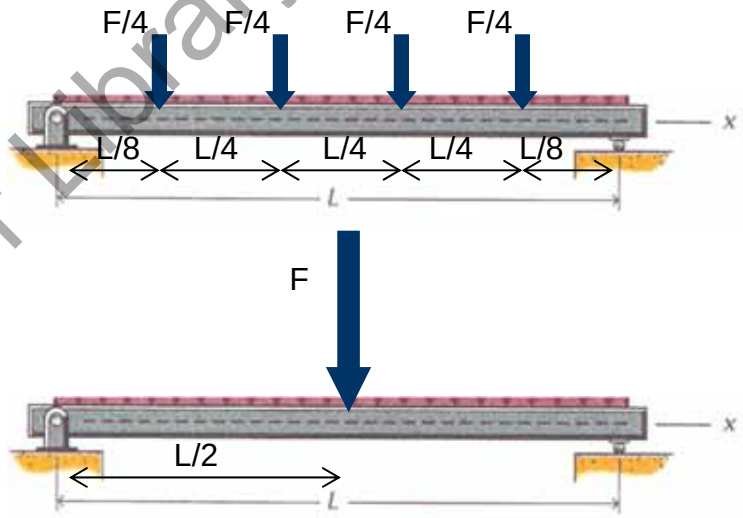


University Copy For Library Use

• Comprobación caso cuatro cargas iguales.

Vamos a calcular el equilibrio de la estructura de la figura y las reacciones en "A" y en "B" para comprobar que los dos casos son iguales.

Caso 4 cargas:



$F_{ax}=0;$

$F_{ay}+F_{by}-4*F/4=0;$

$F_{by}*L-F/4*L/8-F/4*3*L/8-F/4*5*L/8-F/4*7*L/8=0;$

$F_{by}=F/2;$

$F_{ay}=F/2;$

Caso 1 carga equivalente:

$F_{ax}=0;$

$F_{ay}+F_{by}-F=0;$

$F_{by}*L-F*L/2=0;$

$F_{by}=F/2;$

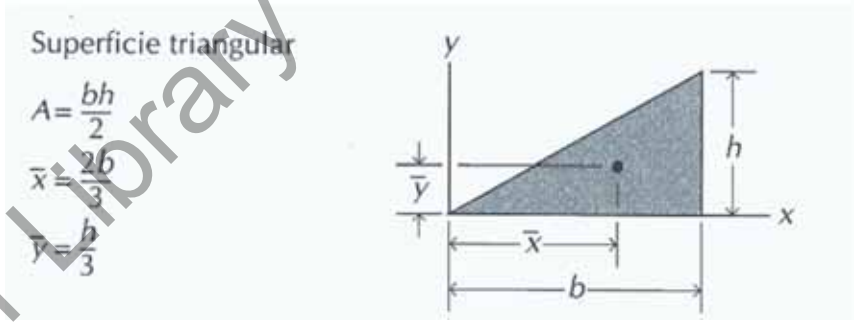
$F_{ay}=F/2;$ y por tanto demostrado es equivalente.

University Copy For Library Use

• Comprobación centroide superficie.

Vamos a comprobar que el centro de aplicación de la resultante es igual al centroide de la superficie.

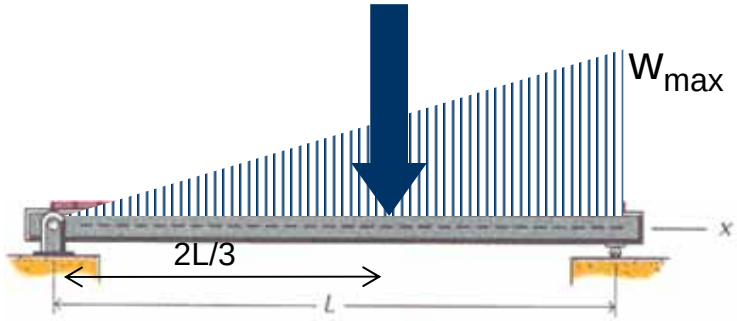
Comprobamos una carga triangular con:
$h=w_{max}$, $b=L$, $w=w_{max}*x/L$



$$R=\int_L w\partial x=\int_L w_{\max}\left(\frac{x}{L}\right)=\left[w_{\max}\left(\frac{x^2}{2L}\right)\right]_0^L=\frac{L}{2}w_{\max}=\frac{bh}{2}=A_{triangulo}$$

Seguidamente se calcula el centro de aplicación de esta carga:

$$\bar{x}=\frac{\int xdR}{R}=\frac{\int_L w_{\max}\left(\frac{x^2}{L}\right)\partial x}{\frac{L}{2}w_{\max}}=\frac{w_{\max}\left[\left(\frac{x^3}{3L}\right)\right]_0^L}{\frac{L}{2}w_{\max}}=\frac{2L}{3}=\frac{2b}{3}$$



University Copy For Library Use

• Ejemplo de paso de distribuida a concentrada.

En la imagen se ve un ejemplo de paso de carga concentrada a carga distribuida.

Primero dividimos la carga en tres tramos que consideramos fáciles de integrar o sacar por tablas (dos triangulares y una constante).

F_1=1/2*300[N/m]*2[m]=300[N]

F_2=300[N/m]*6[m]=1800[N]

F_3=1/2*300[N/m]*4[m]=600[N]

Calculamos el centro de aplicación de cada carga.

x_1=2/3*2[m]=1.333[m]

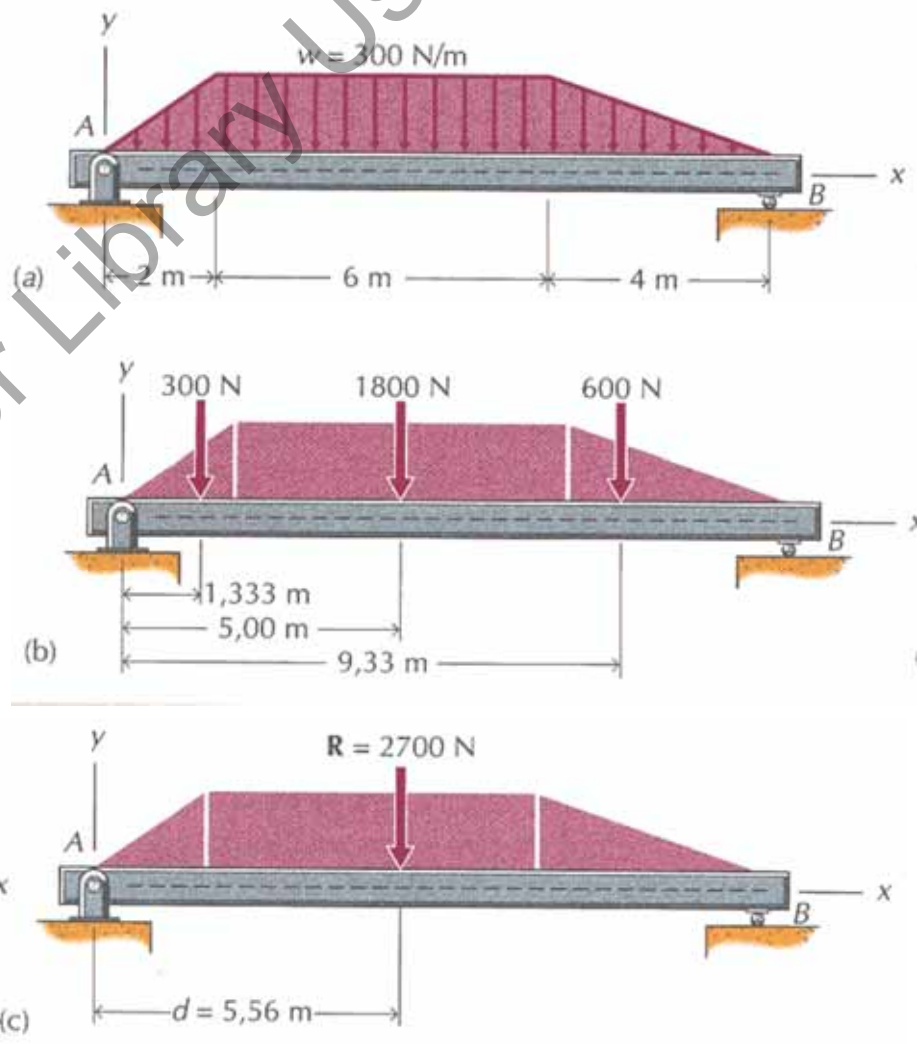
x_2=(2+3)[m]=5.000[m]

x_3=(2+6+1/3*4)[m]=9.333[m]

Calculamos resultante y posición.

R=300+1800+600=2700[N]

x=(1.333*300+5*1800+9.33*600)/2700=5.556[m]



University Copy For Library Use

• Comprobación del ejemplo.

Para comprobar que las cargas son equivalentes vamos a calcular las reacciones en "A" y "B" para tres cargas y para una carga resultante.

Con tres cargas:

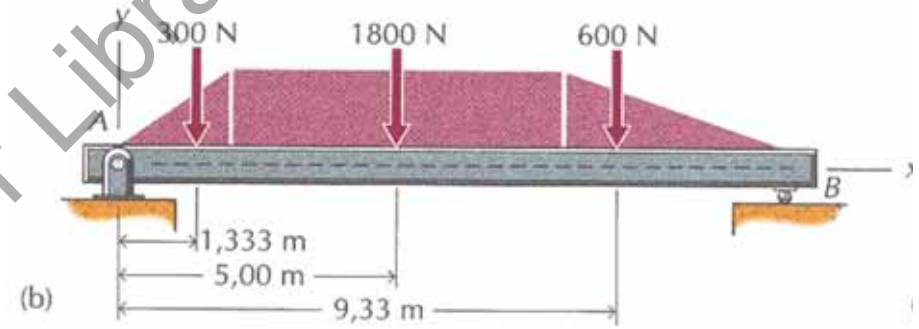
$F_{ax}=0;$

$F_{ay}+F_{by}-300-1800-600=0;$

$-300*1.333-1800*5.000-600*9.333+F_{by}*12.000=0$

$F_{by}=1250[N];$

$F_{ay}=1450[N];$



Con una carga:

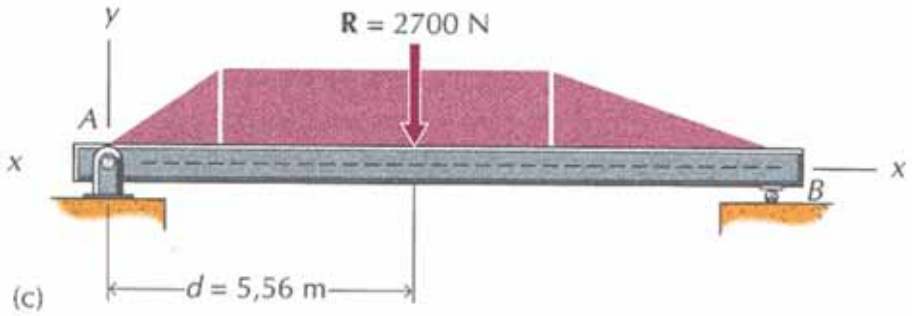
$F_{ax}=0;$

$F_{ay}+F_{by}-2700=0;$

$-2700*5.556+F_{by}*12.000=0$

$F_{by}=1250[N];$

$F_{ay}=1450[N];$



University Copy For Library Use

- Ejemplo con integración.

Si en lugar de tener formas sencillas que podemos reconocer en una tabla tenemos una carga descrita como una función la tendremos que integrar para saber la resultante e integrar la función con la distancia para saber el punto de aplicación.

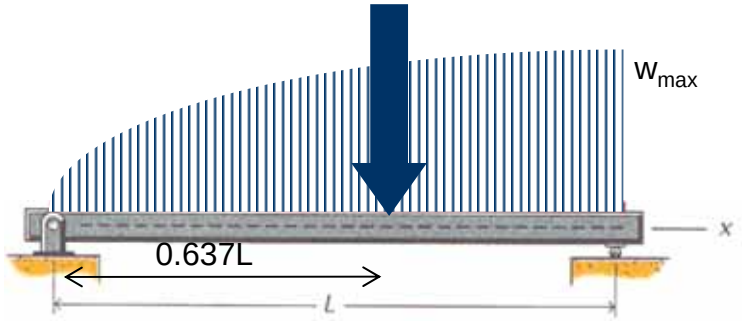
Si nos dicen que la carga es $w=w_{max}*\sin(\pi x/2L)$ entre x=0 y L podemos calcular.

$$R = \int_L w \partial x = \int_L w_{\max} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) = \left[-\frac{2L}{\pi} w_{\max} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right]_0^L = \frac{2L}{\pi} w_{\max} = 0.637 w_{\max} L$$

Seguidamente se calcula el centro de aplicación de esta carga:

$$\bar{x} = \frac{\int x dR}{R} = \frac{\int_L w_{\max} x \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \partial x}{\frac{2L}{\pi} w_{\max}} = \frac{w_{\max}\left[\frac{4L^2}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) - \frac{2L}{\pi} x \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right]_0^L}{\frac{2L}{\pi} w_{\max}} =$$

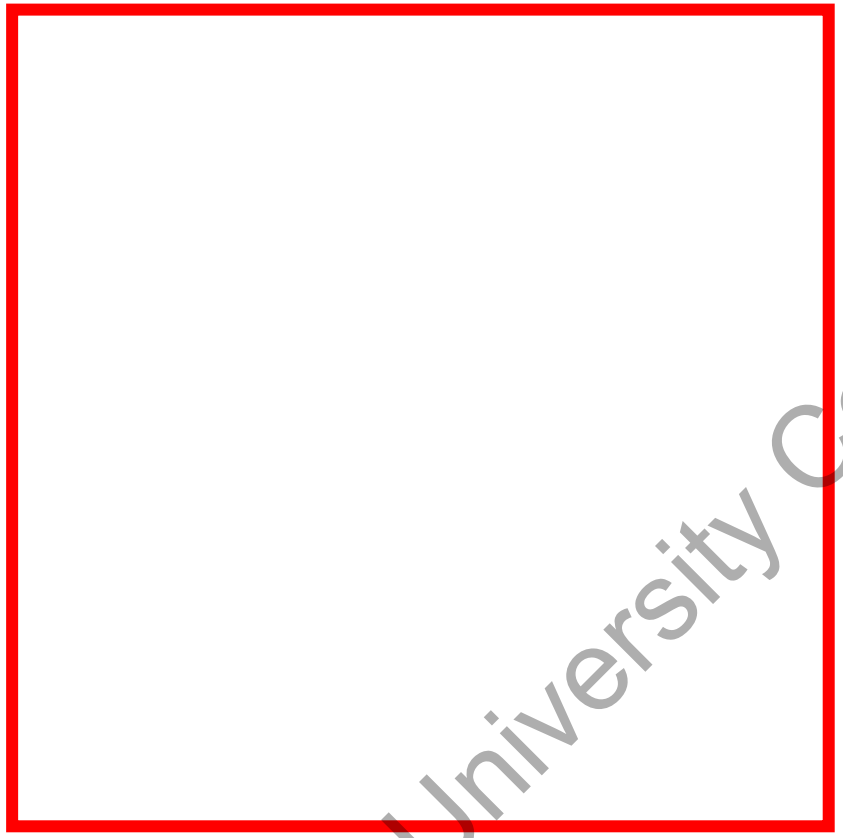
$$\frac{\frac{4L^2}{\pi^2} w_{\max}}{\frac{2L}{\pi} w_{\max}} = \frac{2L}{\pi} = 0.637L$$



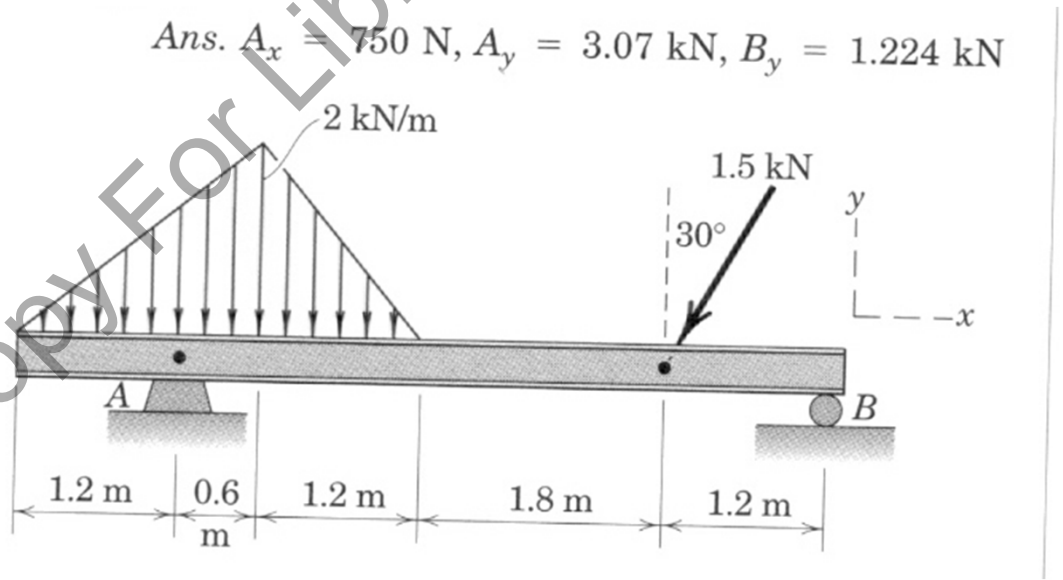
University Copy For Library Use

- Ejercicio casa de Meriam 5.99.

Determinar las reacciones en "A" y en "B" de la viga sometida a la combinación de cargas distribuidas y puntuales que muestra la figura.



Ans. $A_x = 750$ N, $A_y = 3.07$ kN, $B_y = 1.224$ kN



University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Paso de cargas distribuidas a cargas puntuales equivalentes usando tablas de areas para la carga total y centroides para punto de aplicación.

University Copy For Library Use

S09t.- Presión en Sólidos.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ...

- Repaso sesión anterior.

➢ Paso de cargas distribuidas a cargas puntuales equivalentes usando tablas de areas para la carga total y centroides para punto de aplicación.

University Copy For Library Use

• Objetivos de esta sesión

➢ Comprender la gran magnitud de fuerza aplicada que puede implicar el cálculo de una puerta sometida a la presión de un líquido.

➢ Comprender que la fuerza resultante y punto de aplicación se puede resolver de tres formas:

- o Integrando presiones sobre el área aplicada y los momentos que estas realizan sobre un punto.
- o Usando momentos de inercia para compuertas planas
- o Usando método aproximado para compuertas no planas

➢ El método interesante para reforzar a resistencia de materiales es el de compuertas planas.

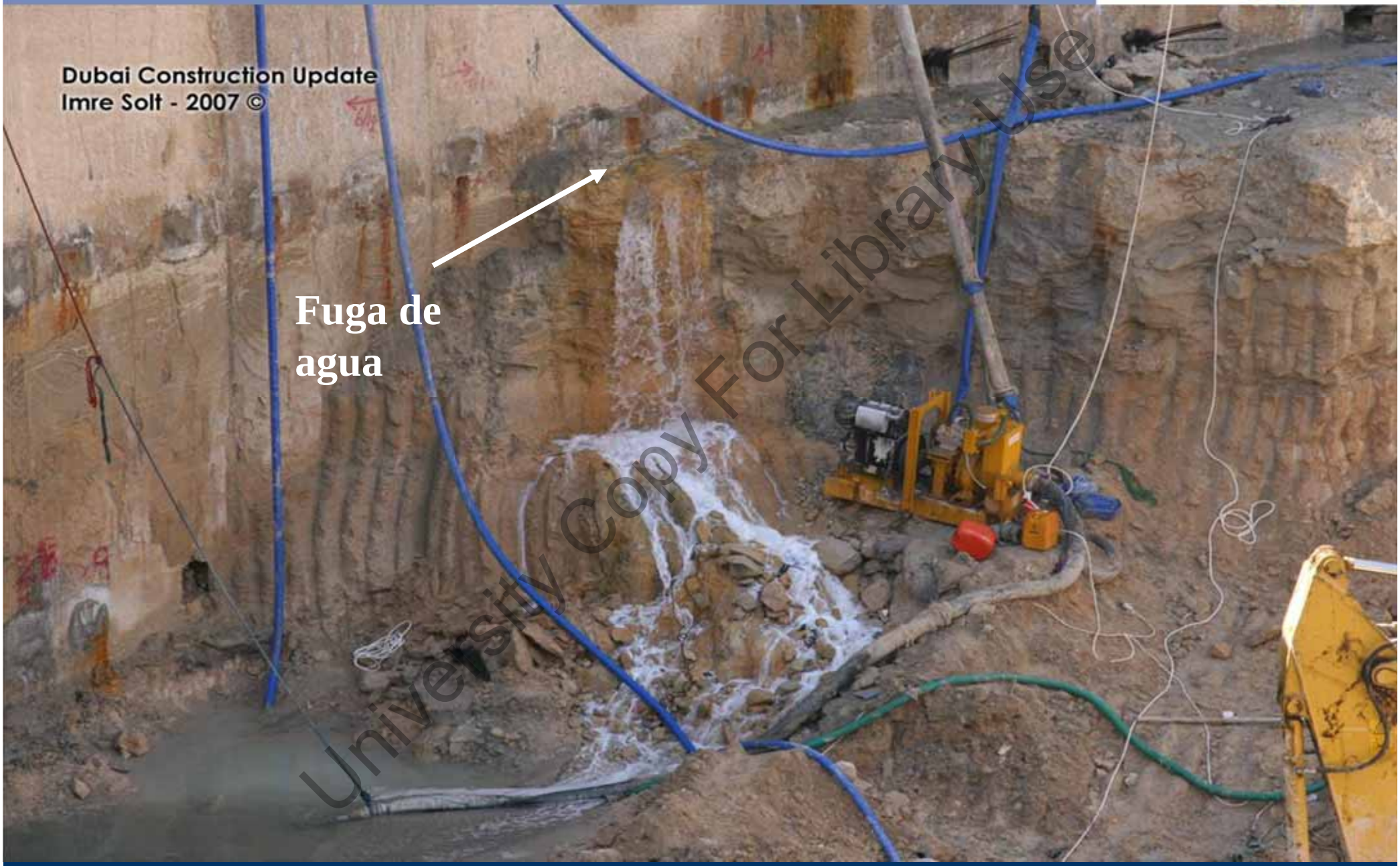
$$R = p_{\bar{y}} A = \gamma \cos(\theta) \bar{y} A$$

$$x_p = \frac{I_{xy_{\text{sup}}}}{\bar{y} \cdot A} = \bar{x} + \frac{I_{\bar{x}\bar{y}}}{\bar{y} \cdot A};$$

$$y_p = \frac{I_{x_{\text{sup}}}}{\bar{y} \cdot A} = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} \cdot A}$$

University Copy For Library Use

University Copy For Library Use



University Copy For Library Use

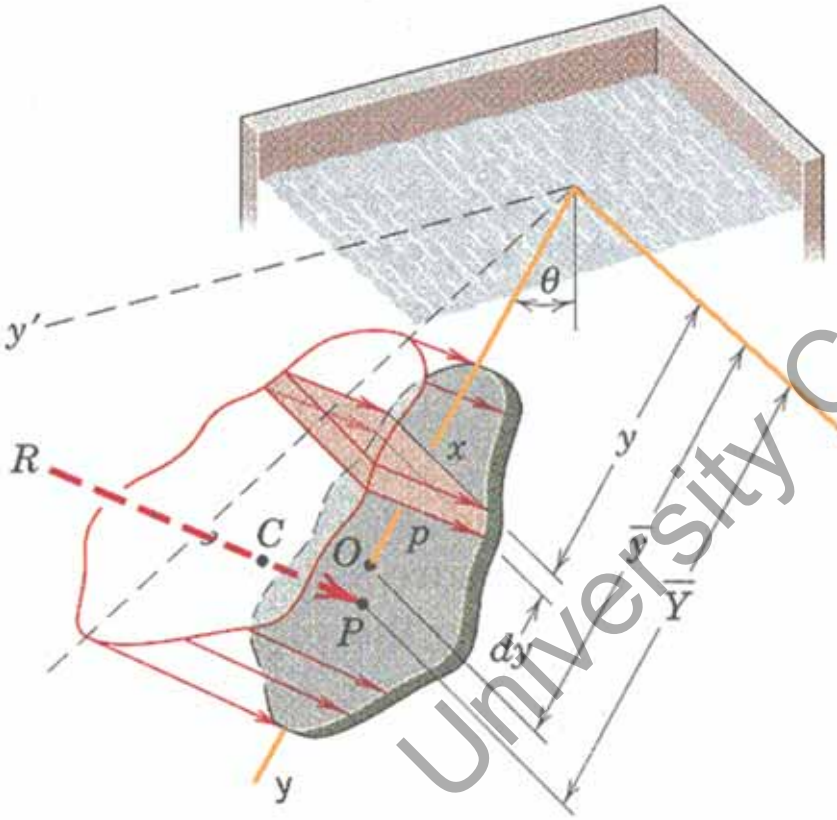
Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

University Copy For Library Use

University Copy For Library Use

• Fuerza resultante de la presión de un líquido en una superficie plana.

Ya hemos visto como calcular la resultante de una carga distribuida. Ahora analizaremos las cargas distribuidas resultantes de la presión de líquidos en superficies planas.



$$p = p_{atm} + \gamma h = p_{atm} + \rho g h \Rightarrow \Delta p = \rho g h = \gamma h$$

$$\partial R = p \partial A = \partial V_{ps};$$

$$R = \int_A p \partial A = \gamma \int_A h \partial A; \text{ pero si } y\cos(\theta) = h,\ \bar{y}A = \int_A y \partial A;$$

$$R = \gamma \cos(\theta) \bar{y} A$$

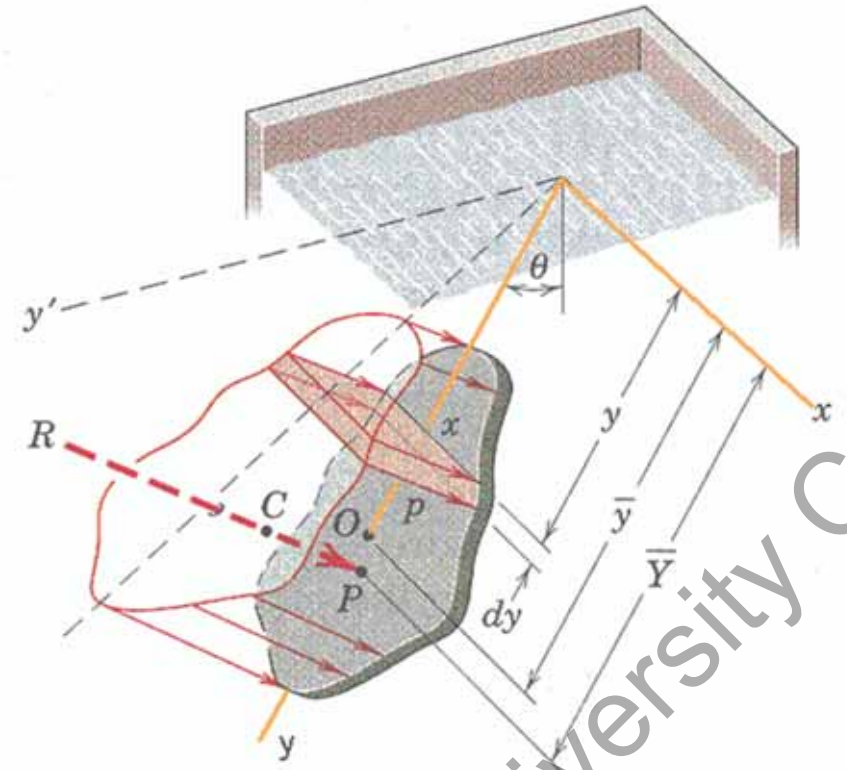
Superficie plana θ=constante

$$R = p_{\bar{y}} A = \gamma \cos(\theta) \bar{y} A$$ Donde colocarla ?

University Copy For Library Use

• Ubicación de la fuerza resultante (opción 1).

Una vez ya sabemos calcular la fuerza resultante falta saber calcular la posición donde colocarla para satisfacer equilibrio de momentos.



$$R\bar{Y} = \int y dR$$

$$\bar{Y} = \frac{\int yp\partial y}{\int p\partial y}$$

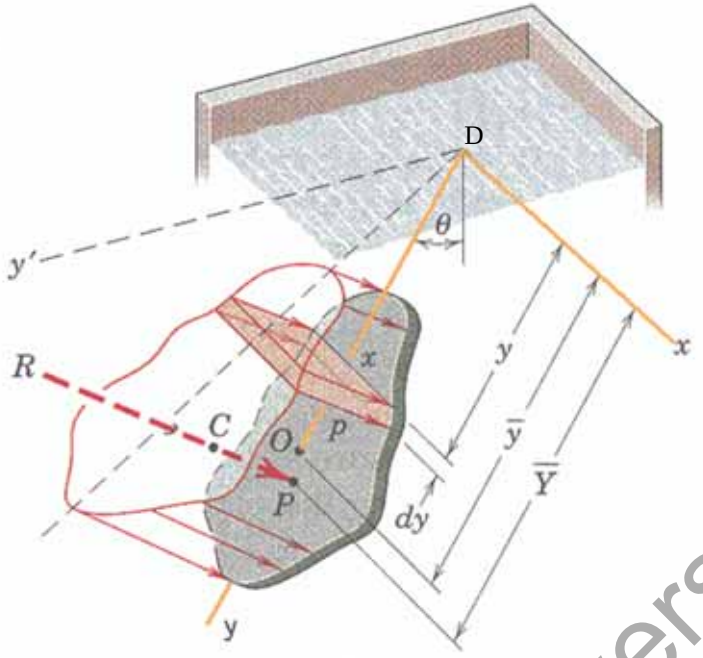
Centroide del “volumen de presiones”

R actuando en *P* hace el mismo efecto respecto de un punto que toda la presión del líquido. Generalmente *O*≠*P* pues *O* es el centroide del área mojada y *C* es el centroide del “volumen de presiones”. Por tanto, para ubicar R se ha de buscar el centroide del volumen y proyectarlo, en P, sobre el área.

University Copy For Library Use

- Ubicación de la fuerza resultante (opción 2).

Otra variante para encontrar la ubicación es encontrar el centroide "C":



$$r_{DP} \times R = \int r \times \partial R;$$

$$(x_p, y_p, 0) \times (0,0, p_{\bar{y}} \cdot A) = \int (x, y, 0) \times (0,0, p \cdot \partial A);$$

$$(y_p p_C A, -x_p p_C A, 0) = (\int yp\partial A, -\int xp\partial A, 0);$$

$$x_p = \frac{\int xp\partial A}{p_C A} = \frac{\int x(\gamma y \cos\theta)\partial A}{(\gamma \bar{y} \cos\theta)A} = \frac{\int xy\partial A}{\bar{y}A} = \frac{I_{xyD}}{\bar{y}A}$$

$$y_p = \frac{\int yp\partial A}{p_C A} = \frac{\int y(\gamma y \cos\theta)\partial A}{(\gamma \bar{y} \cos\theta)A} = \frac{\int y^2\partial A}{\bar{y}A} = \frac{I_{xD}}{\bar{y}A}$$

Aplicando Steiner

$$x_p = \frac{I_{xy_{\sup}}}{\bar{y} \cdot A} = \bar{x} + \frac{I_{\bar{x}\bar{y}}}{\bar{y} \cdot A};$$

$$y_p = \frac{I_{x_{\sup}}}{\bar{y} \cdot A} = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} \cdot A}$$

University Copy For Library Use

• Fuerza resultante de la presión de un líquido en una superficie curva (opción 3).

Al tener una superficie curva podemos calcular la superficie proyectada horizontal y vertical y dividir las fuerzas en componentes.

$$F_{1v} = p_{G1}A_h = \gamma(d-a)aL;$$

$$F_{1h} = F_{1v};$$

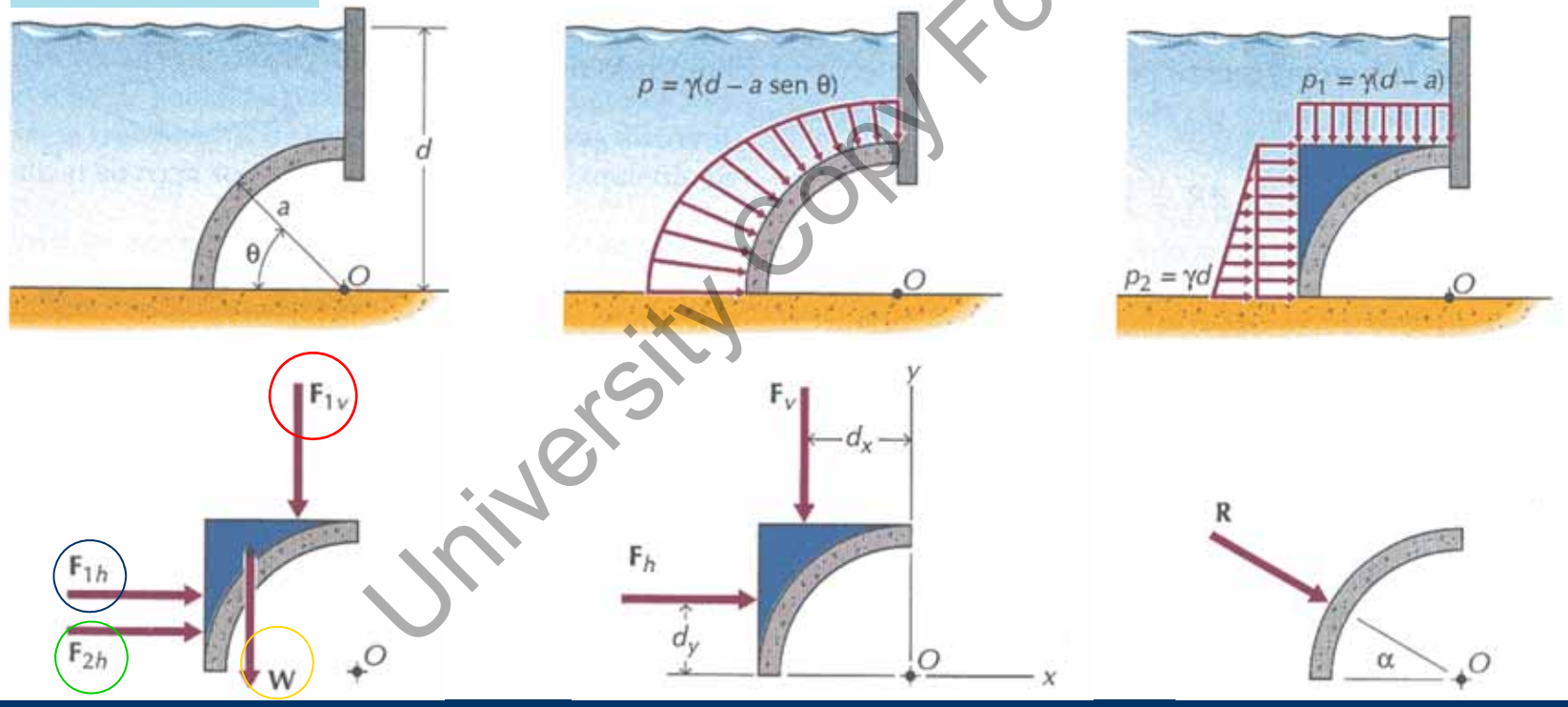
$$F_{2h} = \left(\frac{p_2 - p_1}{2}\right)A_v = \frac{\gamma a}{2}(aL);$$

$$W = \gamma V = \gamma\left(a^2 - \tfrac{1}{4}\pi a^2\right)L$$

$$R = \sqrt{F_h^2 + F_v^2};$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(F_v / F_h\right)$$

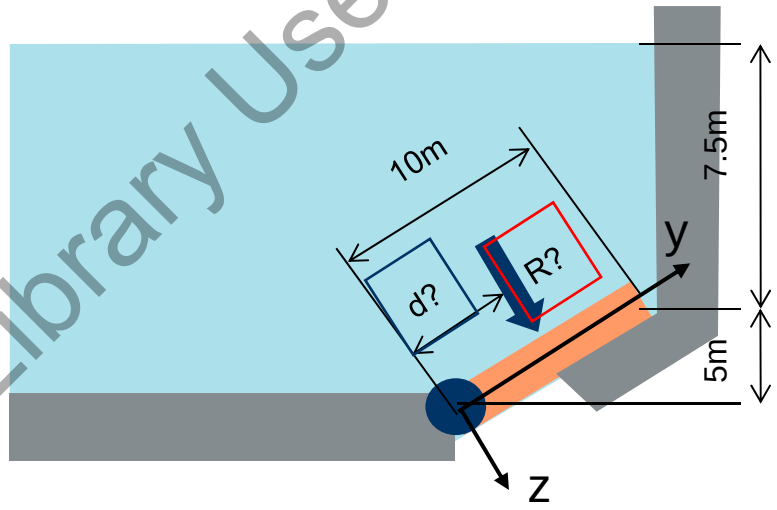
sólo para esta geometría



University Copy For Library Use

• Ejercicio 5-102 Riley. Opción 1.

Calcular la resultante y posición del centro de presión de una compuerta de ancho 4m como en la figura.



y=(12.5-h)*2; h=12.5-y/2

$$R = \int dR = \int_0^{10} pb\partial y = \rho g b \int_0^{10} (12.5 - y/2)\partial y =$$

$$\rho g b \left[12.5y - y^2/4\right]_0^{10} = 100\left[m^2\right]\rho g b =$$

$$100\left[m^2\right]1000\left[kg/m^3\right]9.807\left[m/s^2\right]4[m] = 3.923e6[N]$$

$$\bar{Y} = \frac{\int ypb\partial y}{R} = \frac{1}{R}\int_0^{10} pby\partial y = \frac{\rho g b}{R}\int_0^{10} (12.5y - y^2/2)\partial y =$$

$$\frac{\rho g b}{R}\left[12.5y^2/2 - y^3/6\right]_0^{10} = 4.583\left[m^3\right]\frac{\rho g b}{R} =$$

$$\frac{4.583\left[m^3\right]1000\left[kg/m^3\right]9.807\left[m/s^2\right]4[m]}{3.923e6[N]} = 4.583[m]$$

$$R = p_{\bar{y}} A$$

$$R\bar{Y} = \int y dR$$

$$\bar{Y} = \frac{\int yp\partial y}{\int p\partial y}$$

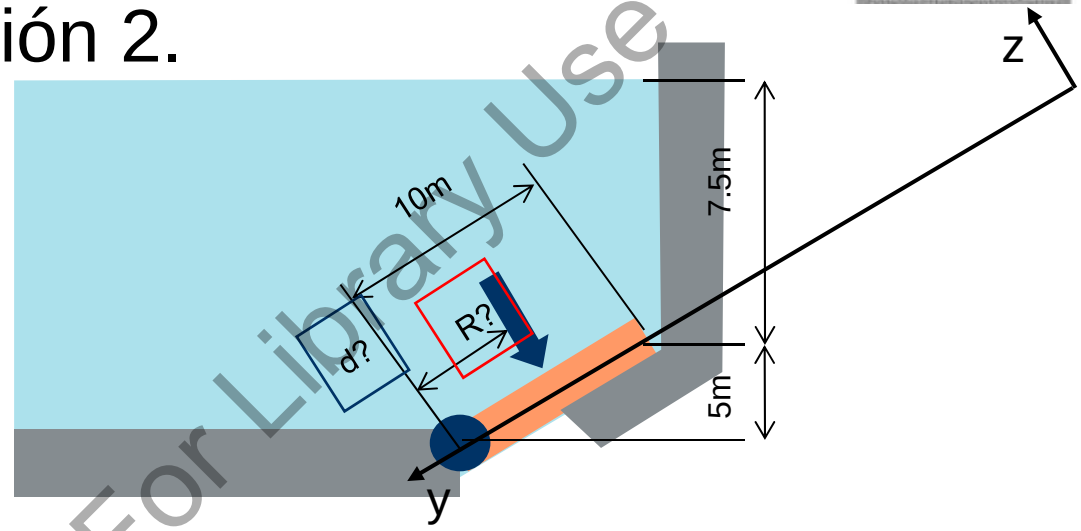
University Copy For Library Use

• Ejercicio 5-102 Riley. Opción 2.

Calcular la resultante y posición del centro de presión.

y=(h)*2; h=y/2.

La resultante se calcula como presión en centro por área compuerta.



$$R = p_{\bar{y}} A = \rho g h_{\bar{y}} bL = 1000 \cdot 9.807 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10 = 3.923e6[N]$$

$$x_p = \bar{x} + \frac{I_{\overline{xy}}}{\bar{y} \cdot A} = 0 + \frac{0}{(L/2+15) \cdot bL} = 0;$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} \cdot A} = \left(\frac{L}{2}+15\right) + \frac{bL^3/12}{(L/2+15) \cdot bL} = 20.42[m]$$

$$R = p_{\bar{y}} A$$

$$x_p = \frac{I_{xy_{\text{sup}}}}{\bar{y} \cdot A} = \bar{x} + \frac{I_{\overline{xy}}}{\bar{y} \cdot A};$$

$$y_p = \frac{I_{x_{\text{sup}}}}{\bar{y} \cdot A} = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} \cdot A}$$

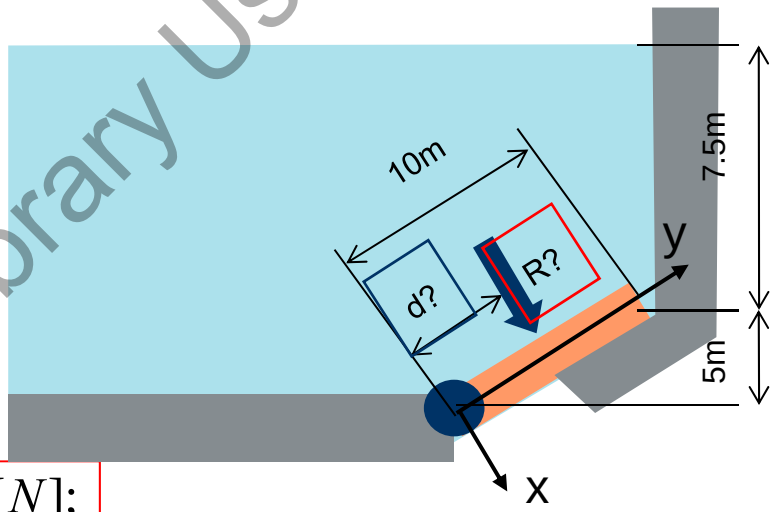
Como hay que dar desde la bisagra: y=12.5*2-20.42=4.583 que coincide con método 1.

University Copy For Library Use

• Ejercicio 5-102 Riley. Opción 3. Casa.

Calcular la resultante y posición del centro de presión.

α=arcsen(5/10)=30º



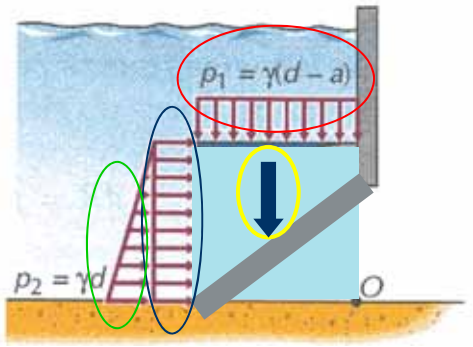
$$R = \sqrt{F_h^2 + F_v^2}; \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(F_v / F_h\right)$$

F_{1v} = [redacted] $= 2.548e6[N];$

F_{1h} = [redacted] $= 1.471e6[N];$

F_{2h} = [redacted] $= 4.903e5[N];$

W = [redacted] $= 8.493e5[N]$



R = [redacted] $3.101e6[N];$ Error respecto a 3.923e6 del 3.267%

α = [redacted] $= 60º$ Sin error respecto a 30º al considerar W vertical.

University Copy For Library Use

- Calcular reacciones en la base del muro de b=9m.

Ejercicio Riley 5.15. Usar método integral y volumen.

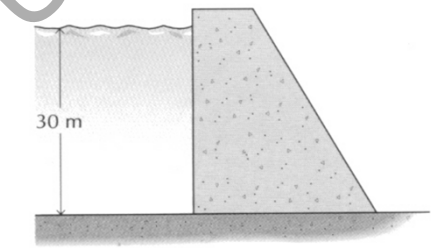
Volumen presiones:

R=1/2*(ρgh*h)*(b)=

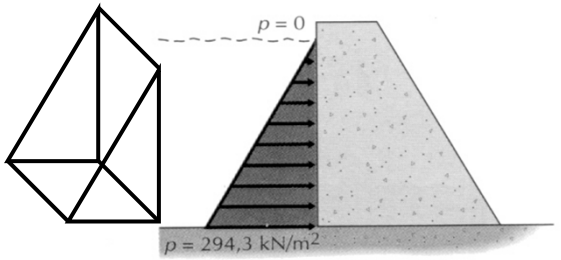
1/2*(1000[kg/m^2]*9.807[m/s^2]*30[m]*30[m])*9[m]=3.972e7[N]

Posición en centroide de triángulo a una profundidad 2h/3:

2*30/3=20[m]



(a)

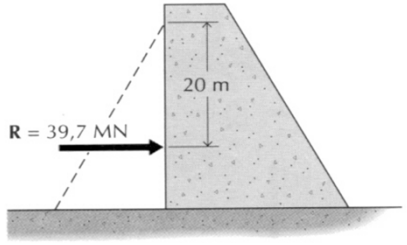


(b)

Integrando ya que la geometría lo permite:

$$R = \int_A p\partial A = \rho g \int_0^{h\max} yb\partial y = \frac{\rho g b}{2} y_{\max}^2 = 3.972\text{e}7[N]$$

$$\bar{Y} = \frac{\int_A yp\partial A}{R} = \frac{\rho g \int_0^{h\max} y^2 b\partial y}{R} = \frac{\frac{\rho g b}{3} y_{\max}^3}{\frac{\rho g b}{2} y_{\max}^2} = \frac{2}{3} y_{\max} = 20[m]$$

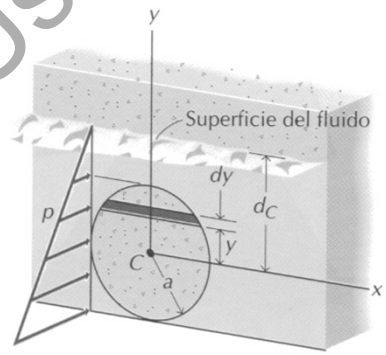


(c)

University Copy For Library Use

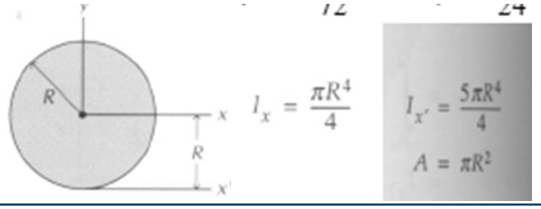
- Calcular reacciones en la compuerta circular.

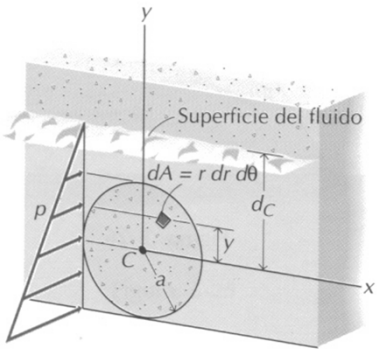
Ejercicio Riley 5.17. En libro solución integrando. Usar aquí método de momentos inercia considerando compuerta de radio "a" cuyo centro está a profundidad "d_c". Resolver para a=5m y d_c=10m.



$$R = p_{\bar{y}} A = \rho g d_c \pi a^2 = 1000 \cdot 9.807 \cdot 10 \cdot 3.142 \cdot 5^2 = 7.702e6[N]$$

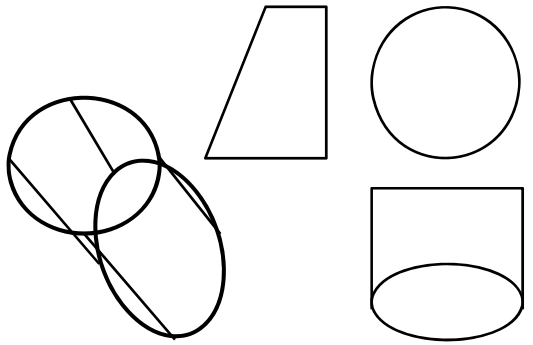
Cálculo del centro de aplicación. Al ser simétrica en "x" tan sólo calculamos la "y" pues en "x" estará centrada.





$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} \cdot A} = d_c + \frac{\pi a^4 / 4}{d_c \cdot \pi a^2} = d_c + \frac{a^2 / 4}{d_c} = 10 + \frac{5^2 / 4}{10} = 10.63[m]$$

$$x_p = \bar{x} + \frac{I_{\bar{x}\bar{y}}}{\bar{y} \cdot A} = 0 + \frac{0}{d_c} = 0[m]$$



Centroide?

University Copy For Library Use

- Calcular reacciones en la compuerta circular b=30m.

Ejercicio Meriam 5.20. Usar método aproximado por componentes.

$F_{1v} = p_{G1}A_h = 0[N];$ Ya que el radio empieza en superficie de agua

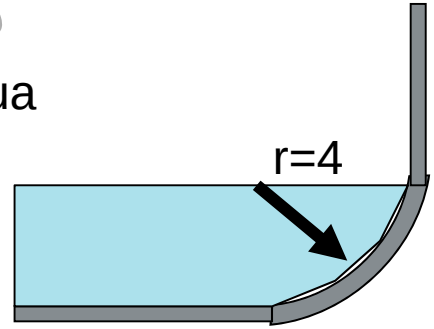
$F_{1h} = p_{G1}A_v = 0[N];$

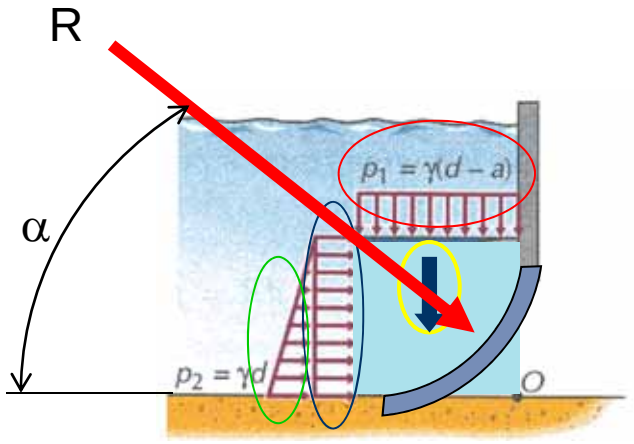
$$F_{2h} = (p_2 - p_1)\frac{A_v}{2} = \rho g \frac{(h_2 - h_1)}{2}(br) = 2.354e6[N];$$

$$W = \rho g V = \rho g b \frac{\pi r^2}{4} = 3.697e6[N]$$

$$R = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 4.383e6[N];$$

$$\alpha = \tan^{-1}(F_v / F_h) = 57.52^{\circ}$$



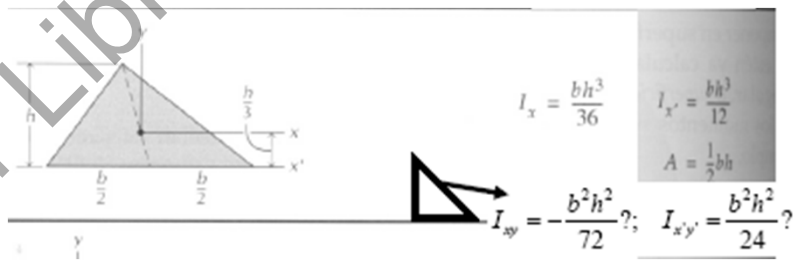


Falta saber donde se aplica la fuerza para lo que hay que hacer equilibrio de momentos.

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Riley 5.105.

Una compuerta triangular con el lado horizontal b=1.5[m] en parte superior a una profundidad d=4.5[m] y vértice en parte inferior con altura triángulo c=1.5[m] se coloca con un ángulo de 45º. Calcular fuerza total sobre la compuerta y ubicación de punto de aplicación de la fuerza.



y=h/sin(45º)=1.414*h, y_c= =6.864[m]

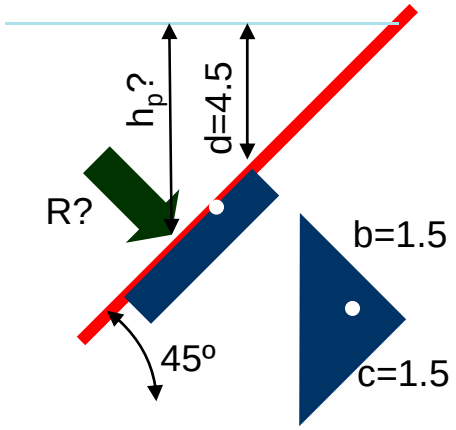
h_c= =4.854[m]

R= =53550[N]

y_p= =6.882[m]

h_p= =4.866[m]

x_p= =-0.009106[m]



En libro solución 53.5 [MN] no 53.55[kN] y

d_p=0.988 que es 4.5*1.414+1.5-4.866*1.414=0.9818[m]

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Cálculo de fuerzas y posición de fuerzas en cuerpos sumergidos usando dos métodos para figuras planas y otro aproximado para figuras curvadas.

➢ Comprobación de los métodos para una placa plana sumergida.

University Copy For Library Use

S10t.- Ejercicios Cargas Distribuidas.

Mejora 1415 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios de sólidos sometidos a presión con varios métodos de resolución.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

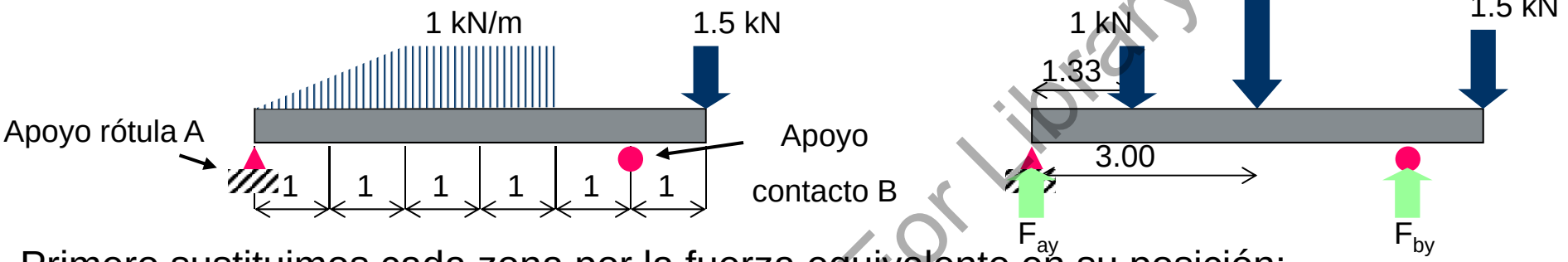
• Objetivos de esta sesión

➢ Realizar ejercicios de cálculo de fuerzas distribuidas integrando y como composición de figuras conocidas para centrar la atención en este segundo método.

University Copy For Library Use

• Ejercicio 5-15 de Meriam.

Calcular las fuerzas de reacción en los apoyos de la siguiente estructura.



Primero sustituimos cada zona por la fuerza equivalente en su posición:

La carga triangular entre 0 y 2 metros será: F_1=1/2*(2[m]*1[kN/m])=1[kN]

Colocada a 2/3*2[m]=1.333[m] de A.

La carga constante entre 2 y 4 metros será: F_2= 2[m]*1[kN/m]=2[kN]

Colocada a 2+2/2[m]=3.000[m] de A.

Solucionamos con ecuaciones de equilibrio:

Fuerzas en x: F_{ax}=0;

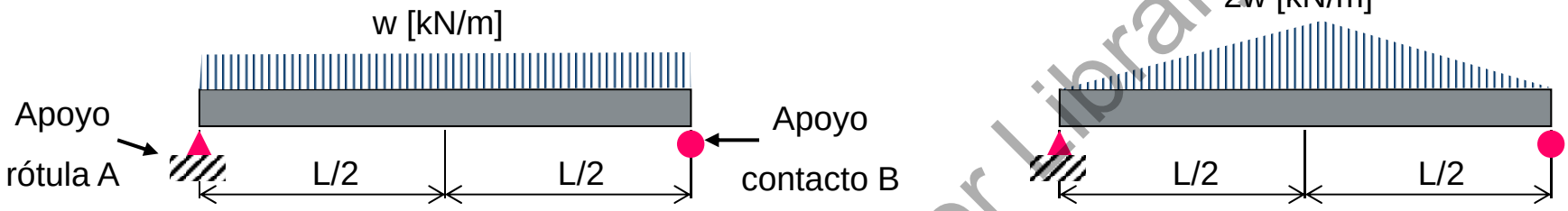
Momentos en z en apoyo A: F_{by}*5=1*1.333+2*3+1.5*6; ⇨ F_{by}=3.267 [kN]

Fuerzas en y: F_{by}+F_{ay}=1+2+1.5; ⇨ F_{ay}=1.233 [kN]

University Copy For Library Use

- Expresar las reacciones en apoyos.

Dadas las estructuras siguientes dar y comparar las reacciones en los apoyos.



Primero sustituimos cada zona por la fuerza equivalente en su posición:
La carga constante entre 0 y L metros será: F= L[m]*w[kN/m]=wL[kN]
Colocada a L/2[m] de A.

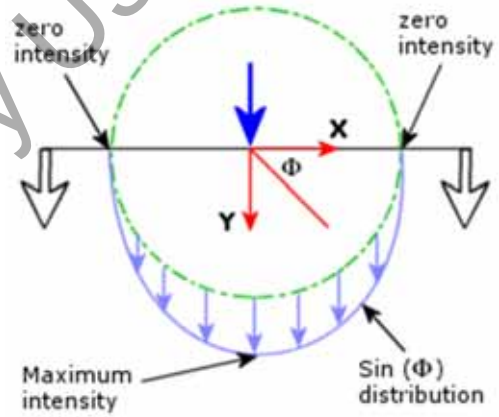
Calculamos las reacciones en A y en B son $F_{ay}=F_{by}=wL/2[kN]$.

La carga triangular entre 0 y L/2 metros será: $F_1= 1/2*L/2[m]*2w[kN/m]=wL/2[kN]$
Colocada a L/3[m] de A.
La carga triangular entre L/2 y L metros será: $F_2= 1/2*L/2[m]*2w[kN/m]=wL/2[kN]$
Colocada a 2L/3[m] de A.
La resultante es la suma de las dos cargas: $F=F_1+F_2=wL[kN]$
Para la posición: $F*x=F_1*L/3+F_2*2/3$ y por tanto colocada a L/2 de A.
Calculamos las reacciones en A y en B son $F_{ay}=F_{by}=wL/2[kN]$ como en constante.

University Copy For Library Use

• Cargas en rodamientos.

Un caso típico de estudio es el de cargas en rodamientos. Los rodamientos se apoyan y distribuyen la carga en el apoyo usando un forma senoidal como la de la figura. Hallar la presión máxima en el apoyo para un carga F de un apoyo de radio "r" y ancho "b".



Si suponemos la presión tiene una distribución de las cargas tan sólo verticalmente:

$$F = \int_0^{\pi} P\sin(\theta)br\partial\theta = -\left[P\cos(\theta)rb\right]_0^{\pi} = 2Pbr \Rightarrow P_{\max} = 0.5\frac{F}{br}$$

Bearing load.

Assume Psin(f) vertical.

```
> restart; F1:=int(P*sin(f)*b*r, f=0..Pi);
```

$$F1 := 2\,P\,b\,r$$

Bearing load.

Assume Psin(f) against surface.

```
> F2:=int(P*sin(f)*sin(f)*b*r, f=0..x);
```

$$F2 := \frac{1}{2}P\,b\,r\,(-\cos(x)\sin(x)+x)$$

```
> eval(F2,x=Pi);
```

$$\frac{1}{2}\pi\,P\,b\,r$$

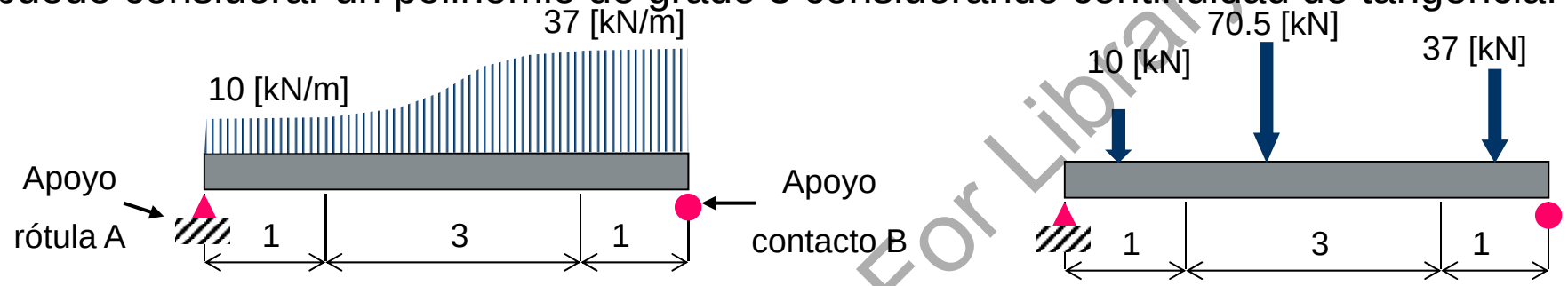
Si la carga se distribuye senoidalmente en la dirección radial:

$$F = \int_0^{\pi} P\sin^2(\theta)br\partial\theta = -\left[\frac{P}{2}\sin(\theta)\cos(\theta)rb - \theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}Pbr \Rightarrow P_{\max} = \frac{2F}{\pi br} = 0.636\frac{F}{br}$$

University Copy For Library Use

• Ejercicio Meriam 5-111 (1/3).

Dar las reacciones en A y B si la transición de la carga entre la zona de 10 a 37 kN/m se puede considerar un polinomio de grado 3 considerando continuidad de tangencia.



Buscamos el polinomio: $w(x)=k_0+k_1x+k_2x^2+k_3x^3 \Rightarrow w'(x)=k_1+2k_2x+3k_3x^2$

Con condiciones: $w(1)=10$, $w(4)=37$, $w'(1)=0$, $w'(4)=0 \Rightarrow w(x)=21-24x+15x^2-2x^3$

Pasamos a sustituir cada zona por la fuerza equivalente en su posición:

La carga constante entre 0 y 1 será: F_1= 1[m]*10[kN/m]=10[kN] Colocada a 0.5[m] de A.

La carga transición entre 1 y 4 será:

$$F_2 = \int_1^4 \left(21-24x+15x^2-2x^3\right)dx = \left[21x-12x^2+5x^3-0.5x^4\right]_1^4 = 70.5[kN]$$

$$x_2 = \frac{0+\int_1^4 x\left(21-24x+15x^2-2x^3\right)dx}{F_2} = \frac{\left[10.5x^2-8x^3+3.75x^4-0.2x^5\right]_1^4}{F_2} = 2.845[m]$$

University Copy For Library Use

• Ejercicio Meriam 5-111 (2/3).

La carga constante entre 4 y 5 será: F3= 1[m]*37[kN/m]=37[kN] Colocada a 4.5[m] de A.

Calculamos equilibrio de fuerzas y momentos:

Fuerzas en x: F_{ax}=0;

Momentos en z:
F_{by}*5=10*0.5+70.5*2.845+37*4.5; ⇨
F_{by}=74.41 [kN]

Fuerzas en y: F_{by}+F_{ay}=10+70.5+37; ⇨
F_{ay}=43.09 [kN]

Fuerza total: F_t=F_{ay}+F_{by}=117.5 [kN]

Centro carga total:
x=(10*0.5+70.5*2.845+37*4.5)/117.5=3.166[m]

Polinomial fit.

Assume w(1)=10, w(4)=37, w'(1)=0, w'(4)=0 .

```
> restart; wi(x):=k0+k1*x+k2*x^2+k3*x^3;
```

$$wi(x) := k0 + k1\,x + k2\,x^2 + k3\,x^3$$

```
> sols:=solve({subs(x=1,wi(x))=10,subs(x=4,wi(x))=37,subs(x=1,d
  iff(wi(x),x))=0,subs(x=4,diff(wi(x),x))=0},{k0,k1,k2,k3});
```

$$sols := \{k1 = -24, k2 = 15, k0 = 21, k3 = -2\}$$

```
> w(x):=subs(sols,wi(x));
```

$$w(x) := 21 - 24\,x + 15\,x^2 - 2\,x^3$$

```
> w1:=subs(x=1,w(x));
```

$$w1 := 10$$

```
> w4:=subs(x=4,w(x));
```

$$w4 := 37$$

```
> wd1:=subs(x=1,diff(w(x),x));
```

$$wd1 := 0$$

```
> wd4:=subs(x=4,diff(w(x),x));
```

$$wd4 := 0$$

```
> F:=int(w(x),x);
```

$$F := 21\,x - 12\,x^2 + 5\,x^3 - \frac{1}{2}x^4$$

```
> F2:=evalf(int(w(x),x=1..4));
```

$$F2 := 70.50000000$$

```
> xcg2:=evalf(0+int(x*w(x),x=1..4)/F2);
```

$$xcg2 := 2.844680851$$

```
> Fby:=(10*0.5+F2*xcg2+37*4.5)/5;
```

$$Fby := 74.41000000$$

```
> Fay:=(10+F2+37)-Fby;
```

$$Fay := 43.09000000$$

```
> Ft:=Fay+Fby;
```

$$Ft := 117.5000000$$

University Copy For Library Use

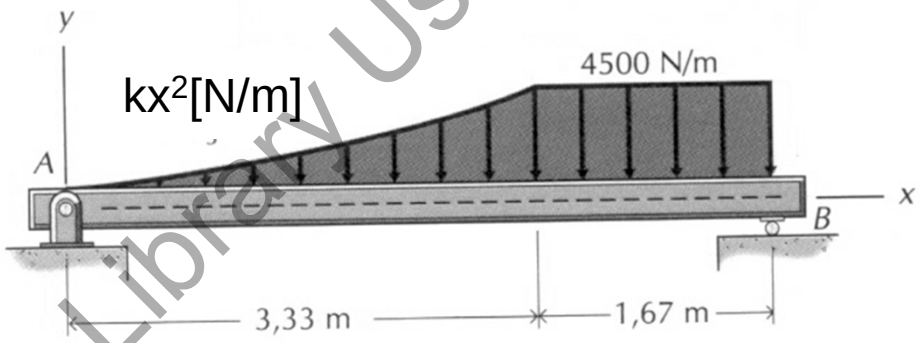
- Ejercicio Meriam 5-111 (3/3).

Comprobación CAD.

University Copy For Library Use

- Ejercicio Riley 5.93 Casa.

Calcular la fuerza resultante, punto aplicación y reacciones en apoyo de la viga de la figura.

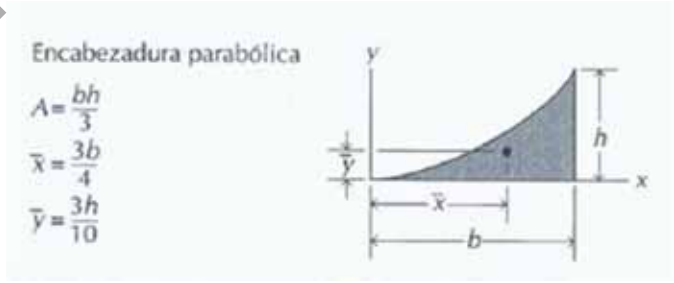


k para 4500=k*(10/3)² ⇨k=405[N/m³]

Integrando

$F_1 =$ [redacted] $5000[N]$

$x_1 =$ [redacted] $= 2.5[m]$



Por tablas:

$F_1 =$ [redacted] $= 5000[N]$ $\quad F_2 = 4500\frac{5}{3} = 7500[N]$ $\quad F_t = F_1 + F_2 = 12500[N]$

$x_1 =$ [redacted] $= 2.5[m]$ $\quad x_2 = \frac{10}{3} + \frac{1}{2}\frac{5}{3} = 4.167[m]$ $\quad x_t = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_t} = 3.5[m]$

$F_b =$ [redacted] $= 8750[N]$ $\quad F_a =$ [redacted] $= 3750[N]$

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios sobre cargas distribuidas para distintos perfiles buscando siempre las reacciones en los apoyos.

➢ Comparativa entre resultados y CAD.

University Copy For Library Use

S11t.- Esfuerzos internos.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ...

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios sobre cargas distribuidas para distintos perfiles buscando siempre las reacciones en los apoyos.

➢ Comparativa entre resultados y CAD.

University Copy For Library Use

• Objetivos de esta sesión

➢ Comprender que cualquier figura tiene el equilibrio entre fuerzas externas y reacciones en apoyos pero que si nos quedamos una parte de la pieza el equilibrio lo garantizan los esfuerzos internos que mantienen unida la pieza.

➢ Comprender que los esfuerzos internos los dividiremos en:

- o A axiales de tracción o compresión
- o T de torsión para los que necesitaremos un criterio de signos
- o V de cortante y M de momento que los analizaremos juntos con un criterio de signos aceptado por elasticidad y resistencia de materiales.

➢ Saber calcular los esfuerzos internos por tramos en función de la distancia (generalmente usamos x).

➢ Saber que la derivada del momento flector es el cortante.

➢ Criticar los gráficos en los apoyos y puntos de aplicación de fuerza.

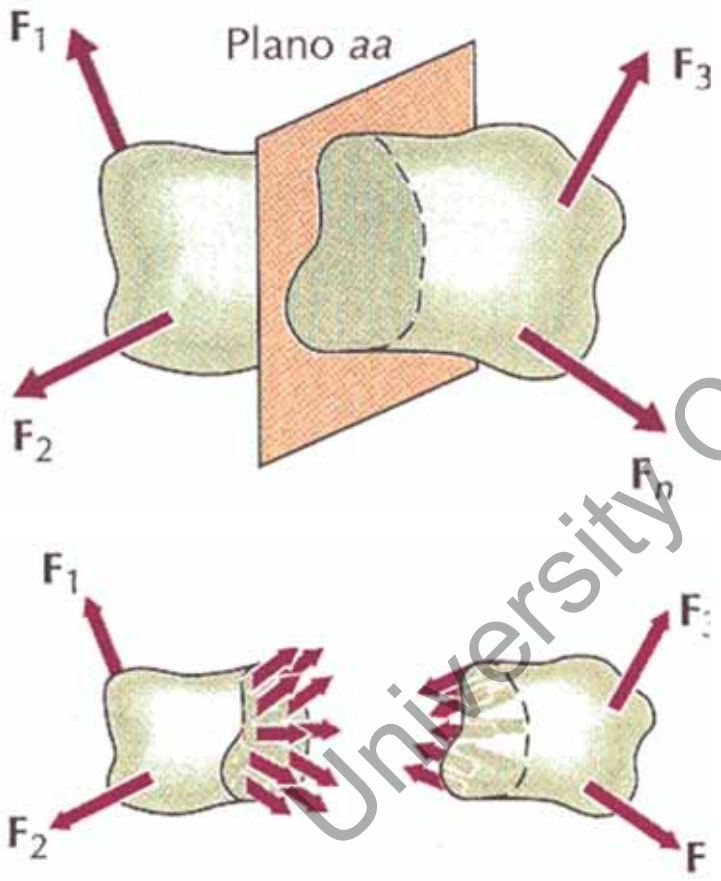
➢ Realizar ejercicios básicos de puntual, rectangular y triangular apoyado y empotrado.

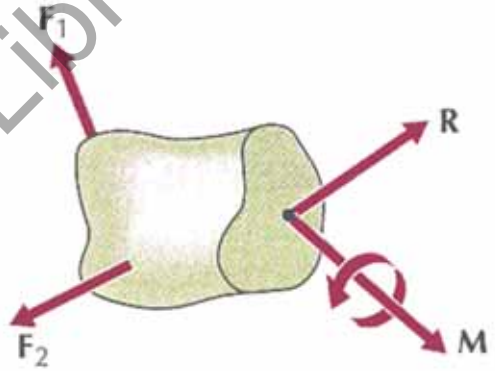
University Copy For Library Use

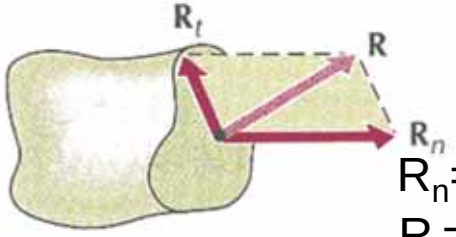
Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Esfuerzos debidos a cargas externas.

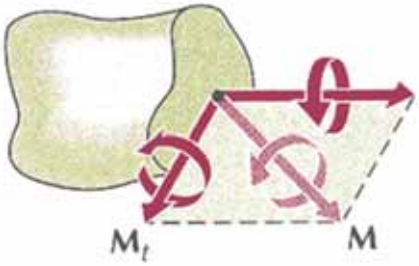
Hasta ahora hemos estado viendo como aplicamos cargas puntuales o distribuidas a cuerpos rígidos. Ahora veremos que estas cargas externas han de estar en equilibrio con las internas de la pieza si la seccionamos por un plano.







R_n=axial (T/C)
R_t=cortante



M_n=torsión
M_t=flexión

University Copy For Library Use

• Esfuerzos por cargas axiales.

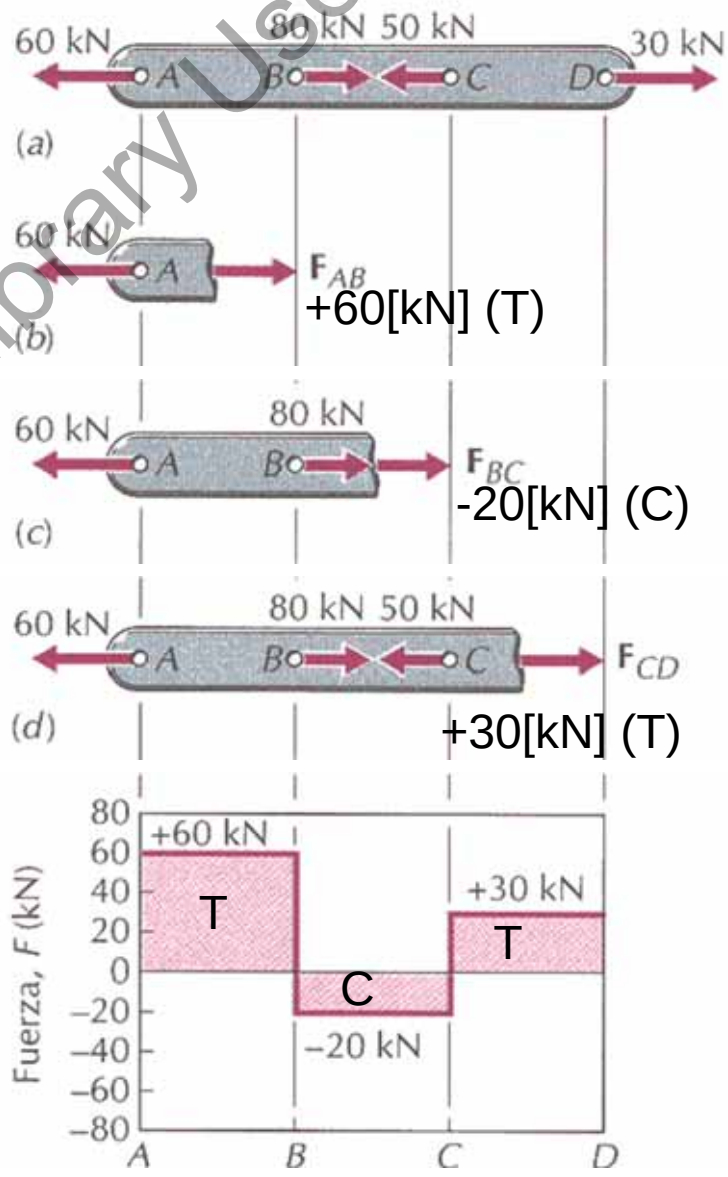
Como primer tipo de cargas internas a estudiar tenemos las fuerzas axiales en las que la dirección de la carga interna corresponde con el eje de la pieza que estamos estudiando.

Estas cargas se clasificarán a su vez en tensión a tracción que estiran de la cara seccionada (T) o en cargas a compresión que comprimen la cara seccionada (C).

Seccionar la pieza y plantear el equilibrio suponiendo cargas a tracción. Si el equilibrio demuestra que la carga interna es negativa entonces la sección estará sometida a compresión.

Primero comprobamos equilibrio de fuerzas externas por si hay que añadir alguna reacción en los apoyos:

-60+80-50+30=0 ⇨ OK ✓



University Copy For Library Use

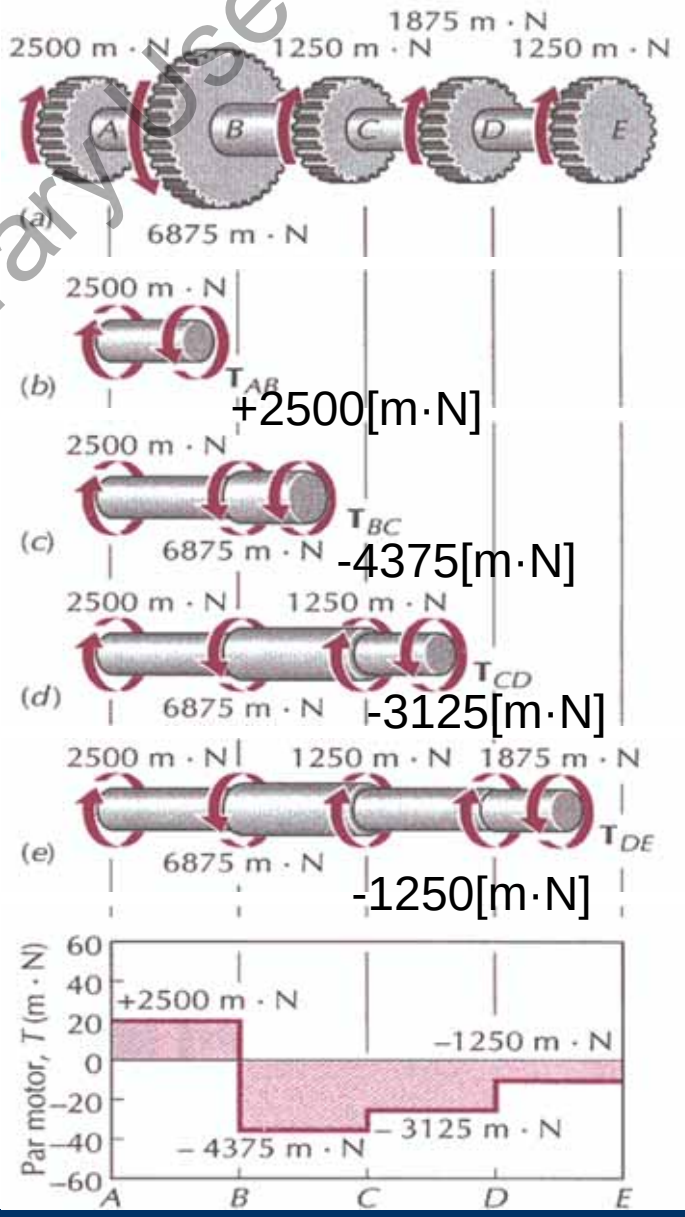
• Esfuerzos por torsión.

Como segundo tipo de cargas estudiaremos las que intentan revolucionar la pieza respecto a su eje (desenroscar). A estas cargas internas las nombramos cargas a torsión.

Para la torsión definiremos el concepto de positivo y negativo en función del momento que provoquen considerando una dirección positiva del eje. En el ejemplo del engranaje se ha definido positivo el sentido horario tan sólo desde este punto de vista. El signo que le daremos a la carga de torsión interna será para este ejemplo positivo en sentido antihorario.

Primero comprobamos equilibrio de fuerzas externas por si hay que añadir alguna reacción en los apoyos:

2500-6875+1250+1875+1250=0 ⇨ OK ✓



University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

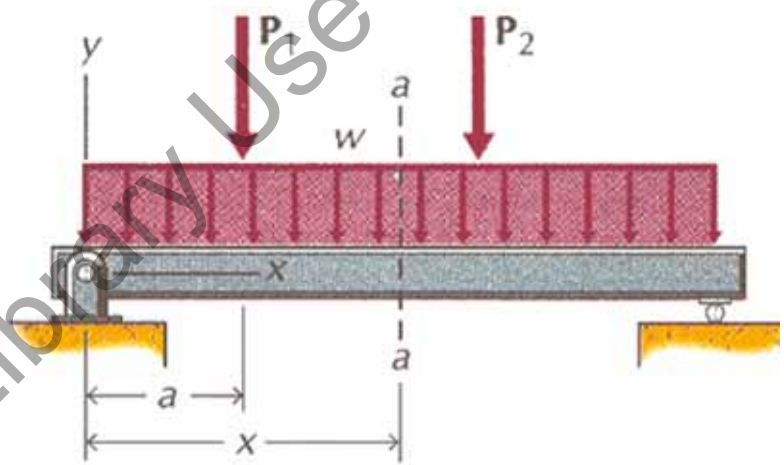
• Esfuerzos por flexión.

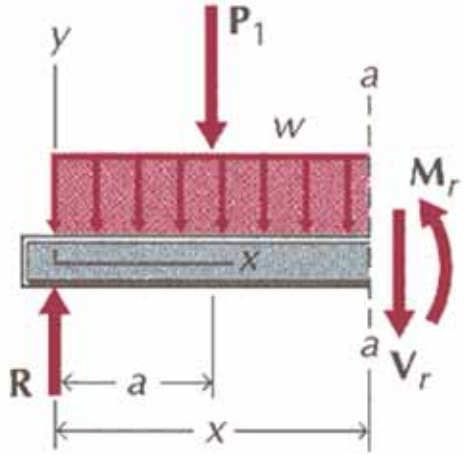
Finalmente clasificaremos las cargas internas que intentan doblar la pieza con momentos de flexión y esfuerzos cortantes.

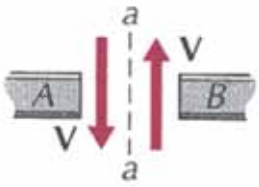
Los esfuerzos cortantes V son paralelos a la cara de la sección el la que estamos mirando los esfuerzos internos.

Los momentos a flexión M se aplican en eje incluido en la cara que seccionamos.

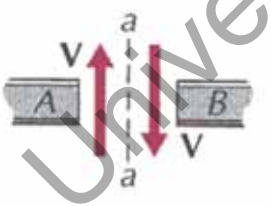
Una vez más se ha de definir unos ejes para decidir cuando el cortante y el momento son positivos. En la figura representación para ejes de la viga.



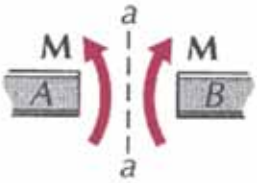




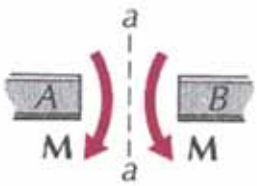
F. cortante +



F. cortante –



Momento +



Momento –

University Copy For Library Use

• Deducción de gráficos con cargas distribuidas.

Si analizamos una porción de una viga hemos de suponer en los extremos tenemos un cortante y un momento flector. Por defecto los suponemos positivos como en la figura.

Si la porción de viga que cogemos es muy pequeña podemos considerar como integrar en la dirección "x" a base de mantener el equilibrio de fuerzas en "y" y momentos.

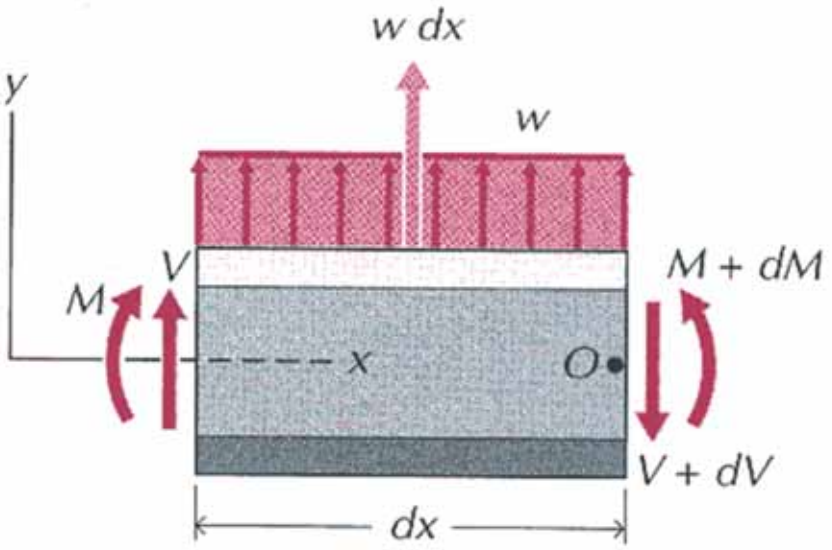
$$\sum F_y = V + wdx - (V + dV) = 0;$$

$$w = \frac{dV}{dx} \Rightarrow V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_2} wdx = \int_{V_1}^{V_2} dV$$

$$\sum M_O = M + Vdx + w\frac{dx^2}{2} - (M + dM) = 0;$$

dividiendo por dx y $dx \to 0$

$$V = \frac{dM}{dx} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} Vdx = \int_{M_1}^{M_2} dM = M_2 - M_1$$



University Copy For Library Use

• Deducir gráficos para viga con carga puntual.

Si tenemos una viga apoyada con una carga puntual dar los gráficos de cortante y momento flector.

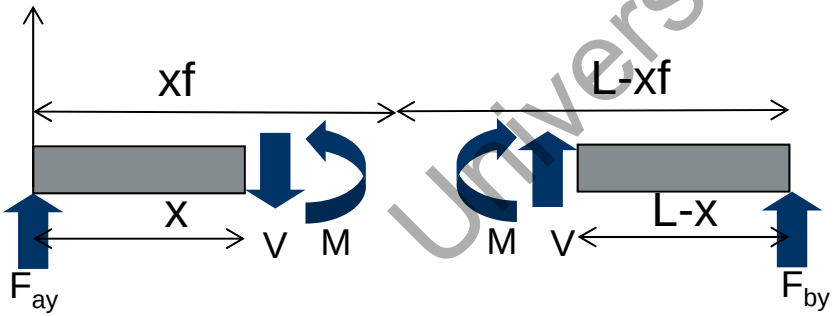
Primero calculamos reacciones en A y en B planteando equilibrio:

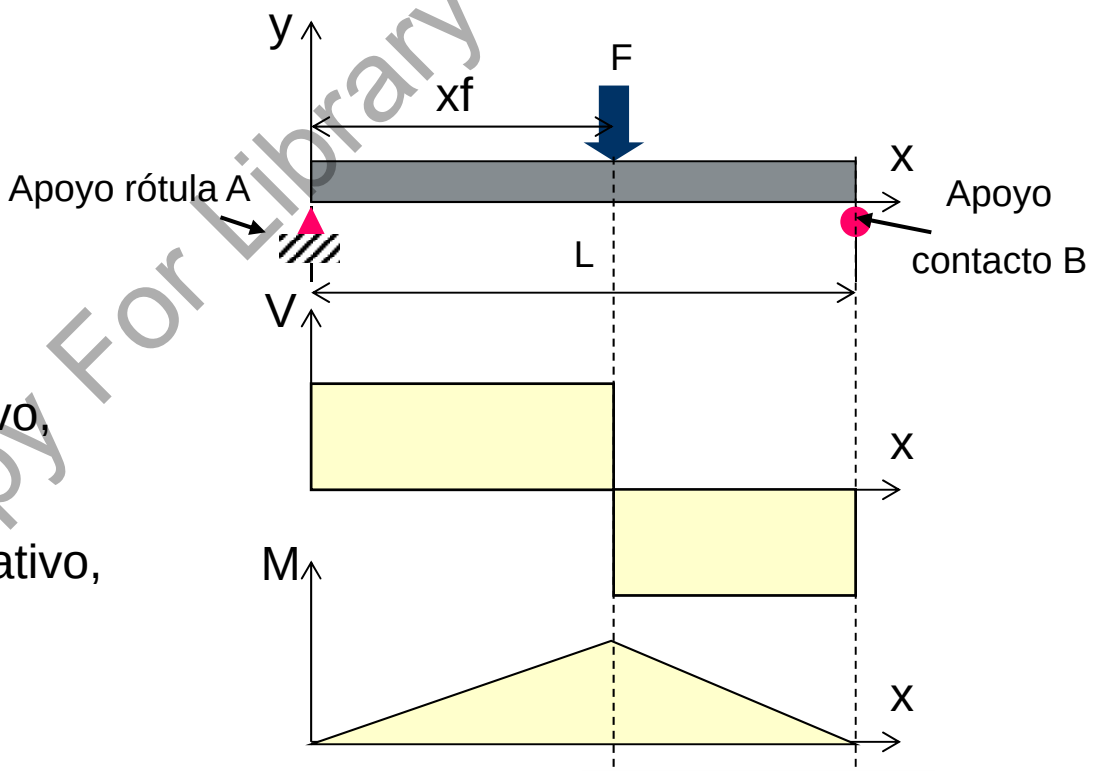
$F_{ay}=F*(L-xf)/L$

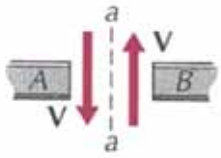
$F_{by}=F*(xf)/L$

Planteamos el tramo de 0 a xf: $V=F_{ay}$ positivo, $M=F_{ay}*x$ positivo.

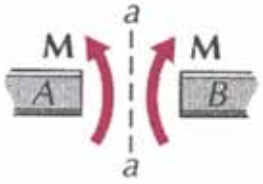
Planteamos el tramo de xf a L: $V=F-F_{ay}$ negativo, $M=F_{by}*(L-x)$ positivo.







F. cortante +

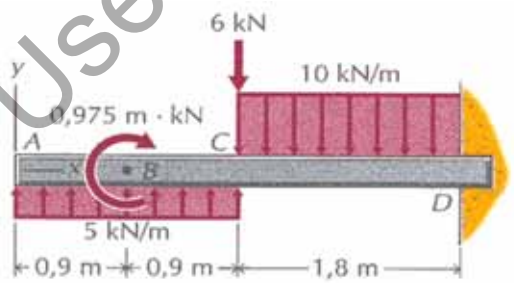


Momento +

University Copy For Library Use

• Ejemplo de esfuerzos casa Riley 8.5.

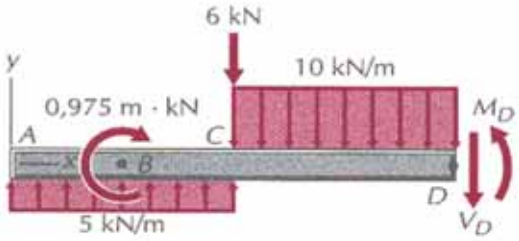
Como ejemplo de gráfico de esfuerzos flectores y cortantes consideramos la siguiente viga.



Primero planteamos el equilibrio y hallamos las reacciones en el empotramiento

$R_D = 1$ [redacted] $= 15\,j\ N$

$M_D =$ [redacted] $= -1.725\,k$

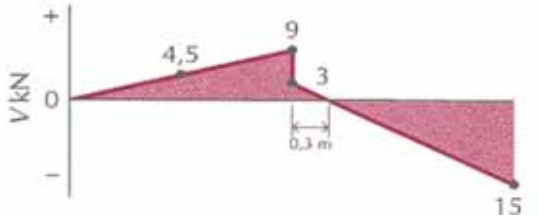


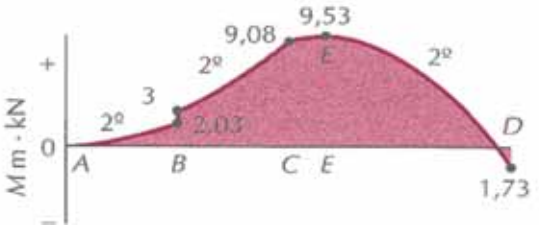
Deducimos los gráficos en cada sección empezando por el voladizo en que no hay cargas y por tanto cortante y momento han de ser cero:

$0 \le x < 0.9: V =$ [redacted]

$0.9 \le x < 1.8: V =$

$1.8 \le x < 3.6: V =$

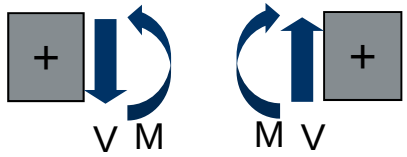


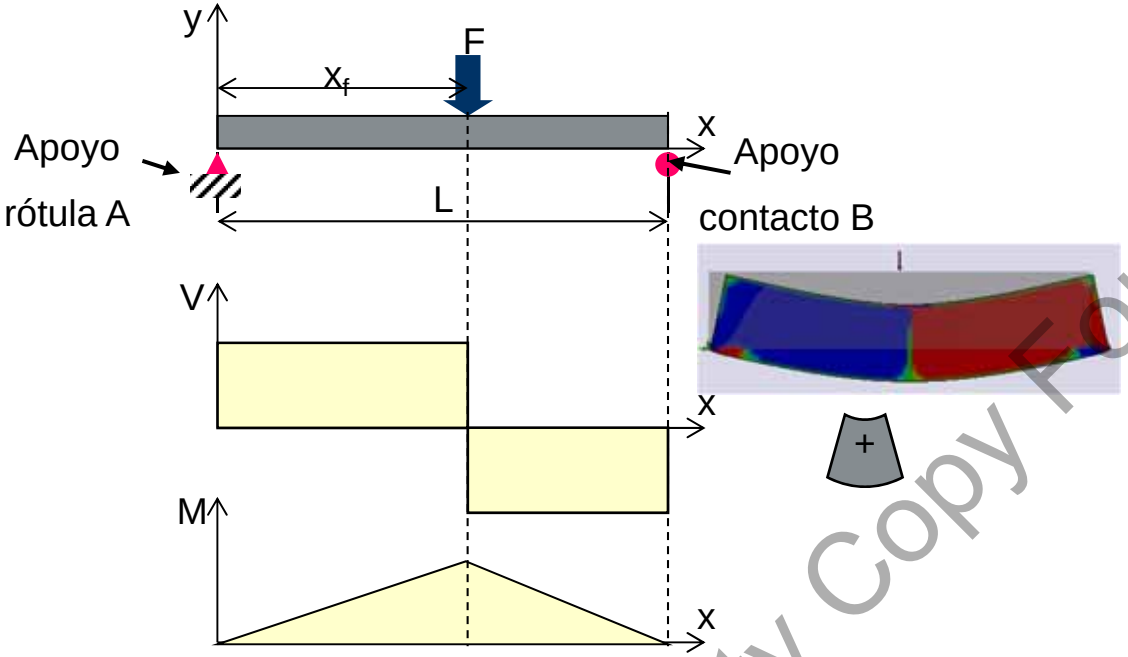


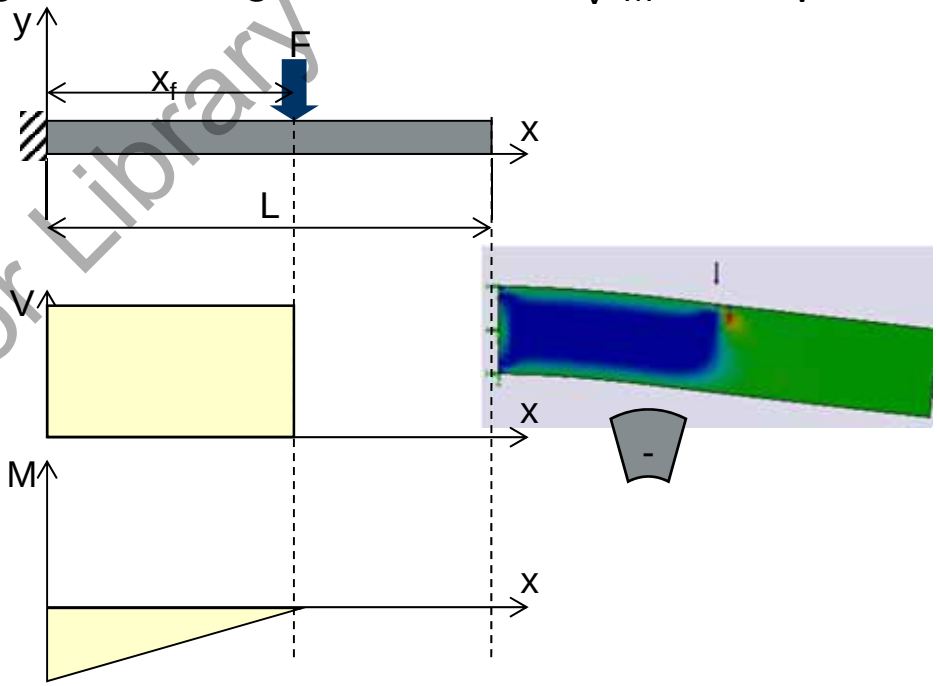
University Copy For Library Use

• Ejercicio básicos.

Dar los gráficos de momentos y cortantes de las vigas de las figuras.







Equilibrio: $F_{ay}=F*(L-x_f)/L$; $F_{by}=F*(x_f)/L$

Planteamos el tramo de 0 a xf:

$V=F*(L-x_f)/L$; $M=F*(L-x_f)/L*(x)$;

Planteamos el tramo de x_f a L:

$V=-F*(x_f)/L$; $M=F*(x_f)/L*(L-x)$;

Equilibrio: $F_{ay}=F$; $M_{az}=F*x_f$

Planteamos el tramo de 0 a x_f:

$V=F$; $M=F*(x-x_f)$; neg. en apoyo.

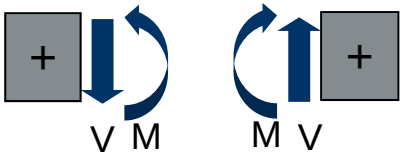
Planteamos el tramo de x_f a L:

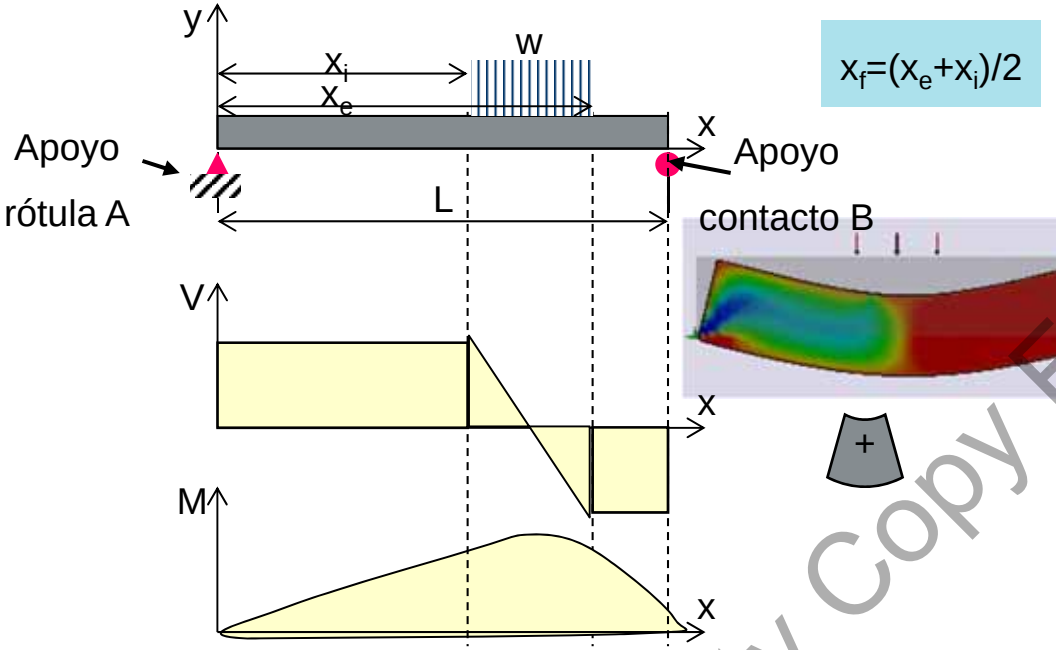
$V=0$; $M=0$;

University Copy For Library Use

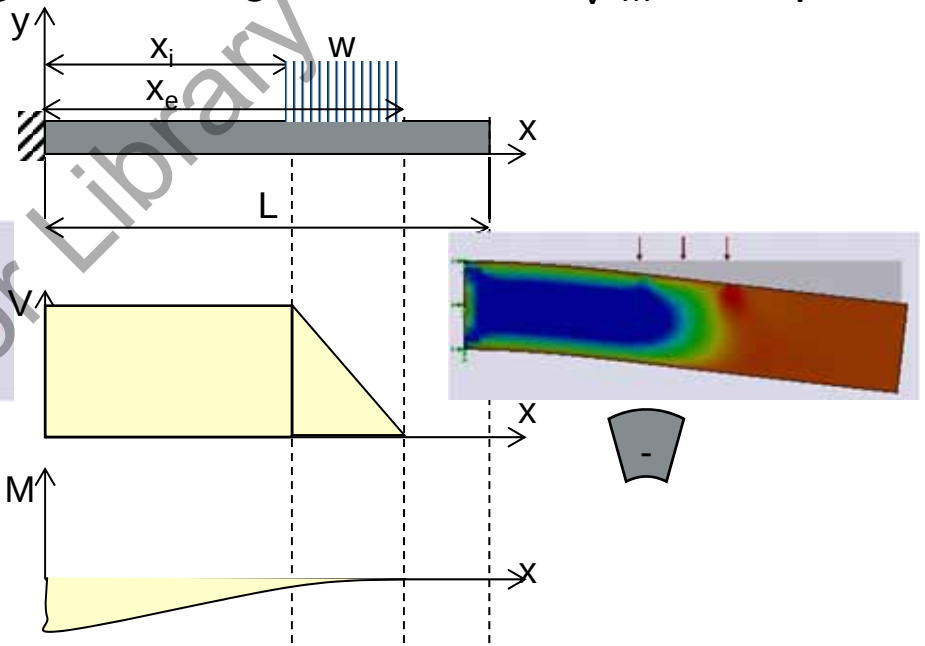
• Ejercicio básicos.

Dar los gráficos de momentos y cortantes de las vigas de las figuras.





$x_f=(x_e+x_i)/2$



Equilibrio: $F_{ay}=w*(x_e-x_i)*(L-x_f)/L$; $F_{by}=w*(x_e-x_i)*(x_f)/L$

Planteamos el tramo de 0 a x_i:

$V=w*(x_e-x_i)*(L-x_f)/L$; $M=w*(x_e-x_i)*(L-x_f)/L*x$;.

Planteamos el tramo de x_i a x_e:

$V=w*(x_e-x_i)*(L-x_f)/L-w(x-x_i)$; $M=w*(x_e-x_i)**(L-x_f)/L*x-w*(x-x_i)^2/2$;

Planteamos el tramo de x_e a L:

$V=w*(x_e-x_i)*(x_f)/L$ neg., $M=w*(x_e-x_i)*(x_f)/L*(L-x)$ pos.

Equilibrio: $F_{ay}=w*(x_e-x_i)$; $M_{az}=w*(x_e-x_i)*x_f$

Planteamos el tramo de 0 a x_f:

$V=w*(x_e-x_i)$; $M=-w*(x_e-x_i)*x_f+w*(x_e-x_i)*(x)$

Planteamos el tramo de x_i a x_e:

$V=w*(x_e-x_i)-w(x-x_i)^2/2.$; $M=-w*(x_e-x_i)*x_f+w*(x_e-x_i)*(x)-w*(x-x_i)^2/2$; neg en x_i.

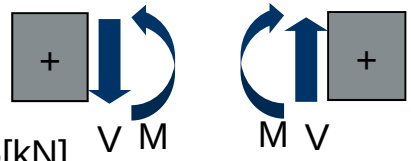
Planteamos el tramo de x_f a L:

V=0, M=0.

University Copy For Library Use

• Ejercicio Meriam Sample 5.15.

Dar los gráficos de momentos y cortantes de la viga de la figura.



Equilibrio:

$F_{by}*5=1*2*2/3+2*3+1.5*6;\Rightarrow F_{by}=3.267[kN];$

$F_{ay}+F_{by}=0.5*1*2+1*2+1.5=4.5[kN] \Rightarrow F_{ay}=1.233[kN];$

Planteamos el tramo de 0 a 2:

$V=F_{ay}-0.25x^2=1.233-0.25x^2$ [N]; V(2)=0.233[kN]

$M=F_{ay}*x-0.25x^2*x/3=1.233*x-0.08333x^3$[kN·m]; M(0)=0[kN·m];

M(2)=1.799[kN·m];

Planteamos el tramo de 2 a 4:

$V=F_{ay}-1-(x-2)=2.233-x$ [N]; V(2)=0.233[kN]; V(4)=-1.767[kN];

$M=F_{ay}*x-1(x-1.333)-(x-2)^2/2=-0.6667+2.23x-0.50x^2$[kN·m];

M(2)=1.799[kN·m]; M(4)=0.2667[kN·m];

Planteamos el tramo de 4 a 5:

$V=F_{ay}-1-2=-1.767$ [N]; V(4)=-1.767[kN]; V(5)=-1.767[kN];

$M=F_{ay}*x-1(x-1.333)-2*(x-3)=7.333-1.767x$[kN·m];

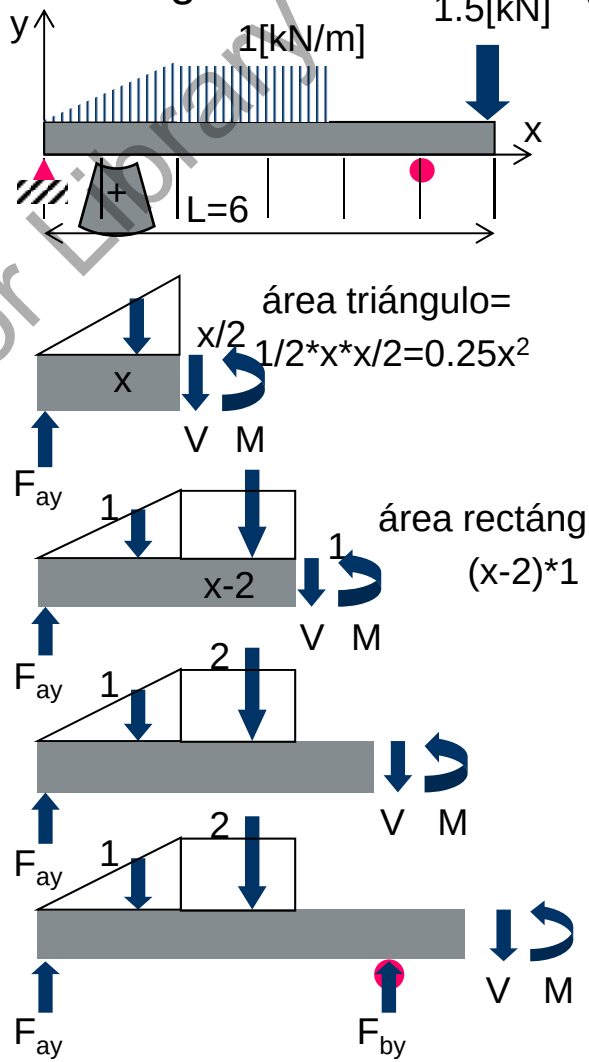
M(4)=0.2667[kN·m]; M(5)=-1.500[kN·m];

Planteamos el tramo de 5 a 6:

$V=F_{ay}+F_{by}-1-2=1.500$ [N]; V(5)=1.500[kN]; V(6)=1.500[kN];

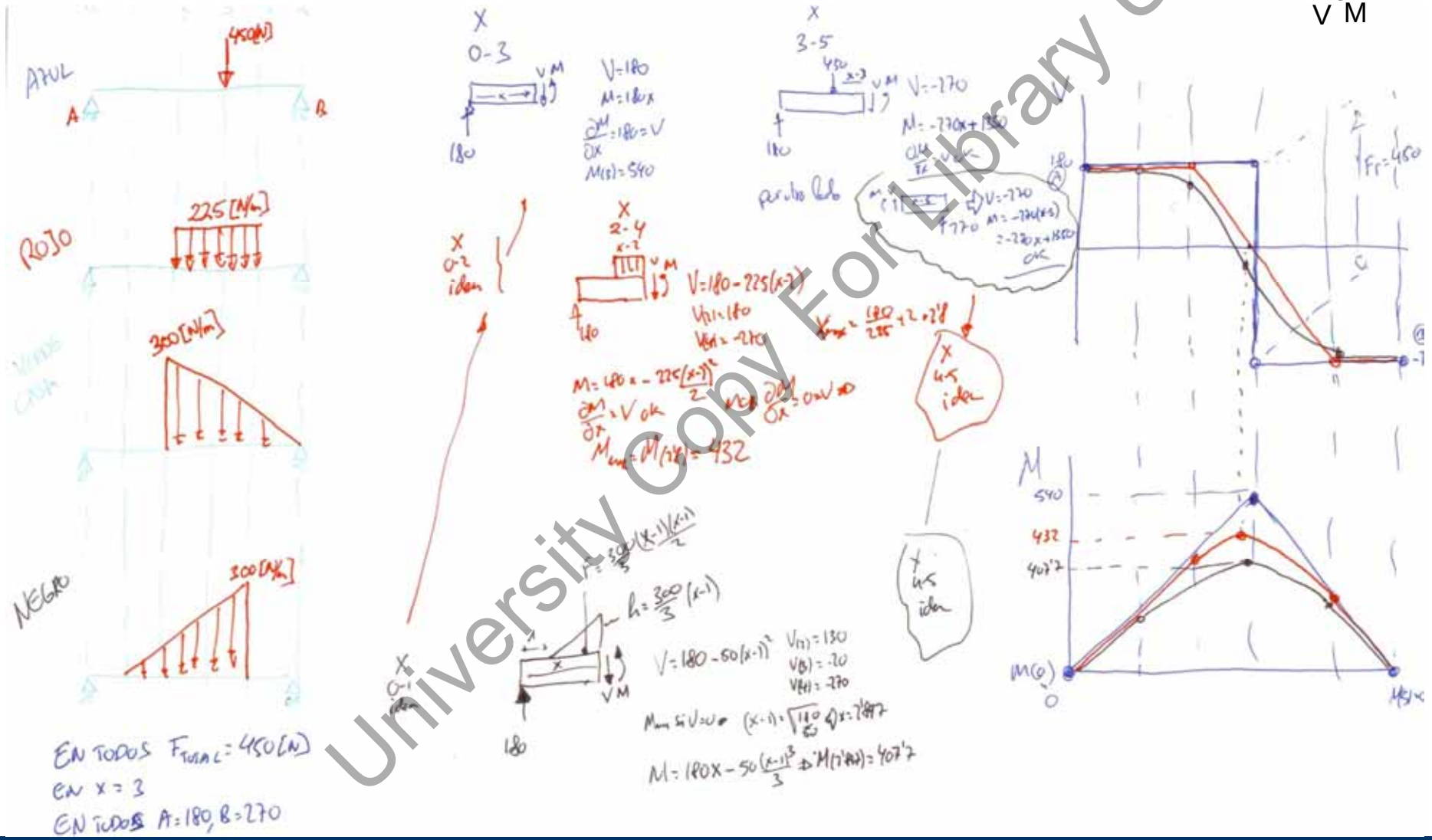
$M=F_{ay}*x+F_{by}*(x-5)-1(x-1.333)-2*(x-3)=-9.000+1.500x$[kN·m];

M(5)=-1.500[kN·m]; M(6)=0[kN·m];



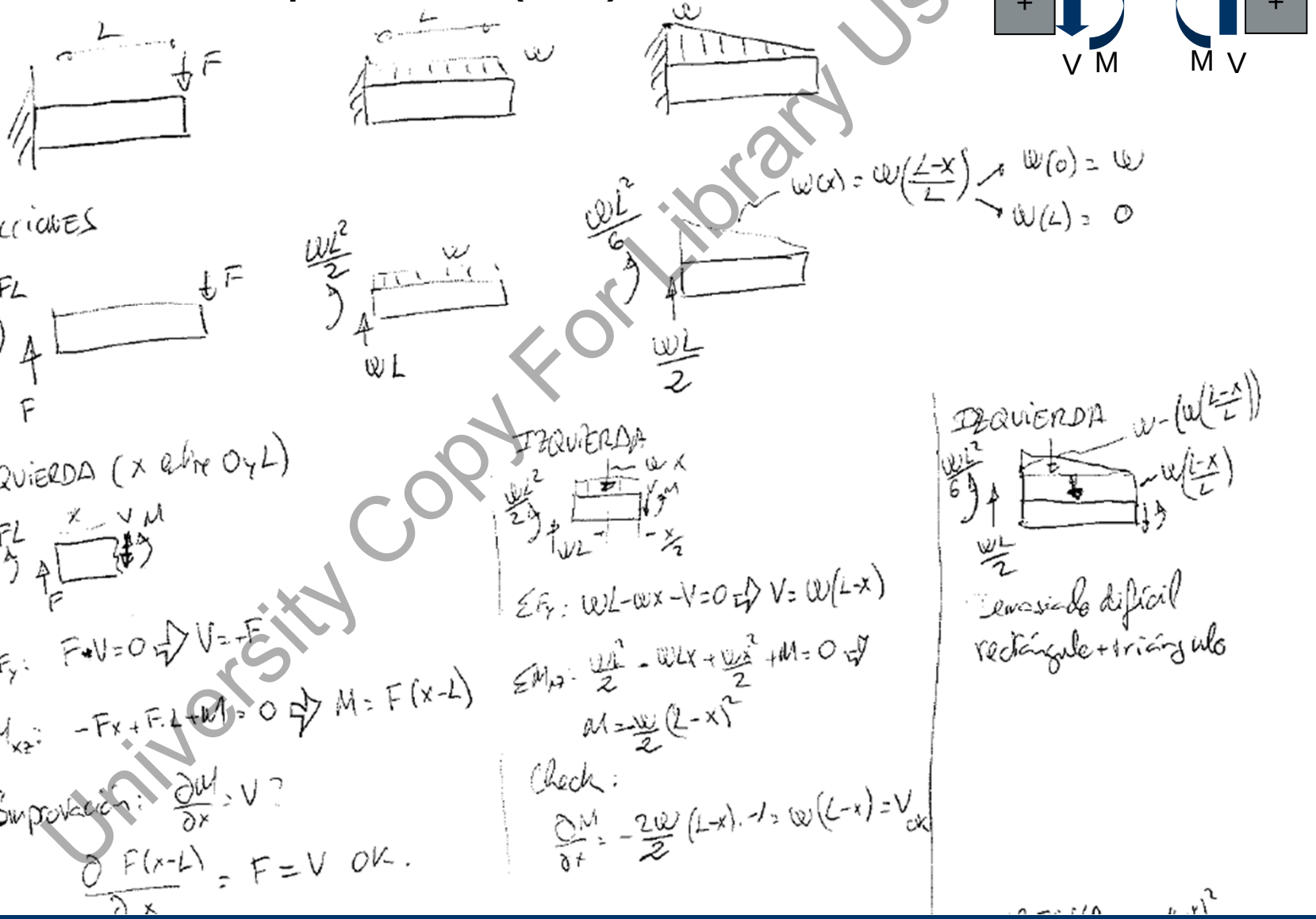
University Copy For Library Use

- Ejercicio básico apoyado.



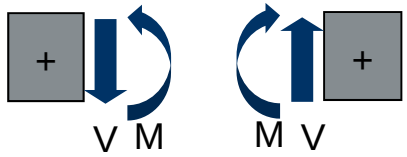
University Copy For Library Use

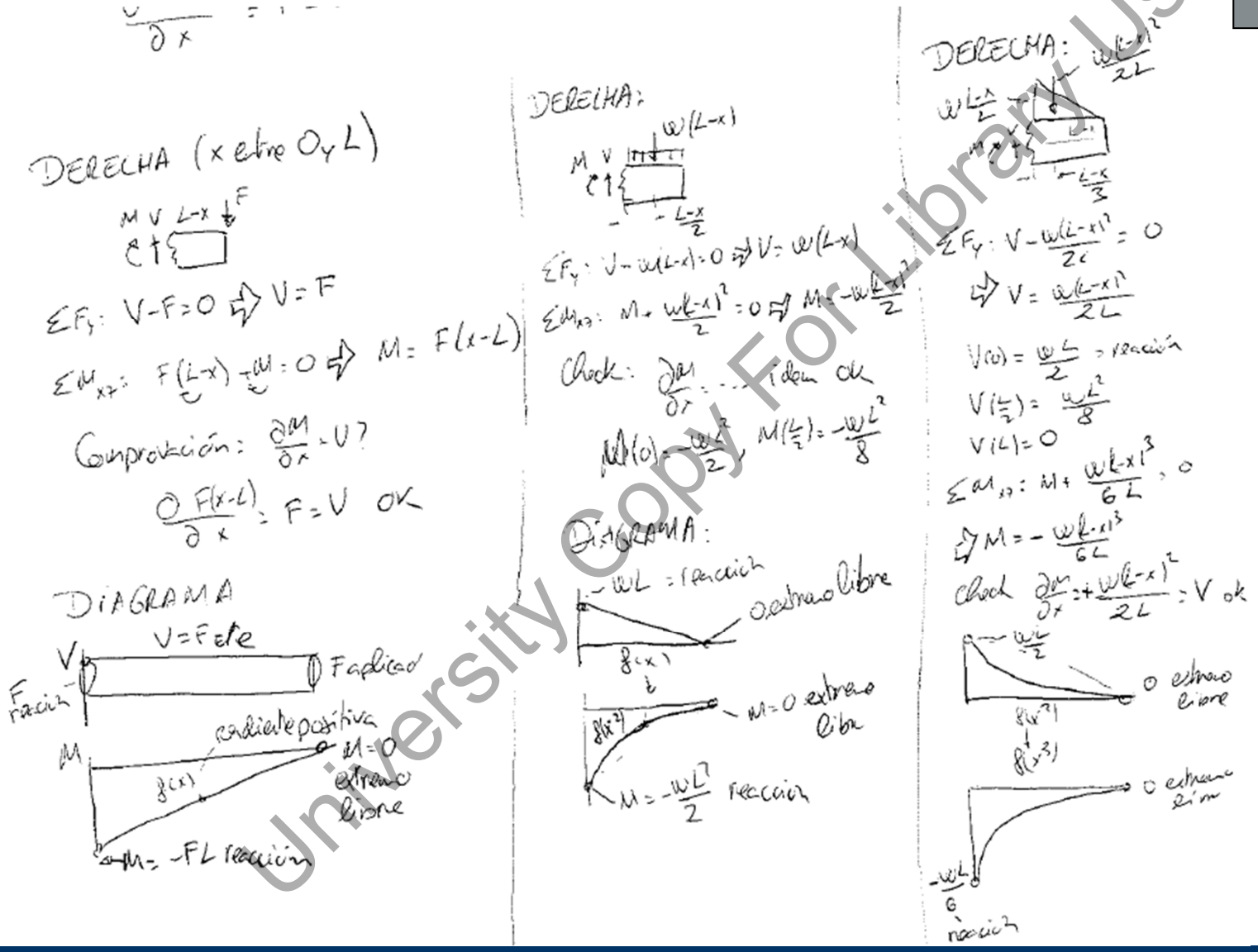
- Ejercicio básico empotrado (1/2).



University Copy For Library Use

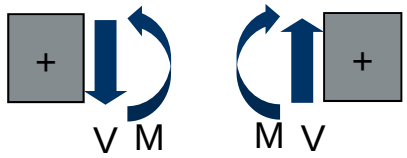
- Ejercicio básico empotrado (2/2).

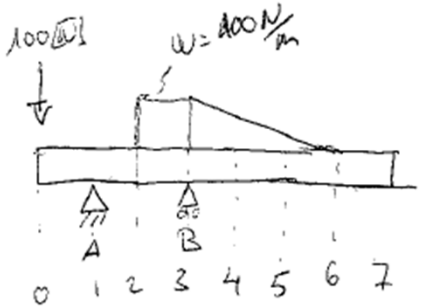




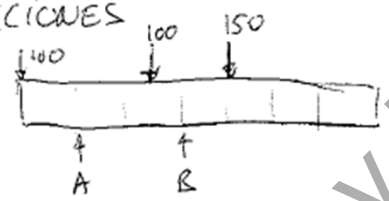
University Copy For Library Use

- Ejercicio básico tramos (1/2).





REACCIONES



$\Sigma F_y: A + B = 100 + 100 + 150$ $\quad A = 350 - B = 350 - 250 = 100[N]$

$\Sigma M_A: 100 \cdot 1 - 100 \cdot 1.5 + B \cdot 2 - 150 \cdot 3 = 0 \Rightarrow B = \frac{-100 + 150 + 450}{2} = 250[N]$

IZQUIERDA TRAMO x 0-1

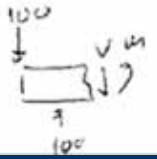
$\Sigma F_y: +100 + V = 0 \Rightarrow V = -100$

$\Sigma M_{yx}: 100 \cdot x + M = 0 \Rightarrow M = -100x$ $\quad \frac{\partial M}{\partial x}$ ok

$V(0) = -100, \quad V(1) = -100$

$M(0) = 0, \quad M(1) = -100$

IZQUIERDA TRAMO x 1-2



$\Sigma F_y: 100 - 100 + V = 0 \Rightarrow V = 0$

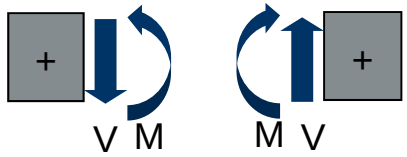
$\Sigma M_{yx}: 100x - 100(x-1) + M = 0 \Rightarrow M = -100$ $\quad \frac{\partial M}{\partial x} = 0$

$V(1) = 0, \quad V(2) = 0$ salto 100 ok

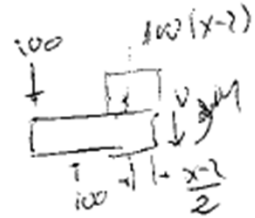
$M(1) = -100, \quad M(2) = -100$ ok continuo

University Copy For Library Use

- Ejercicio básico tramos (2/2).



IZQUIERDA TRAMO x 2-3



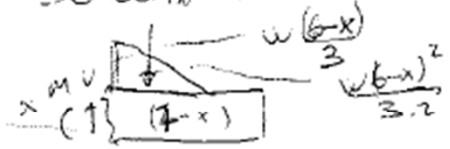
ΣF_y: $100 - 100 + 100(x-2) - V = 0 \Rightarrow V = -100(x-2)$

ΣM_0: $100x - 100(x-1) - 100\frac{(x-2)^2}{2} + M = 0 \Rightarrow M = -100\frac{(x-2)^2}{2} - 100$

$\frac{\partial M}{\partial x} = -100(x-2) = V$ $\quad V(2) = 0,\ V(3) = -100$

$M(2) = -100$ $\quad M(3) = -150$

DERECHA TRAMO x 3-6



ΣF_y: $V - \frac{w(6-x)^2}{6} = 0 \Rightarrow V = w\frac{(6-x)^2}{6}$ $\quad w = 100$

ΣM_x: $M + \frac{w(6-x)^3}{18} = 0 \Rightarrow M = -\frac{w(6-x)^3}{18}$

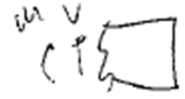
$\frac{\partial M}{\partial x} = V$

$V(3) = +150$ (sale 250 = B)

$V(6) = 0$ extremo libre

$M(3) = -150$ ok, $M(6) = 0$ extremo libre

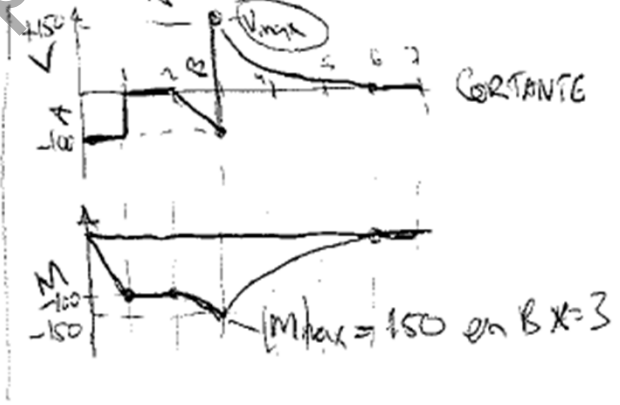
DERECHA TRAMO x 6-7



$V = 0$

$M = 0$ y extremo libre

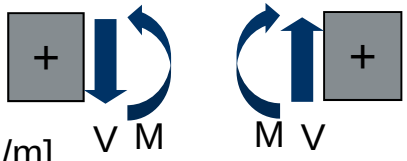
GRÁFICOS

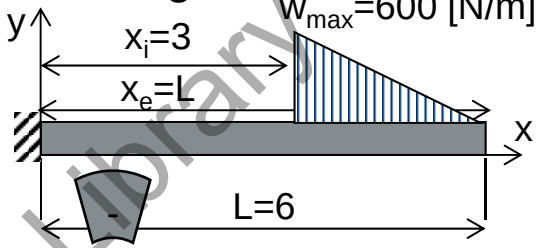


University Copy For Library Use

• Ejercicio casa Riley 8.42.

Dar los gráficos de momentos y cortantes de la viga de la figura.





Equilibrio:

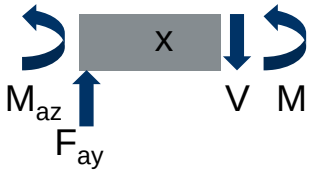
F= [N] en x= [m]

F_{ay}=900[N]; M_{az}=900*4=3600[N·m];

Planteamos el tramo de 0 a x_i:

V=F=900[N] pos.; V(0)=900[N]; V(3)=900[N]

M= =900*x-3600[N·m]; M(0)=-3600[N·m] neg. en origen; M(3)=-900[N·m]

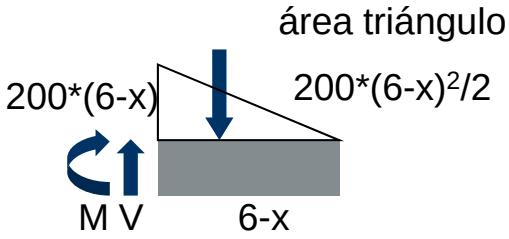


Planteamos el tramo* de L a x_i:

V=100*(6-x)^2[N] pos.; V(6)=0[N]; V(3)=900[N]

M=-100*(6-x)^2*(6-x)/3=100/3*(6-x)^3[N·m]; M(6)=-0[N·m];

M(3)=-900[N·m]



University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Introducción a los esfuerzos internos clasificados en axiales (tracción vs. compresión), torsionales y flectores con cortante.

➢ Ejemplo de realización de gráficos de esfuerzos internos en vigas.

University Copy For Library Use

S12t.- Estructuras.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ...

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejemplos de gráficos de momentos de flexión y cortante.

University Copy For Library Use

• Objetivos de esta sesión

➢ Comprender que las estructuras de esta asignatura trabajan axialmente (tracción o compresión).

➢ Comprender que como en cualquier otro problema primero hay que calcular las reacciones.

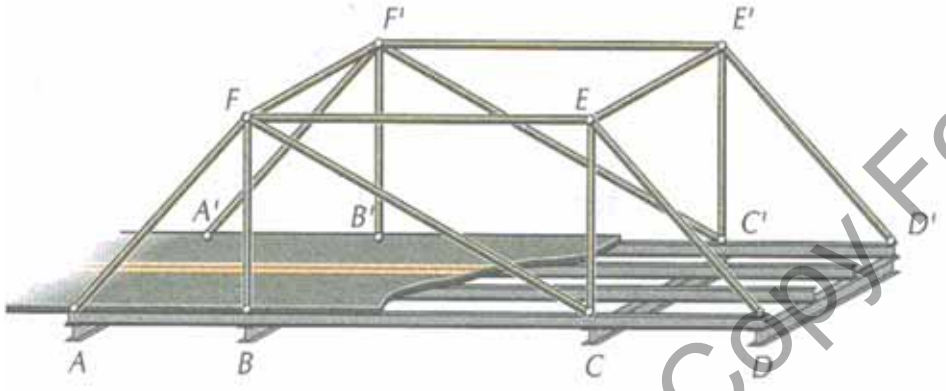
➢ Saber simplificar una estructura identificando los tramos de fuerza cero por estar en forma de tres en forma de “T” o dos en forma de “V” sin fuerza exterior.

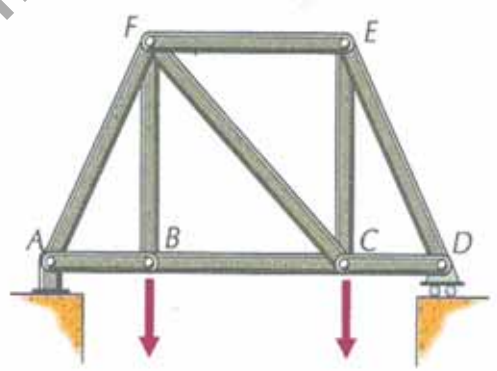
➢ Saber hacer una sección que deje como máximo tres tramos a resolver.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Ejemplo de estructura de barras.





University Copy For Library Use

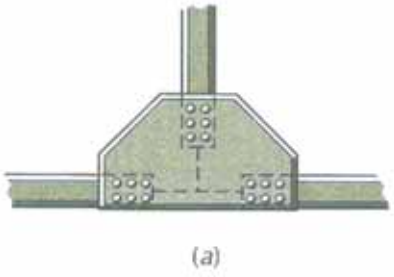
- Hipótesis de carga.

➢ Miembros de la armadura unidos sólo por sus extremos.

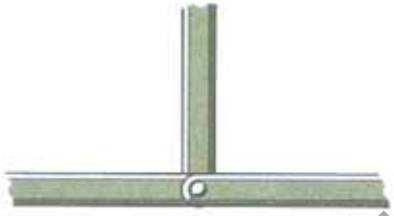
➢ Conexiones siempre por pasadores.

➢ Armadura sólo cargada en nudos.

➢ Elementos de peso despreciable.



(a)



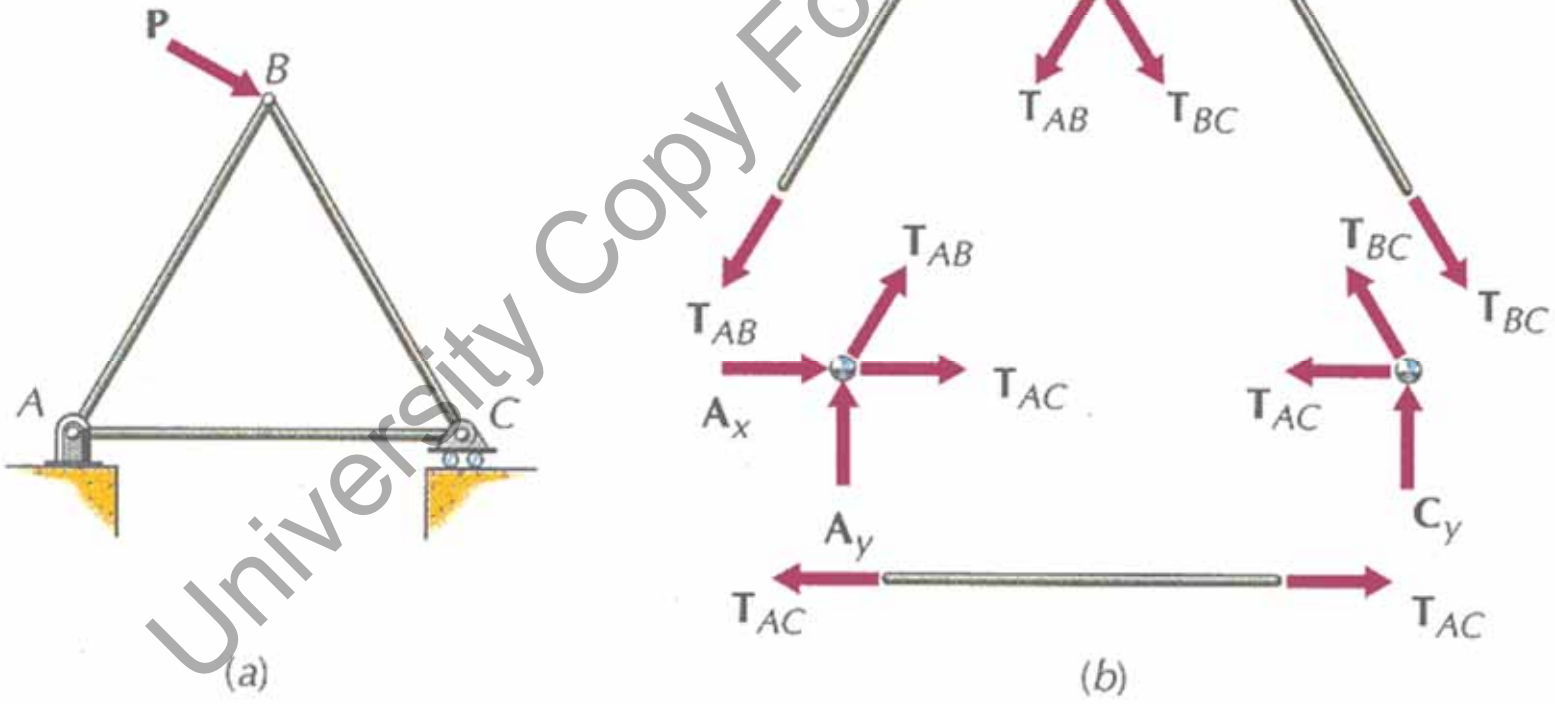
(b)

En esta asignatura en 2D hay dos apoyos(2+1) y en 3D tres apoyos (3+2+1) como máximo.

University Copy For Library Use

• Aplicación de las hipótesis.

Como en el caso de los esfuerzos internos en general no hay que olvidar las fuerzas de reacción en los apoyos para poder calcular las fuerzas en cada barra.



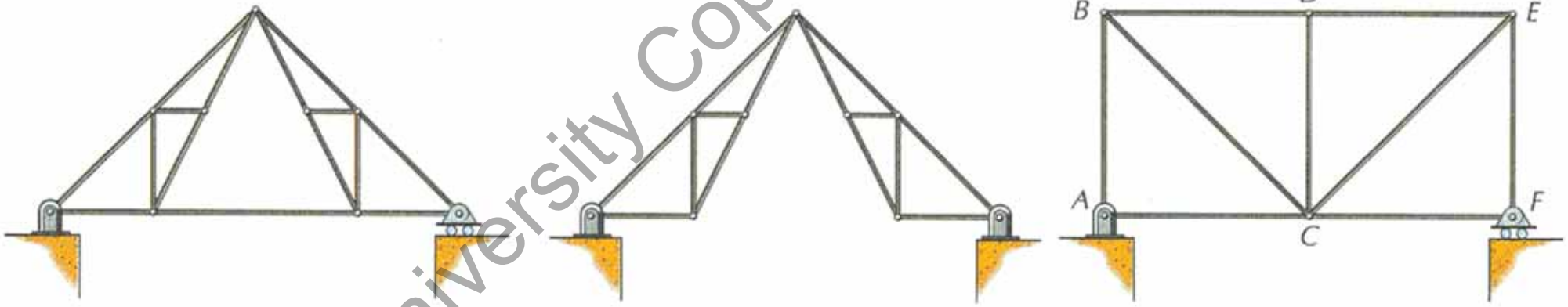
University Copy For Library Use

- Ejemplos de armaduras simples y compuestas.

En el primer ejemplo la barra inferior impide que se abran los apoyos.

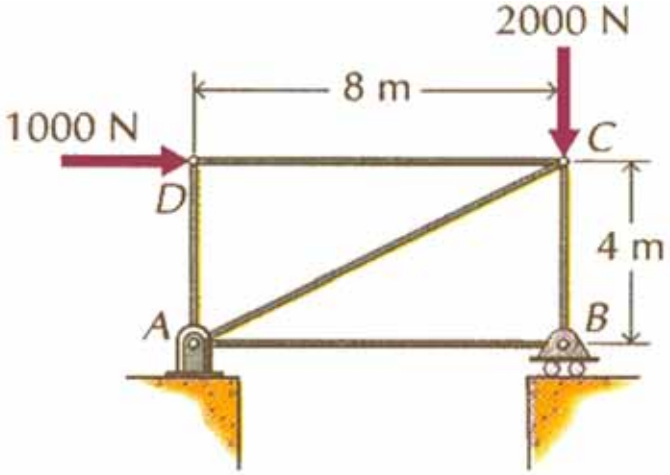
En el segundo ejemplo los apoyos no deslizan con lo que se puede quitar la barra inferiro.

El tercer ejemplo es una estructura clásica.

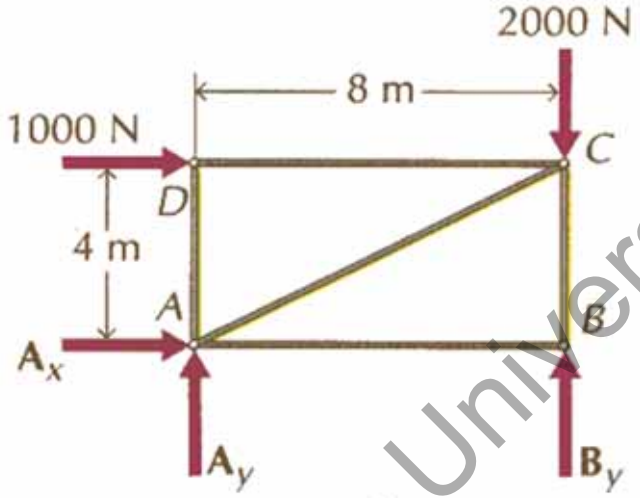


University Copy For Library Use

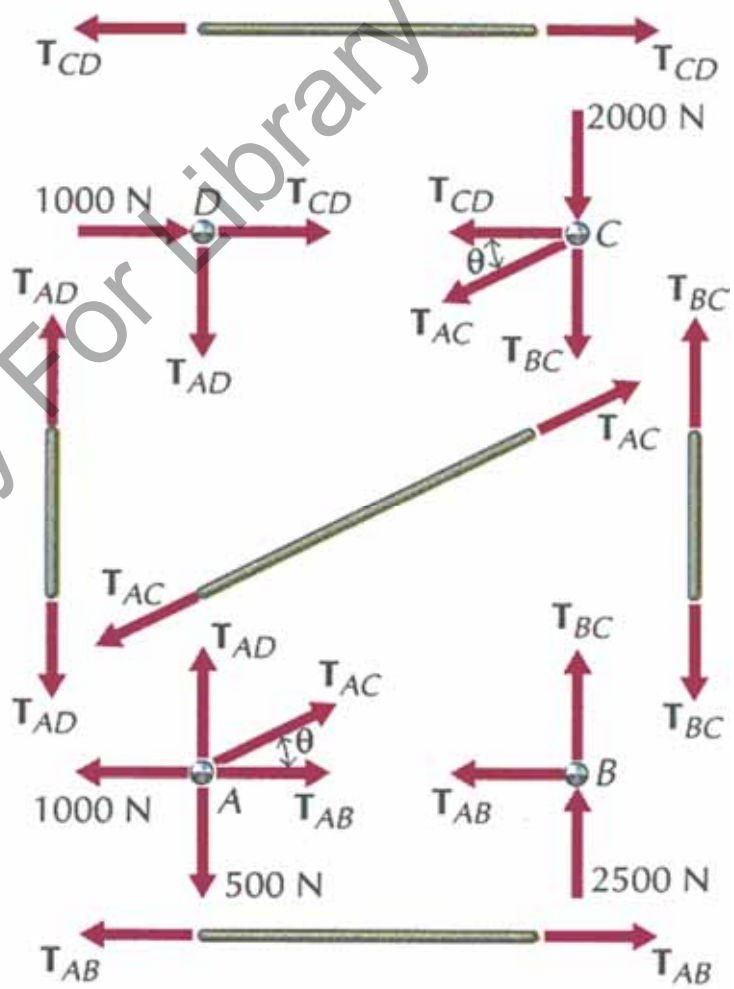
- Resolución por método de los nudos.



(a)



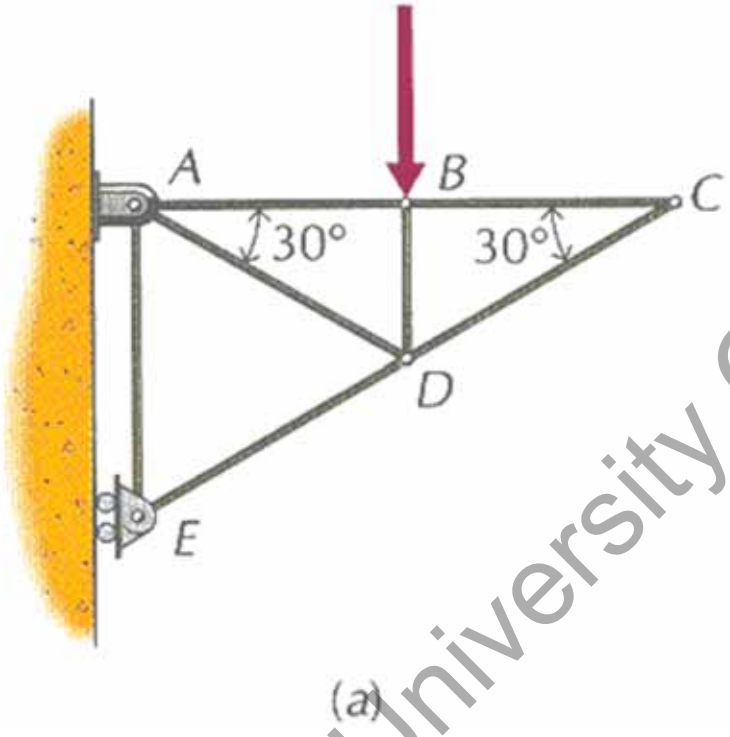
(b)

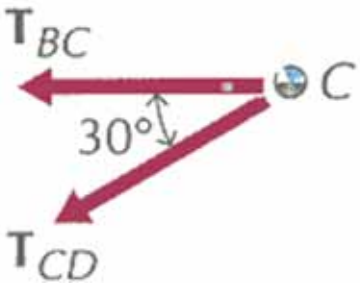


University Copy For Library Use

- Miembros de fuerza nula.

Si tan sólo 2 miembros no colineales confluyen en nudo no cargado exteriormente ni con reacción de apoyo se concluye que las fuerzas en el nudo son nulas.



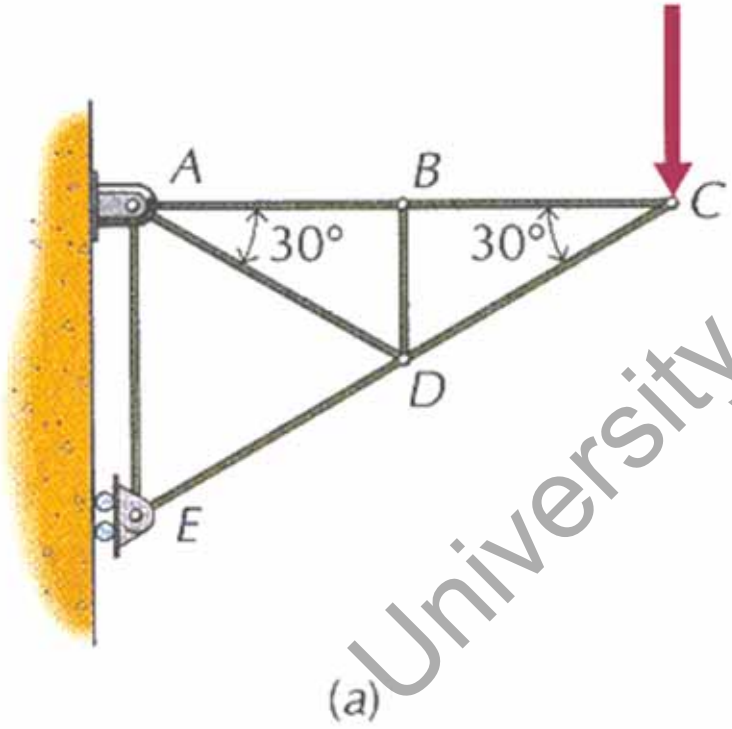


$T_{BC}=T_{CD}=0$

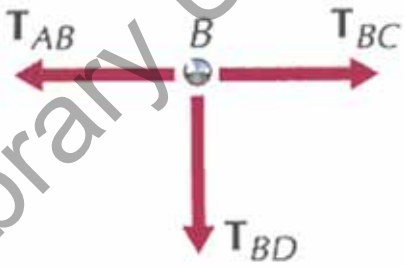
University Copy For Library Use

• Miembros de fuerza nula.

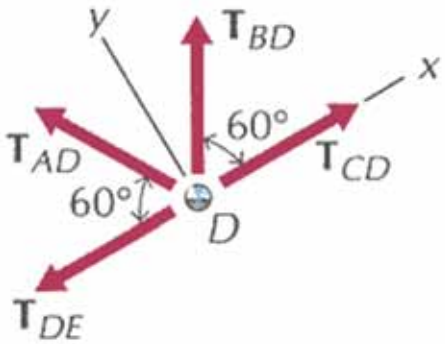
Si 3 miembros forman un nudo, 2 son colineales y el tercero no: El no colineal es de fuerza nula si en el nudo no hay carga externa ni reacción de apoyo. Los 2 colineales soportan igual carga.



(a)



(b) $T_{BD}=0$

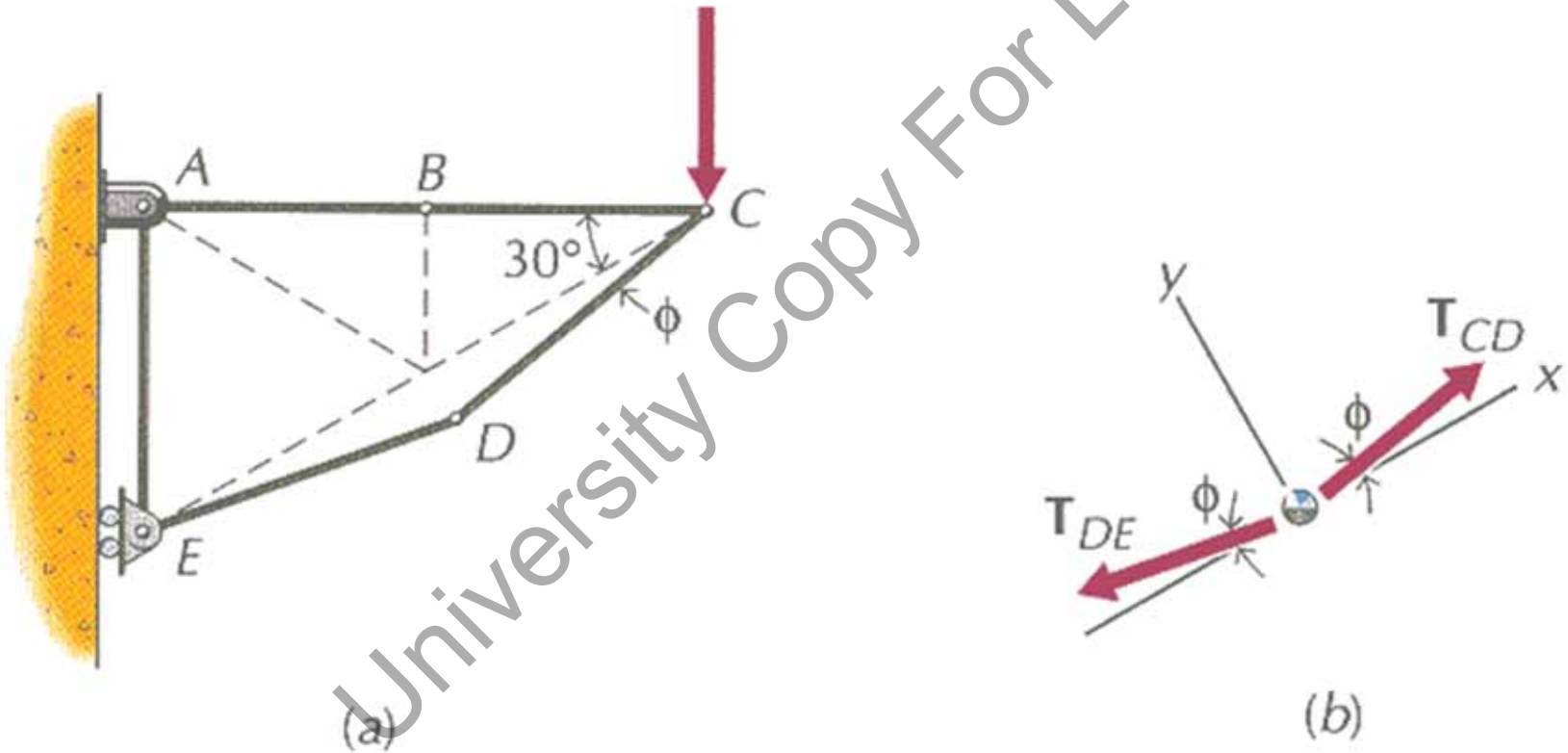


(c) $T_{AD}=0$

University Copy For Library Use

- Estabilidad de estructuras.

A pesar de que la fuerza estática es cero no se pueden eliminar las barras pues cualquier pequeña desalineación de las barras por tolerancias de fabricación o por vibraciones desestabilizaría la estructura. Lo que se podría hacer es sustituir dos barras alineadas por una el doble de larga.



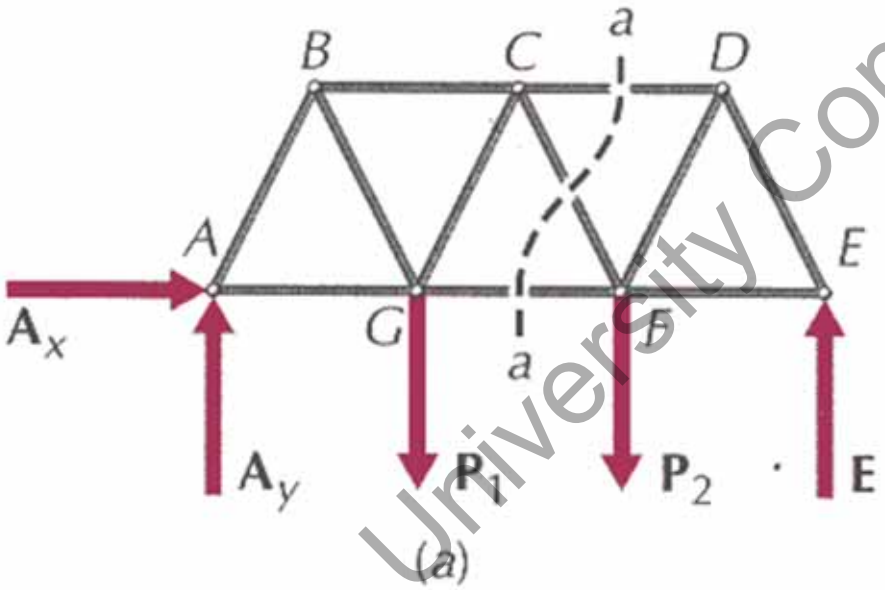
University Copy For Library Use

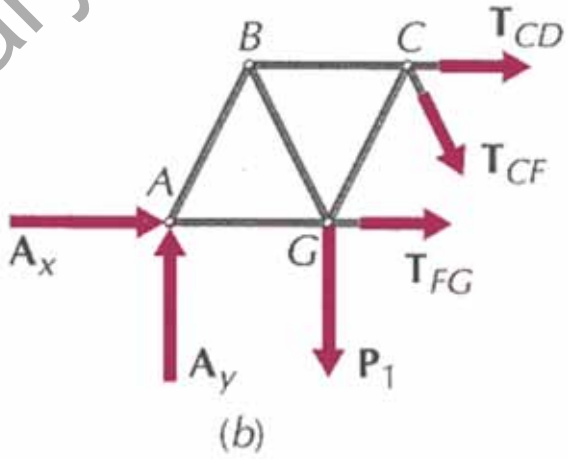
• Método de las secciones.

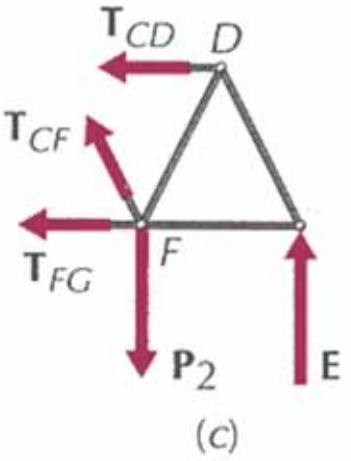
Para resolver la estructura la podemos dividir en secciones teniendo en cuenta:

➢ Armadura dividida en 2 partes que estén en equilibrio

➢ La sección no cortará más de 3 miembros cuyas fuerzas sean desconocidas.







University Copy For Library Use

• Ejercicio para casa Riley 11.33.

Resolver fuerza en apoyos y barras indicando si están a tracción o compresión.

F_b*12=1.5*3+2.5*6+2*9; ⇨F_b=3.125[kN]

F_a+F_b=2+1.5+2.5=6[kN]; ; ⇨F_a=2.875[kN]

α=arctg(3.6/3)=50.19º

En nudo A: F_{ac}sin(α)+F_a=0; ⇨F_{ac}=-3.742[kN] (compr.)

F_{ac}cos(α)+F_{ae}=0; ; ⇨F_{ae}=[redacted][kN] (tracción)

Siguiente: -F_{ce}sin(α)+F_a-1.5=0; ⇨F_{ce}=1.790[kN] (T)

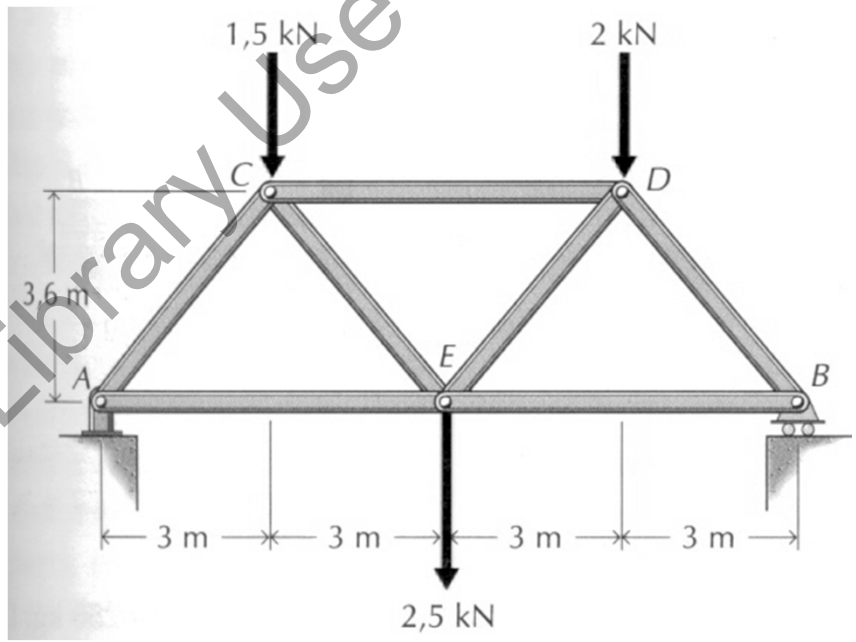
F_{ce}cos(α)+F_{ae}+F_{cd}=0; ; ⇨F_{cd}=[redacted][kN] (C)

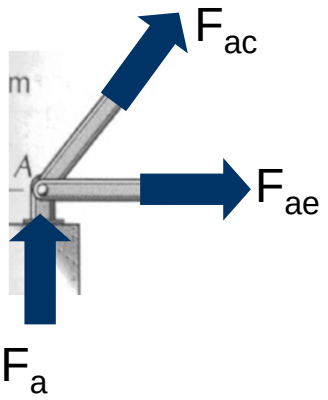
En nudo B: F_{bd}sin(α)+F_b=0; ⇨F_{bd}=-4.064[kN] (C)

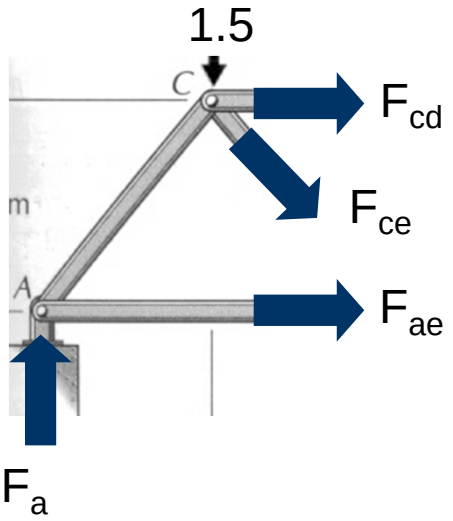
F_{bd}cos(α)+F_{be}=0; ; ⇨F_{be}=[redacted][kN] (tracción)

Siguiente: -F_{de}sin(α)+F_b-2=0; ⇨F_{de}=9.763[kN] (T)

F_{de}cos(α)+F_{be}+F_{cd}=0; ; ⇨F_{cd}=[redacted][kN] (C) Check OK







University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Resolución de estructuras de barras suponiendo aceptan tan sólo carga axial.

➢ Ejemplo de estructura simple resolviendo por secciones.

University Copy For Library Use

S13t.- Hilos Extensibles.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ....

- Repaso sesión anterior.
  - Resolución de estructuras de barras suponiendo aceptan tan sólo carga axial.
  - Ejemplo de estructura simple resolviendo por secciones.

University Copy For Library Use

• Objetivos de esta sesión

➢ Comprender que para resolver estas estructuras necesitamos algún dato extra ya que en 2D hay cuatro incógnitas de reacción en apoyos A Fax y Fay y en B Fbx y Fbyr. Ese dato extra puede ser:

- o Longitud del cable.
- o Punto más bajo del cable.
- o Tensión máxima en el cable

➢ Los cables se calculan a tres niveles:

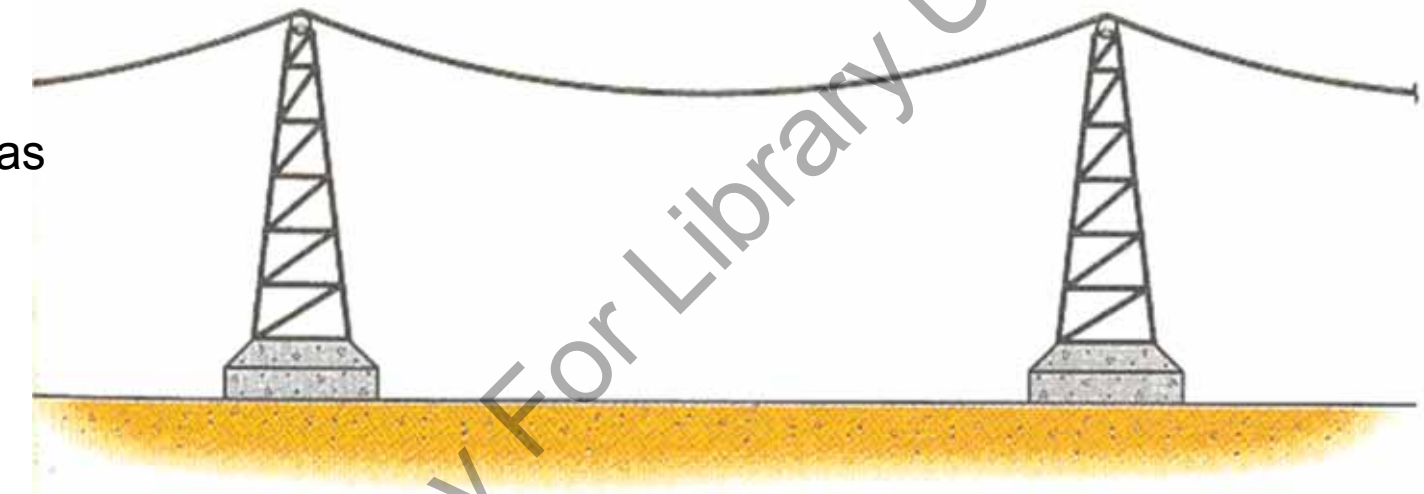
- o Fuerzas puntuales
- o Carga distribuida
- o Peso propio.

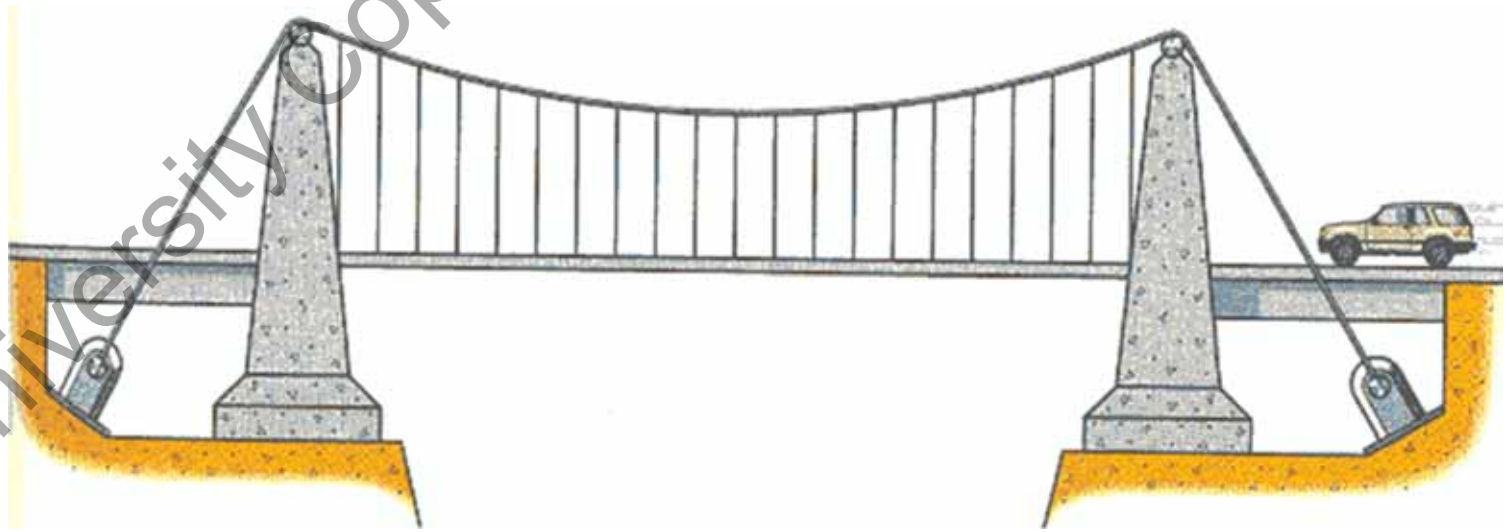
University Copy For Library Use

- Cables que soportan cargas.

Tres tipos:

- Cargas concentradas
- Cargas distribuidas
- Peso propio





University Copy For Library Use

• Cables con cargas concentradas.

A la hora de calcular la fuerza en los apoyos tenemos 4 incógnitas y tan sólo tres ecuaciones de equilibrio en 2D. Para resolver hace falta la longitud del cable-hilo u otro dato como la tensión máxima que está soportando.

$$\sum F_x = 0; \Rightarrow B_x - A_x = 0;$$

$$\sum F_y = 0; \Rightarrow A_y + B_y - P_1 - P_2 - P_3 = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \Rightarrow B_y a - P_1 x_1 - P_2 x_2 - P_3 x_3 = 0;$$

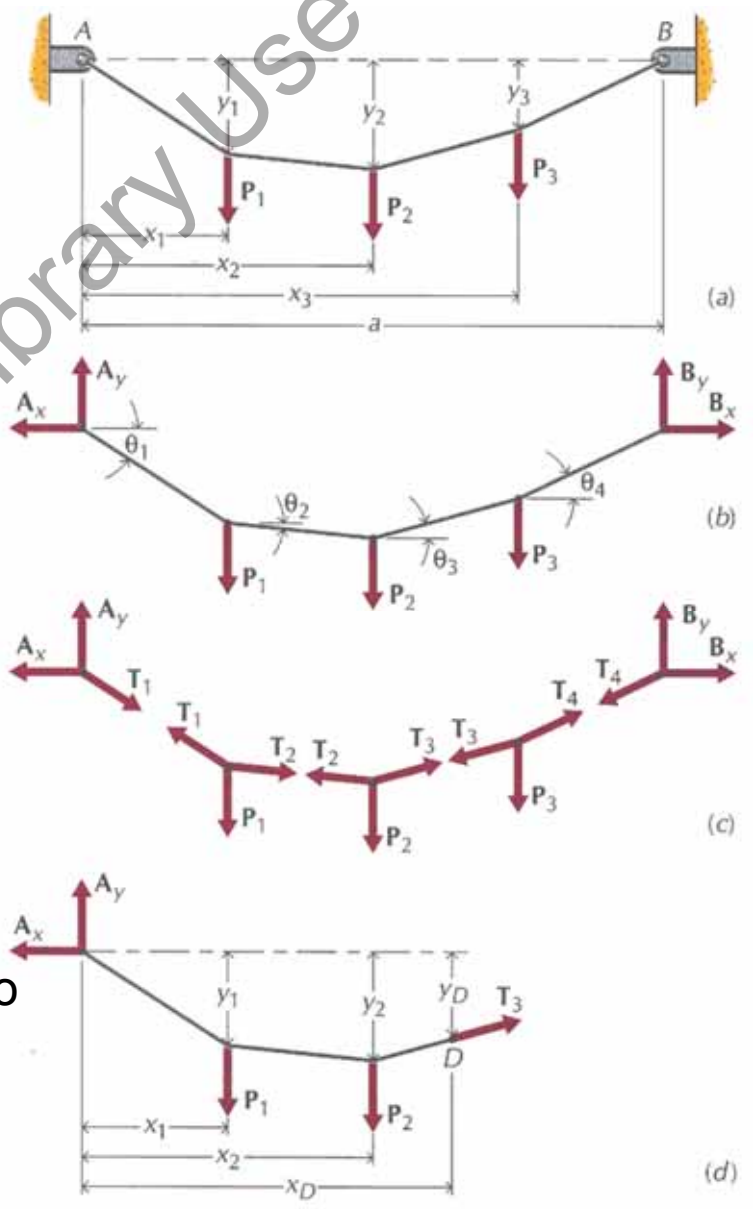
$$A_x = T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2 \cdots = T_n \cos\theta_n = B_x$$

La componente horizontal de la tensión del cable es cte.

La tensión es máxima en los extremos pues el cable está más vertical:

$$T = \frac{T_x}{\cos\theta}$$

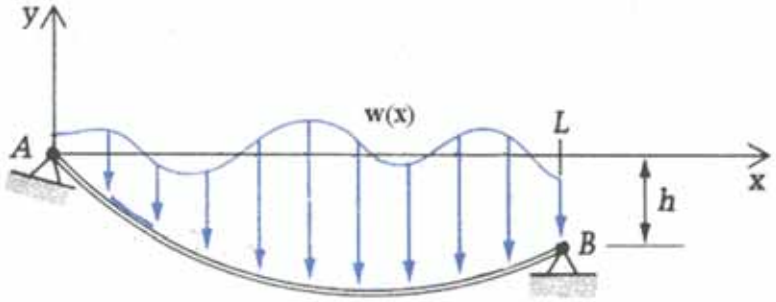
Tan sólo hace falta averiguar el extremo más vertical. Se supone uno y se comprueba es el máximo o se repite para el otro.



University Copy For Library Use

• Cables sometidos a cargas distribuidas.

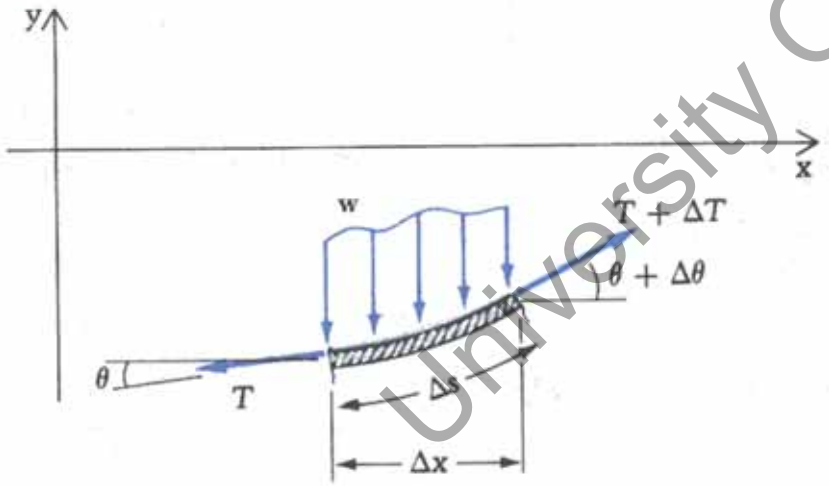
Se repite la problemática anterior a la hora de plantear el equilibrio. Una vez más se demuestra que la componente horizontal de la tensión del cable es constante.



$$\sum F_x = (T+\Delta T)\cos(\theta+\Delta\theta) - T\cos\theta = 0;$$

$$\sum F_y = (T+\Delta T)\,\mathrm{sen}(\theta+\Delta\theta) - T\,\mathrm{sen}\,\theta - w\Delta x = 0;$$

Infinitesimalmente ($\Delta T \to 0$, $\Delta\theta \to 0$, $\cos(d\theta)\approx 1$, $\sin(d\theta)\approx 0$). Desarrollando sen y cos de suma:



$$d(T\cos\theta) = 0;\ \frac{d(T\cos\theta)}{dx} = 0 \Rightarrow T_x = \text{ctte.};$$

$$idem.:\ \frac{d(T\,\mathrm{sen}\,\theta)}{dx} = w \Rightarrow T_y = \int w\,dx$$

University Copy For Library Use

• Ecuación de curvatura del cable.

Se puede hallar la ecuación de la curvatura que seguirá el cable al considerar que la componente horizontal es constante para todo valor de "x".:

$$\text{Con } T = T_x / \cos\theta;$$

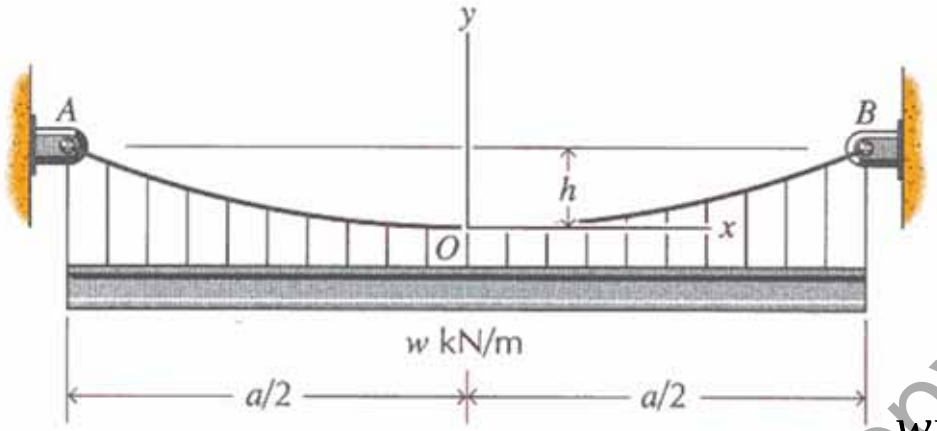
$$\frac{d\left(T_x \tan\theta\right)}{dx} = w; \text{ pero } \tan\theta = dy/dx;$$

$$\frac{d\left(T_x \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = w; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_x} \qquad \Rightarrow y = \frac{w}{2T_x}x^2 + C_1x + C_0$$

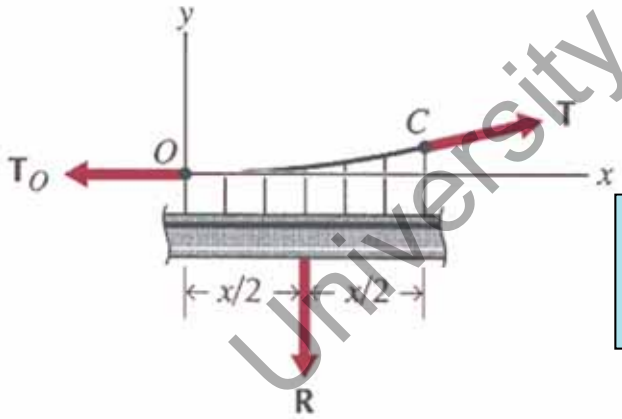
University Copy For Library Use

• Curvatura con ambos anclajes a la misma altura.

Si el cable con carga distribuida está anclado en dos puntos a la misma altura y escogemos unos ejes de coordenadas en el punto más bajo del cable podemos asumir:



(a)



x=0, y=0, $y'(x)$=0 y la solución de la E. D. se encuentra para C_0=, C_1=0:

$$y' = \frac{wx}{T_x} + C_1; C_1 = 0 \text{ porque } y' = 0 \text{ en } x = 0;$$

$$y = \frac{wx^2}{2T_x} + C_1 x + C_2; C_2 = 0 \text{ porque } y = 0 \text{ en } x = 0;$$

$$y = kx^2, \text{ con } k = \frac{w}{2T_x}$$

⇦ parábola

University Copy For Library Use

- Tensiones máximas y mínimas en el cable.

En todo el cable T_x=constante.

Según la ecuación de la curvatura del cable:

$$y = \frac{w}{2T_x}x^2 \Rightarrow y_{a/2} = \frac{w}{2T_x}\frac{a^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{wa^2}{8T_x};}$$

$$\text{en } x = a/2, y = h \Rightarrow \boxed{T_x = \frac{wa^2}{8h}}$$

En x=0 T_y=Tsenθ=$T_x$tanθ=0 pues θ=0 para x=0.

Las tensiones máximas en los extremos.

T_y=$T_x$tanθ=T_xy'=wa/2

$$\boxed{T_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{w^2a^4}{64h^2} + \frac{w^2a^2}{4}} = \frac{wa}{8h}\sqrt{a^2 + (4h)^2}}$$

University Copy For Library Use

• Longitud del cable.

Finalmente para saber la longitud de cable que tenemos que utilizar para obtener estas alturas y estas tensiones máximas.

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx; \text{ pero,}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2kx = \left(\frac{8h}{a^2}\right)x \Rightarrow dL = \sqrt{1 + 4k^2x^2}\, dx;$$

$$L = \int dL = 2\int_0^{a/2} \sqrt{1 + 4k^2x^2}\, dx;$$

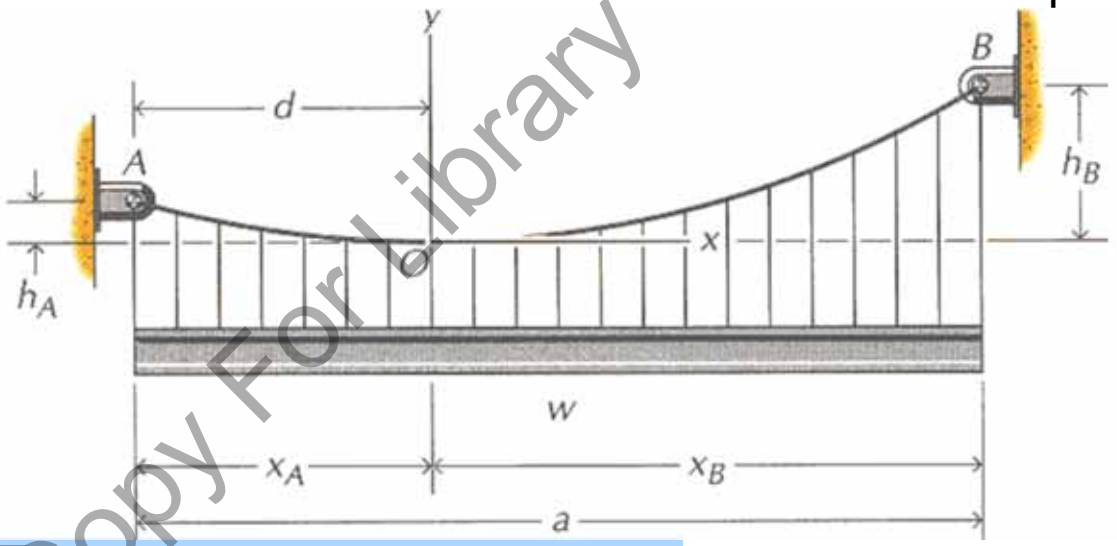
$$L = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 16h^2} + \frac{a^2}{8h}\ln\frac{1}{a}\left(4h + \sqrt{a^2 + 16h^2}\right) \approx a\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{h}{a}\right)^4 + \ldots\right]$$

Esta ecuación de la longitud se resolverá por cálculo numérico, con iteraciones, para poder despejar "*h*" o se aproxima por la serie.

University Copy For Library Use

• Curvatura con anclajes a diferente altura.

Si los anclajes están a diferente altura el cálculo lo dividimos en dos tramos desde el punto más bajo.



$$x_A = \frac{\sqrt{h_B h_A} - h_A}{h_B - h_A} a;\ x_B = \frac{h_B - \sqrt{h_B h_A}}{h_B - h_A} a;$$ (Se deduce de $y=kx^2$)

$$T_x = T_O = \frac{wx^2}{2y};$$

$$T_A = wd_A\left[1+\frac{d_A^2}{4h_A^2}\right]^{1/2}; T_B = wd_B\left[1+\frac{d_B^2}{4h_B^2}\right]^{1/2} \quad \text{con } dA = |x_A|; dB = |x_B|$$

University Copy For Library Use

- Longitud de cables con anclajes a diferente altura.

Para calcular la longitud también debemos considerar los dos tramos.

Para anclajes a misma altura:

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 16h^2} + \frac{a^2}{8h}\ln\frac{1}{a}\left(4h + \sqrt{a^2 + 16h^2}\right)$$

Para anclajes a dos alturas:

$$L_{OB} = \frac{1}{2}\sqrt{d_B^2 + 4h_B^2} + \frac{d_B^2}{4h_B}\ln\frac{1}{d_B}\left(2h_B + \sqrt{d_B^2 + 4h_B^2}\right)$$

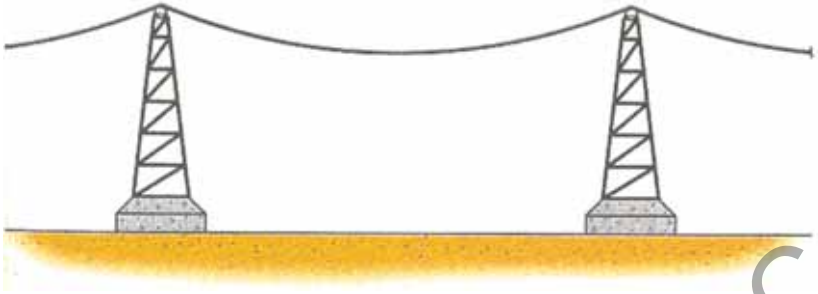
$$L_{OA} = \frac{1}{2}\sqrt{d_A^2 + 4h_A^2} + \frac{d_A^2}{4h_A}\ln\frac{1}{d_A}\left(2h_A + \sqrt{d_A^2 + 4h_A^2}\right)$$

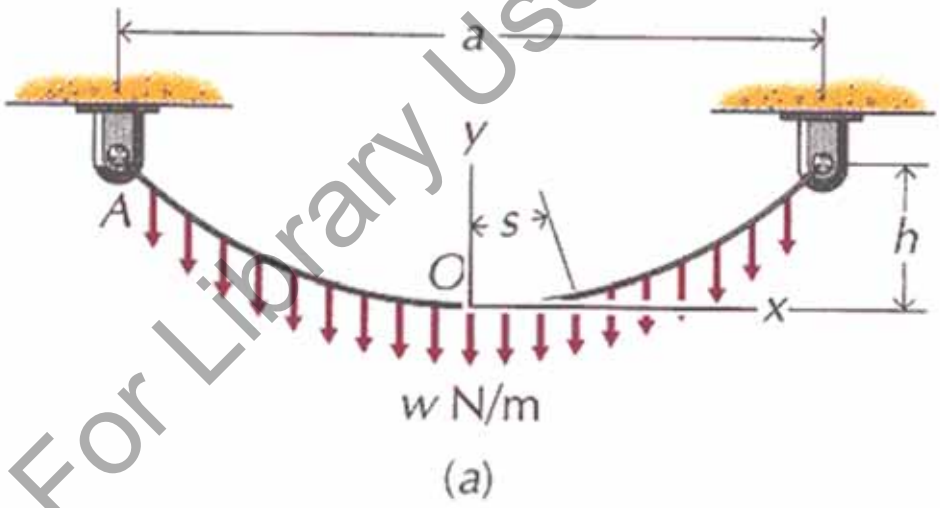
$$L = L_{OA} + L_{OB}$$

University Copy For Library Use

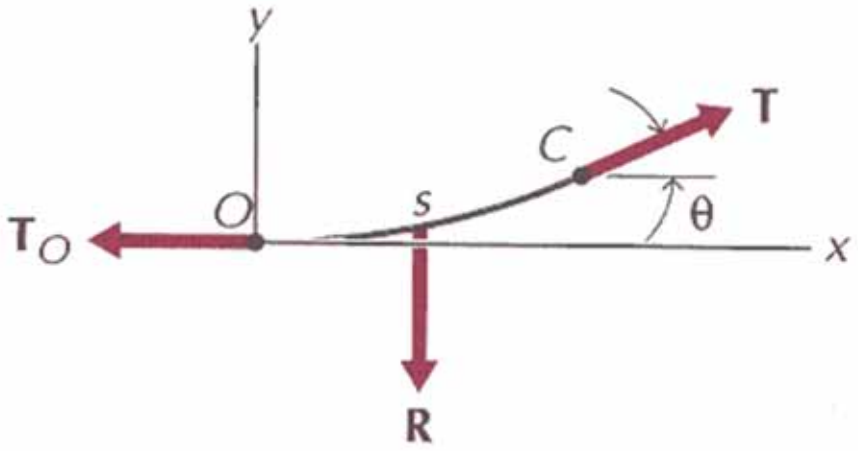
- Peso propio.

La carga distribuida típica en el cálculo de catenarias es el peso propio. En este caso la carga no está distribuida en "x". Está distribuida en la longitud "L" ("s" en las figuras).





(a)

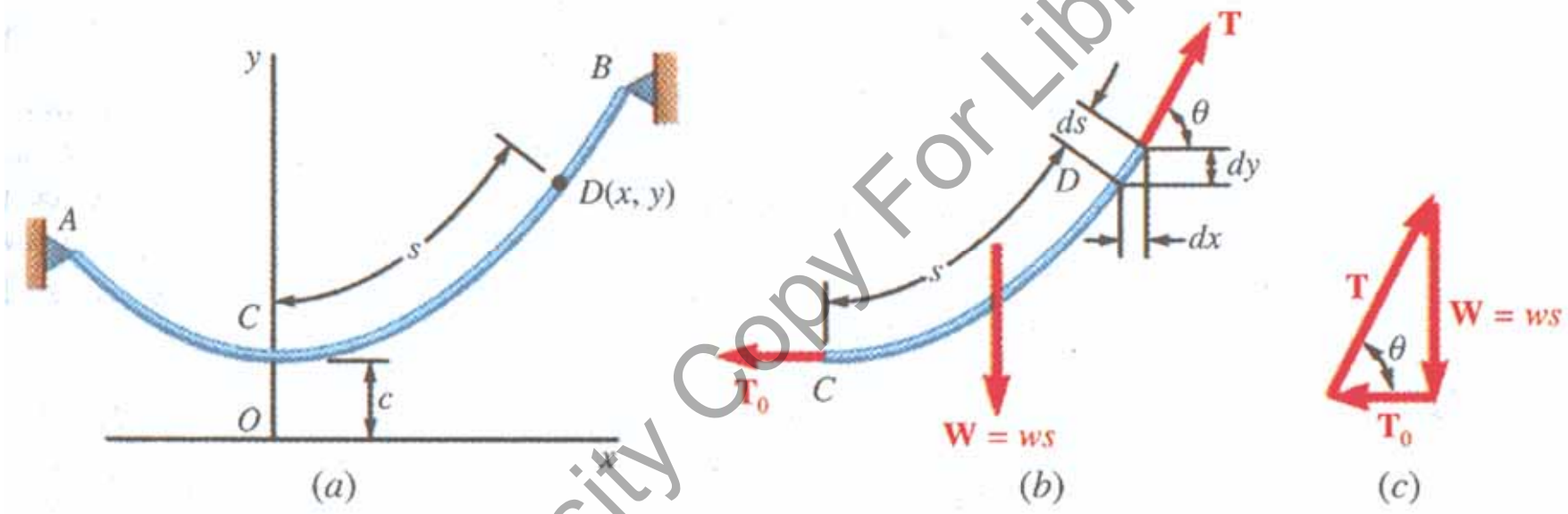


(b)

University Copy For Library Use

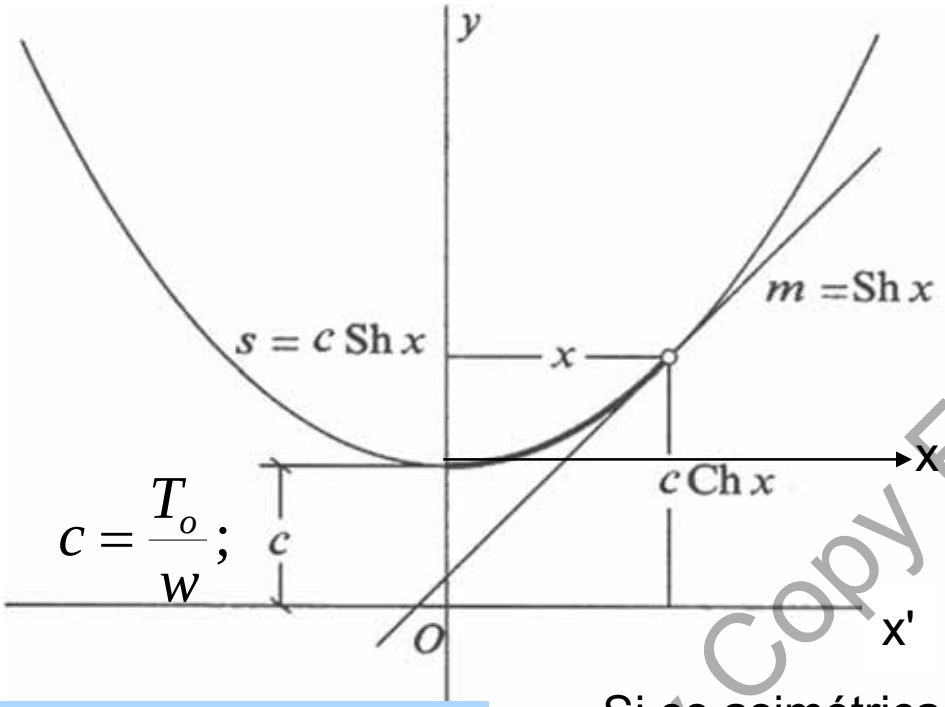
- Modelo matemático de la deformación.

El modelo matemático repite los pasos anteriores considerando un diferencial de longitud.

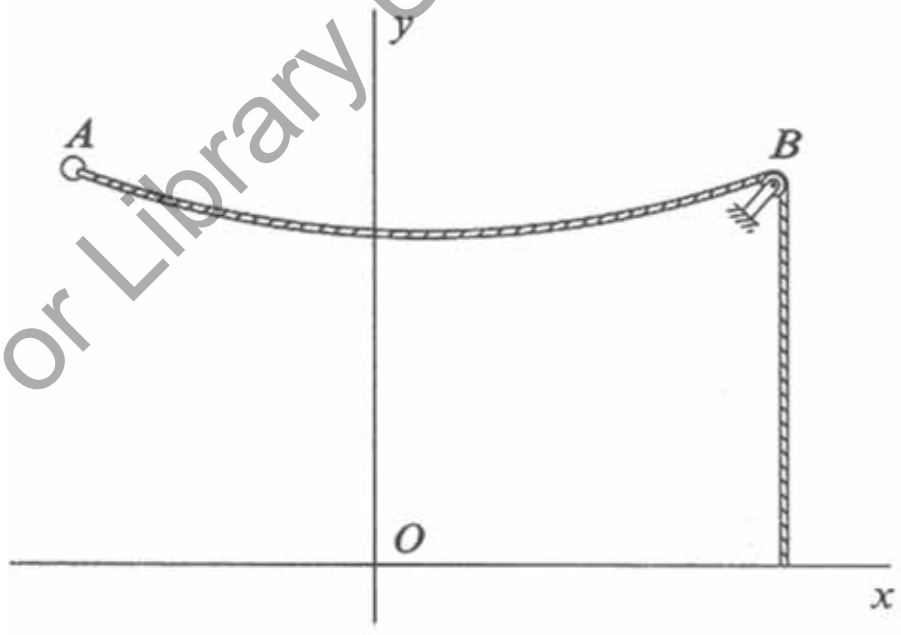


University Copy For Library Use

- Ejemplo de catenaria.



$$c = \frac{T_o}{w};$$



$$y = \frac{T_o}{w}\cosh\left(\frac{w}{T_o}x - 1\right);$$

$$L = 2s = \frac{T_o}{w}\,senh\left(\frac{w}{T_o}x\right)$$

Si es asimétrica

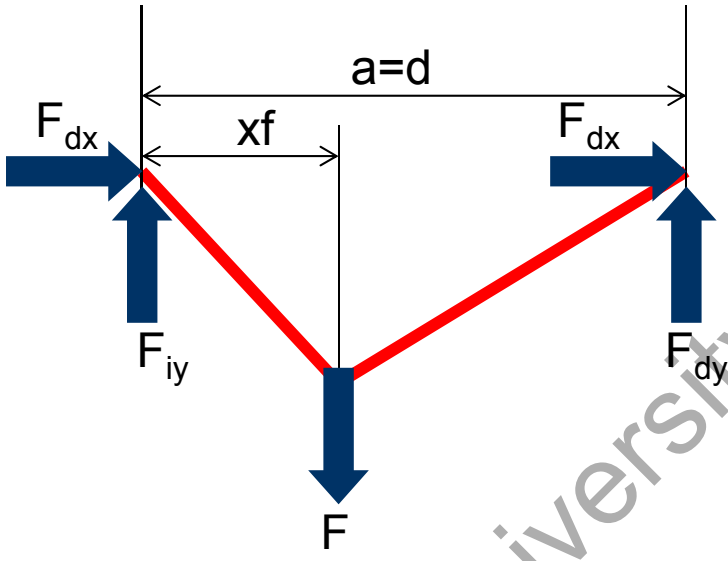
$$L = S_A + S_B = \frac{T_o}{w}\,senh\left(\frac{w}{T_o}x_A\right) + \frac{T_o}{w}\,senh\left(\frac{w}{T_o}x_B\right)$$

$$T = T_o\cosh\left(\frac{w}{T_o}x\right) = T_o + wy$$

University Copy For Library Use

• Ejemplo de cable con carga concentrada.

Supongamos un cable de longitud "L" entre dos apoyos a misma altura separados una distancia "d". Se aplica una carga "F" a una distancia "xf" del primer apoyo. Dar la altura "h" que baja el cable. (ignorar peso).



Cable point load.

Assume L, d, xf, F .

```
> restart; Fiy:=F*(d-xf)/d;Fdy:=F*(xf)/d;
```

$$Fiy := \frac{F(d-xf)}{d}$$

$$Fdy := \frac{F\,xf}{d}$$

```
> eq1:=L-(xf^2+h^2)^0.5+((d-xf)^2+h^2)^0.5;
```

$$eq1 := L - (xf^2 + h^2)^{.5} + ((d-xf)^2 + h^2)^{.5}$$

```
> eq2:=solve(eq1,h)[1];
```

$$eq2 := .5000000000\,\frac{\sqrt{-2.\,d^2L^2 + 4.\,d\,xf\,L^2 - 4.\,xf^2L^2 + 4.\,d^2xf^2 + L^4 + d^4 - 4.\,d^3\,xf}}{L}$$

```
> subs({d=10,L=kd*10,xf=kf*10},eq2);
```

$$.05000000000\,\frac{\sqrt{-20000.\,kd^2 + 40000.\,kf\,kd^2 - 40000.\,kf^2kd^2 + 40000.\,kf^2 + 10000\,kd^4 + 10000 - 40000.\,kf}}{kd}$$

```
> subs({d=10,L=kd*10,xf=0.5*10},eq2);
```

$$.05000000000\,\frac{\sqrt{-10000.00\,kd^2 + 10000\,kd^4}}{kd}$$

```
> subs({d=10,L=1.2*10,xf=kf*10},eq2);
```

$$.04166666666\,\sqrt{1936.0000 + 17600.00\,kf - 17600.00\,kf^2}$$

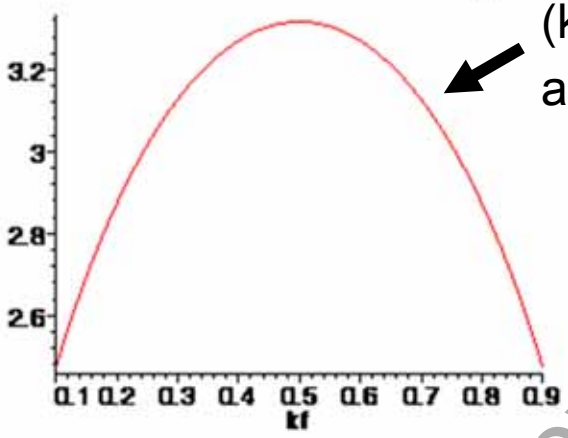
```
> subs({d=10,L=1.2*10,xf=0.5*10},eq2);
```

3.316624790

University Copy For Library Use

- Ejemplo de cable con carga concentrada.

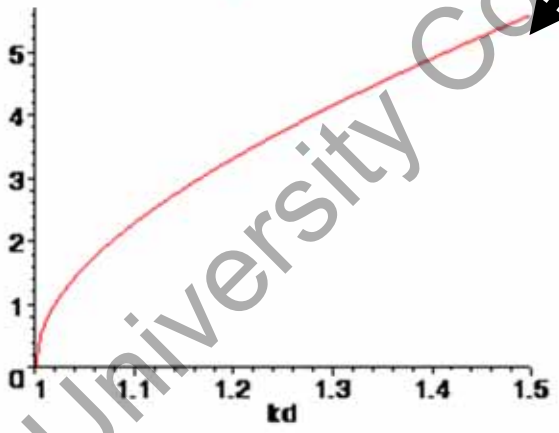
```
> plot(subs({d=10,L=1.2*10,xf=kf*10},eq2), kf=0.1..0.9);
```



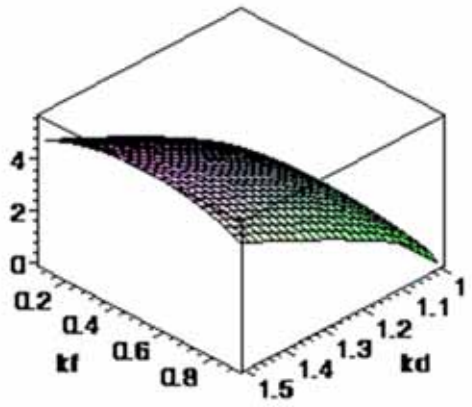
Altura conseguida para un cable un 20% más largo (kd=1.2) que separación en función de la distancia a apoyo (kf). Máxima si fuerza en centro.

Altura conseguida para una fuerza aplicada en el centro (kf=0.5) en función de longitud del cable. Si L=d (kd=1) no baja el cable rígido.

```
> plot(subs({d=10,L=kd*10,xf=0.5*10},eq2), kd=1.0..1.5);
```

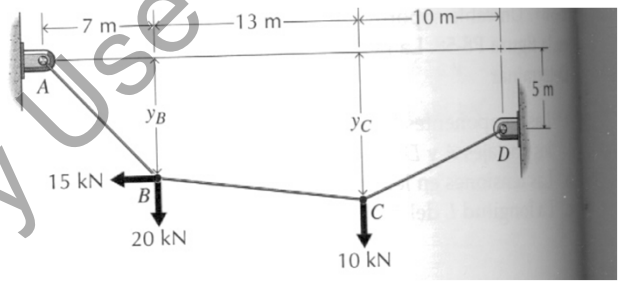



```
> plot3d(subs({d=10,L=kd*10,xf=kf*10},eq2),
  kd=1.0..1.5, kf=0.1..0.9,axes=boxed);
```



University Copy For Library Use

- Riley 8.66 para casa.



Si la tensión máxima es 40KN determinar reacciones, distancias verticales en B y en C y longitud del cable.

ΣF_x:

ΣF_y:

ΣM_A:

supo

Acabamos con 4 ecuaciones con 5 incógnitas pero la pendiente ha de ser la de la tensión: $y_B/7=-A_y/A_x$. ⇨ $y_B=-7*A_y/A_x$. y de esta forma tenemos una ecuación extra para poder resolver.

Comprobamos que T_A es menor que T_D y por tanto hay que rehacer suponiendo T en D.

Supo

ΣF_x:

ΣF_y:

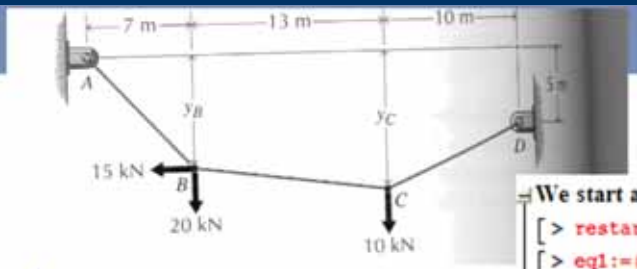
ΣM_A:

Sol:

$A_x=24.2[kN]\leftarrow$, $A_y=22.0[kN]\uparrow$, $D_x=39.2[kN]\rightarrow$, $D_y=7.98[kN]\uparrow$, $y_B=6.47[m]$, $y_C=7.04[m]$, $L=32.7[m]$

University Copy For Library Use

- Riley 8.66.



We start assuming T is maximum for A

```
> restart:
> eq1:=(40^2-Ay^2)^.5+Dx-15=0;
```

$$eq1 := (1600 - Ay^2)^{.5} + Dx - 15 = 0$$

```
> eq2:=Ay+Dy-20-10=0;
```

$$eq2 := Ay + Dy - 30 = 0$$

```
> eq3:=5*Dx+30*Dy+7*(Ay/(40^2-Ay^2)^.5)*15-7*20-20*10=0;
```

$$eq3 := 5\,Dx + 30\,Dy + \frac{105\,Ay}{(1600 - Ay^2)^{.5}} - 340 = 0$$

```
> eqns:={eq1,eq2,eq3};
```

$$eqns := \left\{(1600 - Ay^2)^{.5} + Dx - 15 = 0,\ 5\,Dx + 30\,Dy + \frac{105\,Ay}{(1600 - Ay^2)^{.5}} - 340 = 0,\ Ay + Dy - 30 = 0\right\}$$

```
> sols:=solve(eqns,{Ay,Dx,Dy});
```

$$sols := \{Ay = -39.93370681,\ Dy = 69.93370681,\ Dx = 12.69803125\},$$
$$\{Dy = 13.27901588,\ Ay = 16.72098412,\ Dx = -21.33742823\},$$
$$\{Dy = -9.363307102,\ Dx = 7.891550523,\ Ay = 39.36330710\}$$

```
> Dx:=subs(sols[1],Dx);
```

$$Dx := 12.69803125$$

```
> Dy:=subs(sols[1],Dy);
```

$$Dy := 69.93370681$$

```
> Ay:=subs(sols[1],Ay);
```

$$Ay := -39.93370681$$

```
> Ax:=(40^2-Ay^2)^.5;
```

$$Ax := 2.301968723$$

```
> TA:=(Ax^2+Ay^2)^.5;
```

$$TA := 40.00000000$$

```
> TD:=(Dx^2+Dy^2)^.5;
```

$$TD := 71.07210473$$

```
> yB:=-7*Ay/Ax;
```

$$yB := 121.4334256$$

```
> yC:=5+10*Dy/Dx;
```

$$yC := 60.07444850$$

```
> L=(7^2+yB^2)^.5+(5^2+(yC-yB)^2)^.5+(10^2+(5-yC)^2)^.5;
```

$$L = 239.1723228$$

We start assuming T is maximum for D

```
> restart:
> eq1:=(40^2-Dy^2)^.5+Ax-15=0;
```

$$eq1 := (1600 - Dy^2)^{.5} + Ax - 15 = 0$$

```
> eq2:=Ay+Dy-20-10=0;
```

$$eq2 := Ay + Dy - 30 = 0$$

```
> eq3:=5*(40^2-Ay^2)^.5)+30*Dy+7*(Ay/Ax)*15-7*20-20*10=0;
```

$$eq3 := 5\,(1600 - Ay^2)^{.5} + 30\,Dy + \frac{105\,Ay}{Ax} - 340 = 0$$

```
> eqns:={eq1,eq2,eq3};
```

$$eqns := \left\{(1600 - Dy^2)^{.5} + Ax - 15 = 0,\ Ay + Dy - 30 = 0,\ 5\,(1600 - Ay^2)^{.5} + 30\,Dy + \frac{105\,Ay}{Ax} - 340 = 0\right\}$$

```
> sols:=solve(eqns,{Ay,Ax,Dy});
```

$$sols := \{Ax = -24.02569213,\ Dy = 8.774699626,\ Ay = 21.22530037\},$$
$$\{Dy = 37.39213573,\ Ay = -7.392135726,\ Ax = .7933752826\}$$

```
> Ax:=subs(sols[1],Ax);
```

$$Ax := -24.02569213$$

```
> Dy:=subs(sols[1],Dy);
```

$$Dy := 8.774699626$$

```
> Ay:=subs(sols[1],Ay);
```

$$Ay := 21.22530037$$

```
> Dx:=(40^2-Dy^2)^.5;
```

$$Dx := 39.02569213$$

```
> TA:=(Ax^2+Ay^2)^.5;
```

$$TA := 32.05849744$$

```
> TD:=(Dx^2+Dy^2)^.5;
```

$$TD := 40.00000000$$

```
> yB:=-7*Ay/Ax;
```

$$yB := 6.184092503$$

```
> yC:=5+10*Dy/Dx;
```

$$yC := 7.248441769$$

```
> L=(7^2+yB^2)^.5+(5^2+(yC-yB)^2)^.5+(10^2+(5-yC)^2)^.5;
```

$$L = 24.70208309$$

Sol:

A_x=24.2[kN]←, A_y=22.0[kN]↑, D_x=39.2[kN]→, D_y=7.98[kN]↑, y_B=6.47[m], y_C=7.04[m], L=32.7[m]

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Cálculo de cables con cargas concentradas y cargas distribuidas en la separación enre anclajes o en la longitud del cable como en el caso de peso propio.

University Copy For Library Use

S14t.- Ejercicios de Hilos Extensibles.

Mejora 1415 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.

➢ Cálculo de cables con cargas concentradas y cargas distribuidas como en el caso de peso propio.

University Copy For Library Use

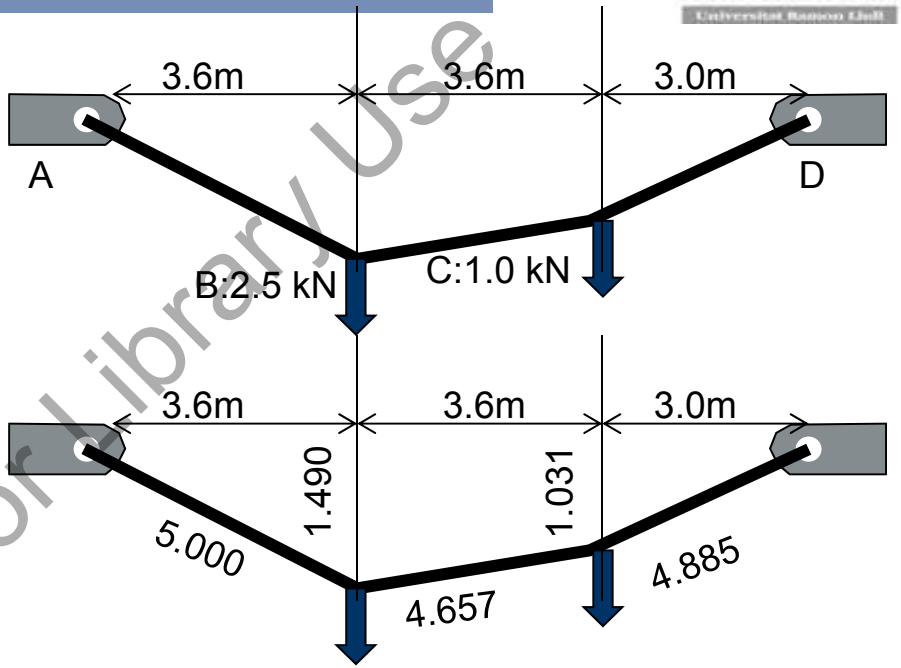
Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Objetivos de esta sesión

➢ Realizar ejercicios de cálculos de tensiones en cables.

University Copy For Library Use

• Problema ejemplo Riley 8.7.



Determinar tensiones y posiciones del cable si sabemos que la máxima tensión es de 5 kN.

Equilibrio:

$\Sigma M_a=0 \Rightarrow F_{dy}=(2.5*3.6+1.0*7.2)/10.2=1.588$ [kN];

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_{ay}=2.5+1-1.588=1.912$[kN];

Máxima tensión en tramo AB:

$5=\sqrt{(F^2_{ay}+F^2_{ax})} \Rightarrow F_{ax}=-4.620$[kN]; (signo por gráfica)

por equilibrio $F_{dx}=-F_{ax}=4.620$[kN];

ángulo en A $\alpha_{ab}=arctg(F_{ay}/F_{ax})=22.48º$ $\Rightarrow y_b=3.6*\tan(\alpha_{ab})=1.490$

ángulo en D $\alpha_{dc}=arctg(F_{dy}/F_{dx})=18.97º$ $\Rightarrow y_c=3.0*\tan(\alpha_{dc})=1.031$

Tensión en tramo BC:

$2.5=F_{ay}+T_{bc}\sin(\alpha_{bc}) \Rightarrow T_{bc}=(2.5-1.912)/\sin(\alpha_{bc})$;

$|F_{ax}|=4.62=T_{bc}\cos(\alpha_{bc})$; $\Rightarrow \tan(\alpha_{bc})=(2.5-1.912)/4.62 \Rightarrow \alpha_{bc}=7.256º \Rightarrow T_{bc}=4.657$ [kN]

$\Rightarrow yc=1.490-3.6*\tan(\alpha_{bc})=1.031$ Check OK

Tensión en tramo CD:

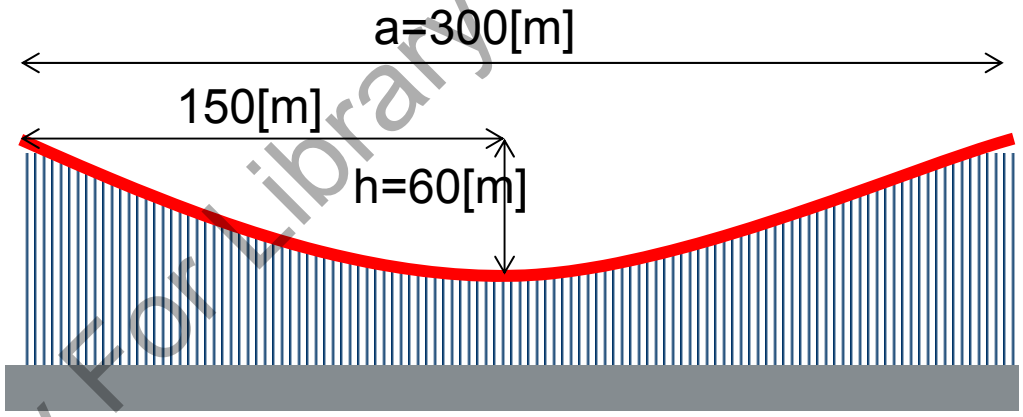
$T_{cd}=\sqrt{(F^2_{dy}+F^2_{dx})}=\sqrt{(1.588^2+4.62^2)} \Rightarrow T=4.885$[kN];

University Copy For Library Use

• Ejercicio Meriam Sample 5.16.

Encontrar la tensión máxima, tensión en punto más bajo y longitud de cable necesario.

Primero encontramos la tensión en punto bajo T_o.=$wa^2/(8h)$
12*9.81[N/m]*300^2[m^2]/(8*60[m])=
22070[N]



w=12[kg/m]

$$T_{máx} = \sqrt{\frac{w^2 a^4}{64\,h^2} + \frac{w^2 a^2}{4}} = \frac{wa}{8h}\sqrt{a^2 + (4h)^2}$$

Encontramos la tensión máxima: T_{max}.=28260[N]

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 16h^2} + \frac{a^2}{8h}\ln\frac{1}{a}\left(4h + \sqrt{a^2 + 16h^2}\right) \approx a\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{h}{a}\right)^4 + \ldots\right]$$

Encontramos la Longitud del cable: L=329.47[m],
si calculamos cable triangular 2*√(150^2+60^2)=323.1 < 329.47 como era de esperar.

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios simples de cables con fuerzas concentradas y distribuidas.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

S15t.- Control Estática.

Mejora 1415 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios simples de cables con fuerzas concentradas y distribuidas.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos de esta sesión

➢ Realizar un control para finalizar el temario de estática que permita al alumno conocer su nivel de preparación y al profesor la capacidad de seguimiento del alumnado de la asignatura.

University Copy For Library Use

SOLUCIONES: 24.10.2013

1) Dada la viga con w=2?00[N/m], calcular:

1.0p. Reacciones en apoyo x=0.

A_y=3.5w, M=-13.5w

1.0p. Cortante V y momento M en x(0,2).

V=3.5w, M=w(3.5x-13.5), $M_{(2)}$=-7.5w

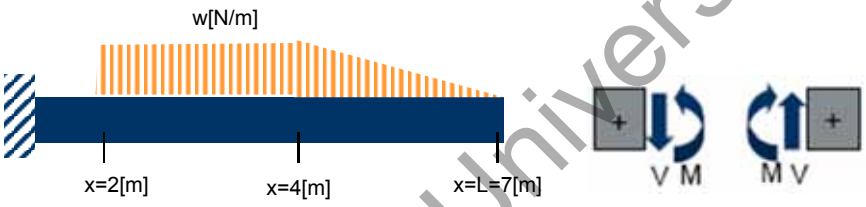
1.0p. Cortante V y momento M en x(2,4)

V=w(5.5-x), $V_{(4)}$=1.5w, M=w(3.5x-13.5-(x-2)^2/2) , $M_{(4)}$=-1.5w

1.0p. Cortante V y momento M en x(4,7).

V=w(7-x)^2/6, $V_{(4)}$=1.5w, M=-w(7-x)^3/18 , $M_{(4)}$=-1.5w

1.0p. Gráfica de V y M.



2) Dada la compuerta triangular de lados AB=AC=6[m], con AB en superficie de agua para α=6?[º] calcular:

1.0p. Fuerza resultante en compuerta.

F=δghA=1000*9.805*h/3*sin(α)*b*h/2

2.0p. Posición y de aplicación de fuerza hidr.

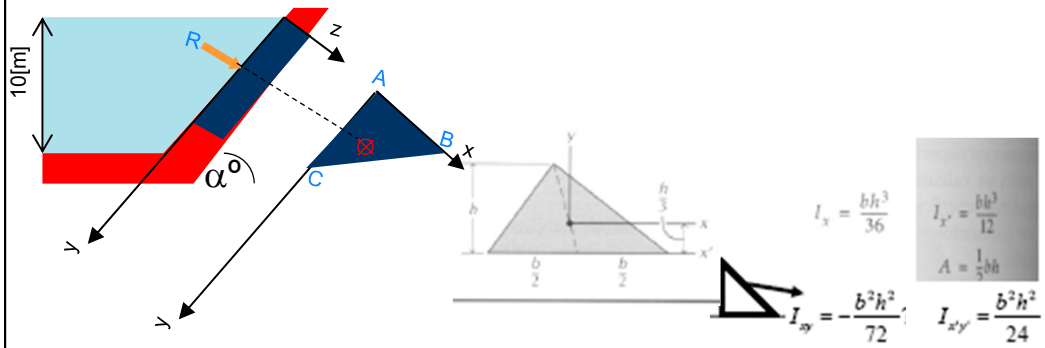
y=b*h^3/(12*h/3*b*h/2)=h/2=3

1.0p. Posición x de aplicación de fuerza hidr.

x=b^2*h^2/(24*h/3*b*h/2)=b/4=1.5

1.0p. Reacciones en A, B y C que evitan se abra la compuerta.

C=F*(h/2)/h=F/2, B=F*(b/4)/b=F/4, A=F-B-C=F/4



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 24.10.2013

1) Dada la viga con w=2?00[N/m], calcular:

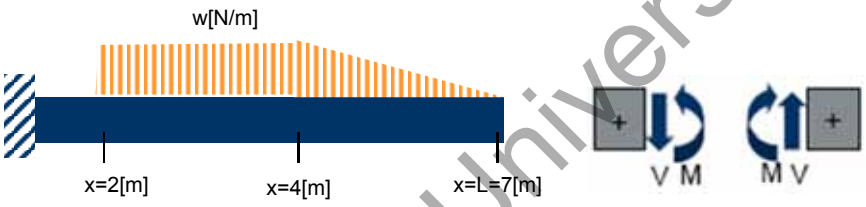
1.0p. Reacciones en apoyo x=0.

1.0p. Cortante V y momento M en x(0,2).

1.0p. Cortante V y momento M en x(2,4)

1.0p. Cortante V y momento M en x(4,7).

1.0p. Gráfica de V y M.



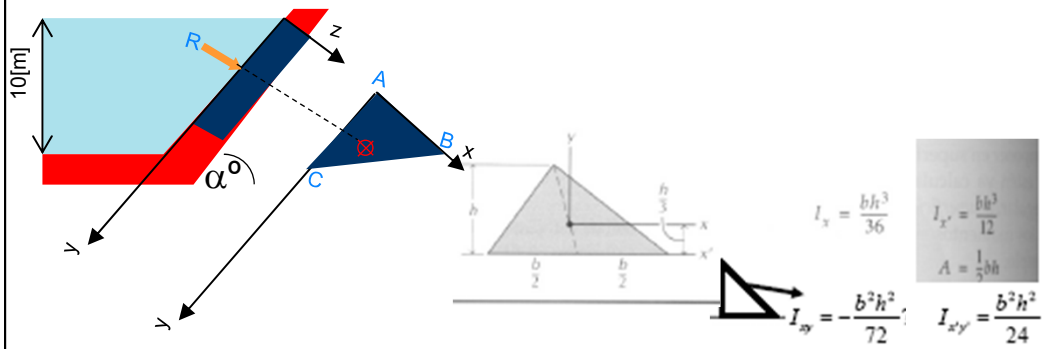
2) Dada la compuerta triangular de lados AB=AC=6[m], con AB en superficie de agua para α=6?[º] calcular:

1.0p. Fuerza resultante en compuerta.

2.0p. Posición y de aplicación de fuerza hidr.

1.0p. Posición x de aplicación de fuerza hidr.

1.0p. Reacciones en A, B y C que evitan se abra la compuerta.



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 23.10.2012

1) Dada la viga con w=1?00[N/m], calcular:

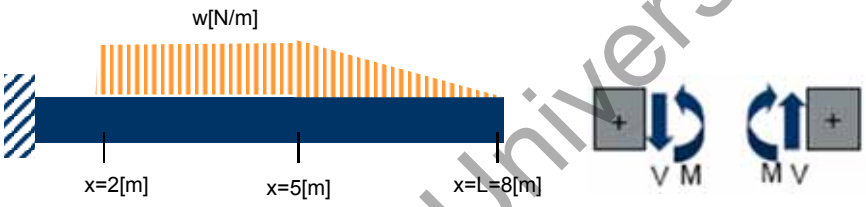
1.0p. Reacciones en apoyo x=0.

1.0p. Cortante V y momento M en x(0,2).

1.0p. Cortante V y momento M en x(2,5)

1.0p. Cortante V y momento M en x(5,8).

1.0p. Gráfica de V y M.



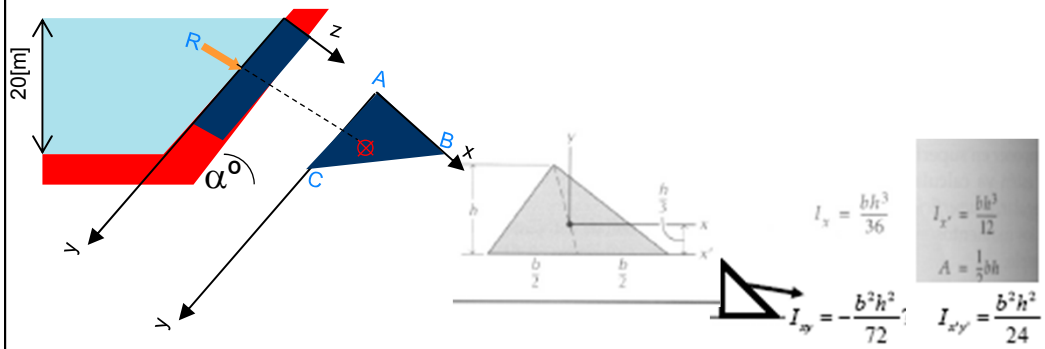
2) Dada la compuerta triangular de lados AB=AC=12[m], con AB en superficie de agua para α=7?[º] calcular:

1.0p. Fuerza resultante en compuerta.

2.0p. Posición y de aplicación de fuerza hidr.

1.0p. Posición x de aplicación de fuerza hidr.

1.0p. Reacciones en A, B y C que evitan se abra la compuerta.



University Copy For Library Use

SOLUCIONES: 23.10.2012

1) Dada la viga con w=1?00[N/m], calcular:

1.0p. Reacciones en apoyo x=0.

A_y=4.5w, M=19.5w

1.0p. Cortante V y momento M en x(0,2).

V=w4.5, M=w(4.5x-19.5), $M_{(2)}$=-7.5w

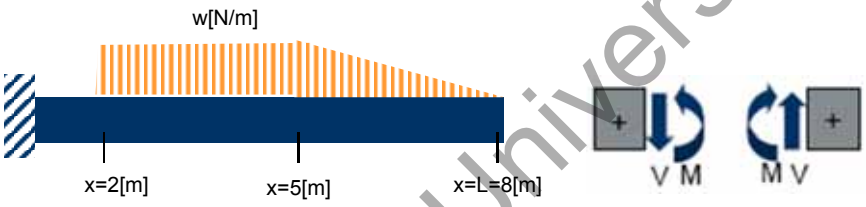
1.0p. Cortante V y momento M en x(2,5)

V=w(6.5-x), $V_{(5)}$=1.5w, M=w(4.5x-19.5-$(x-2)^2$/2) , $M_{(5)}$=-1.5w

1.0p. Cortante V y momento M en x(5,8).

V=w$(8-x)^2$/6, $V_{(5)}$=1.5w, M=-w$(8-x)^3$/18 , $M_{(5)}$=-1.5w

1.0p. Gráfica de V y M.



2) Dada la compuerta triangular de lados AB=AC=12[m], con AB en superficie de agua para α=7?[º] calcular:

1.0p. Fuerza resultante en compuerta.

F=δghA=1000*9.805*h/3*sin(α)*b*h/2

2.0p. Posición y de aplicación de fuerza hidr.

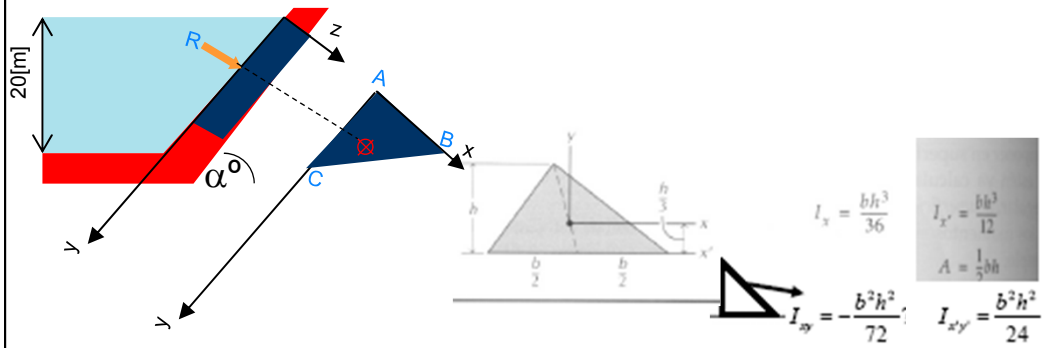
y=b*h^3/(12*h/3*b*h/2)=h/2=6

1.0p. Posición x de aplicación de fuerza hidr.

x=b^2*h^2/(24*h/3*b*h/2)=b/4=3

1.0p. Reacciones en A, B y C que evitan se abra la compuerta.

C=F*(h/2)/h=F/2, B=F*(b/4)/b=F/4, A=F-B-C=F/4



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 21.10.2011

1) Dada la viga en que la carga empiez en x=2 hasta x=L=8 con w=1?00[N/m], calcular:

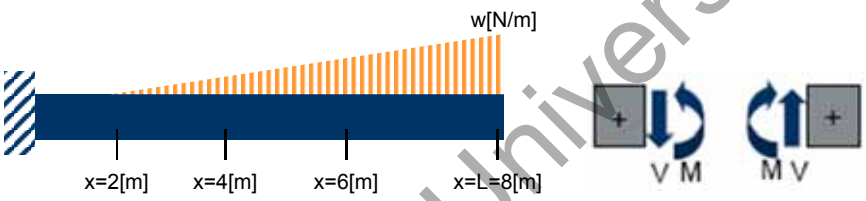
1.0p. Reacciones en apoyo x=0.

1.0p. Cortante V y momento M en x=2.

1.0p. Cortante V y momento M en x=4

1.0p. Cortante V y momento M en x=6.

1.0p. Gráfica de V y M.



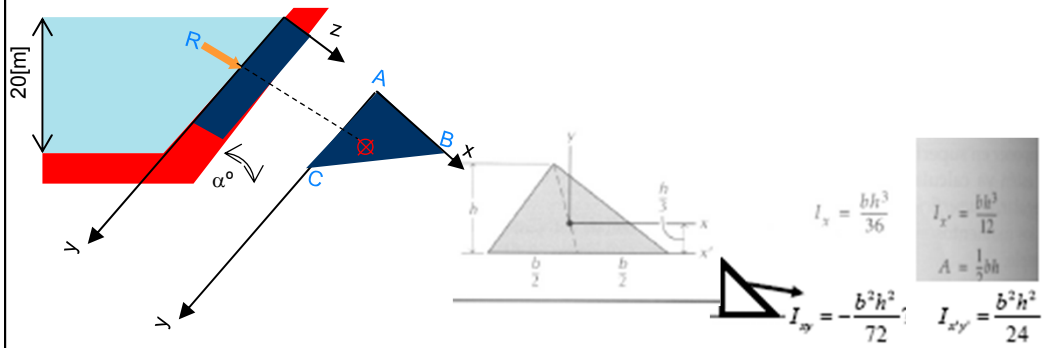
2) Dada la compuerta triangular de lados b=h=6[m] de la figura para a=8?[º] calcular:

1.0p. Fuerza resultante en compuerta.

2.0p. Posición y de aplicación de fuerza hidr.

1.0p. Posición x de aplicación de fuerza hidr.

1.0p. Reacciones en A, B y C que evitan se abra la compuerta.



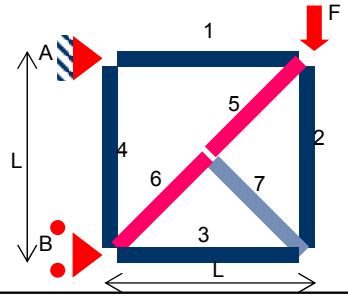
University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 02.11.2010

1) Dada la estructura F=1?00[N], L=3[m] calcular:

1p. Reacciones en A y B.

1.5p. Tracción (+) o compresión (-) de todas las barras.



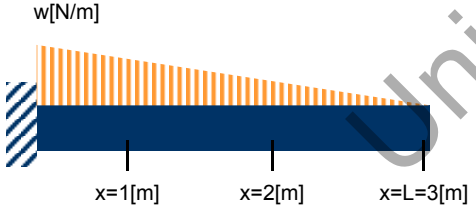
2) Dada la viga w=1?00[N/m], L=3[m] calcular:

0.5p. Reacciones en apoyo x=0.

0.5p. Cortante V y momento M en x=1.

0.5p. Cortante V y momento M en x=2.

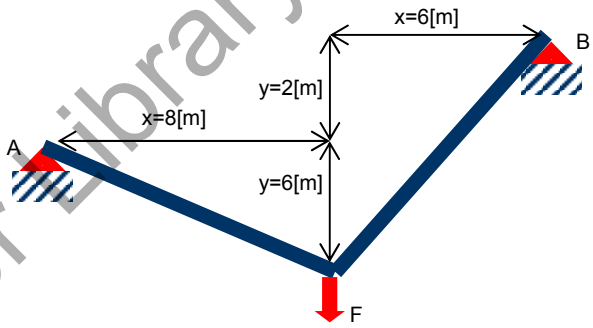
1p. Gráfica de V y M.



3) Dado el cable de la figura con F=1?00[N]:

1.5p. Tensión máxima cable.

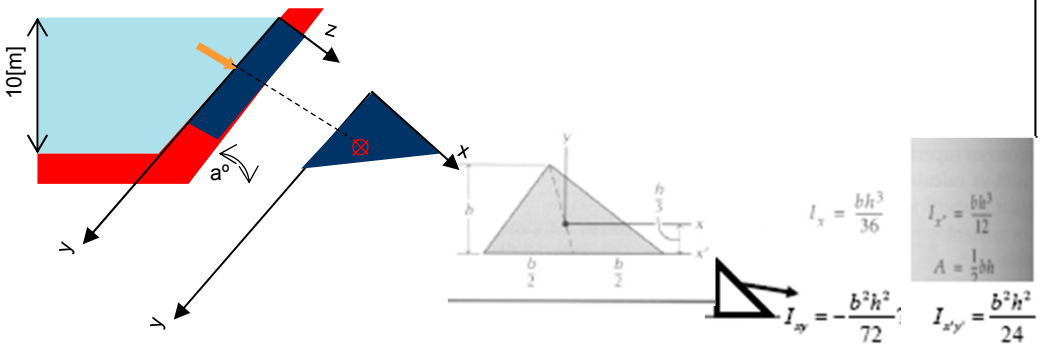
1p. Reacción en A y en B (componentes x,y).



4) Dada la compuerta triangular de lados b=h=6[m] de la figura para a=7?[º] calcular:

1.5p. Posición y de aplicación de fuerza hidr.

1p. Posición x de aplicación de fuerza hidr.



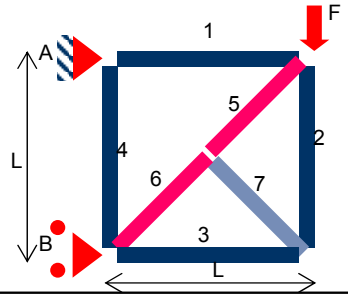
University Copy For Library Use

SOLUCIONES: 02.11.2010

1) Dada la estructura F=1?00[N], L=3[m] calcular:

1p. Reacciones en A y B.

1.5p. Tracción (+) o compresión (-) de todas las barras.



Ax=-F, Ay=F, Bx=F

T7=0

T2=T3=0

T1=T4=+F

T5=T6=-F√2

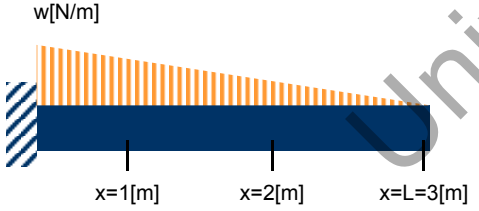
2) Dada la viga w=1?00[N/m], L=3[m] calcular:

0.5p. Reacciones en apoyo x=0.

0.5p. Cortante V y momento M en x=1.

0.5p. Cortante V y momento M en x=2.

1p. Gráfica de V y M.



Ay=w*3/2[N]; Maz=w*3/2*1=1.5w[Nm]

$V(1)=w(3-1)^2/(2*3)=0.6667w$;

$M(1)=-w(3-1)^3/(6*3)=-0.4444w$;

$V(2)=w(3-2)^2/(2*3)=0.1667w$;

$M(2)=-w(3-2)^3/(6*3)=-0.05556w$;

$V(x)=w(3-x)^2/(2*3)$;

$M(x)=-w(3-x)^3/(6*3)$

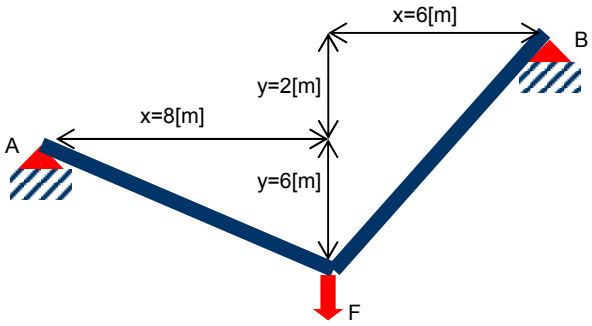
University Copy For Library Use

SOLUCIONES: 02.11.2010

3) Dado el cable de la figura con F=1?00[N]:

1.5p. Tensión máxima cable.

1p. Reacción en A y en B.

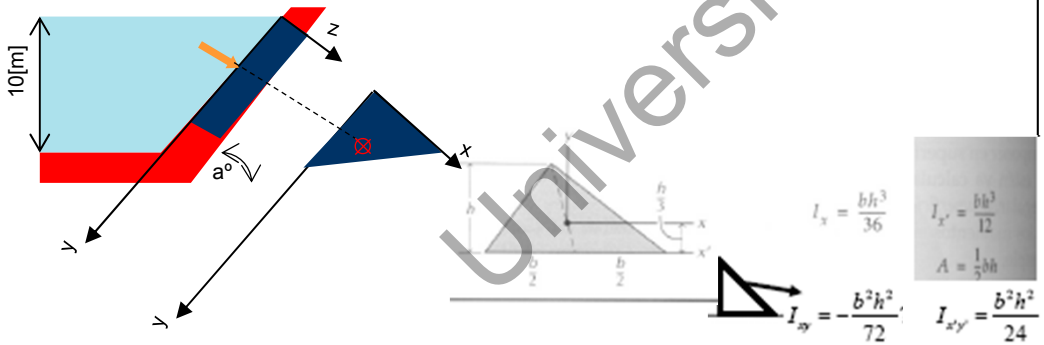


Tdb=0.8F;
Tia=0.6F;
Bx=-Ax=0.48F;
By=0.64F;
Ay=0.36F;

4) Dada la compuerta triangular de lados b=h=6[m] de la figura para a=7?[º] calcular:

1.5p. Posición y de aplicación de fuerza hidr.

1p. Posición x de aplicación de fuerza hidr.



$y=h/3+bh^3/36/(h/3*bh/2)=$
$bh^3/12/(h/3*bh/2)=h/2;$
$x=b/3-b^2h^2/72/(h/3*bh/2)=$
$b^2h^2/24/(h/3*bh/2)=b/4;$

University Copy For Library Use

SOLUCIONES: 02.11.2010

		L[m]	F[N]	Rax[N]	Ray[N]	Rbx[N]	T1=T4[N]	T5=T6[N]	T2=T3=T7[N]
S21t-10111c	ej01a	3.000E+00	1.000E+03	-1.000E+03	1.000E+03	1.000E+03	1.000E+03	-1.414E+03	0.000E+00
S21t-10111c	ej01b	3.000E+00	1.100E+03	-1.100E+03	1.100E+03	1.100E+03	1.100E+03	-1.556E+03	0.000E+00
S21t-10111c	ej01c	3.000E+00	1.200E+03	-1.200E+03	1.200E+03	1.200E+03	1.200E+03	-1.697E+03	0.000E+00
S21t-10111c	ej01d	3.000E+00	1.300E+03	-1.300E+03	1.300E+03	1.300E+03	1.300E+03	-1.838E+03	0.000E+00
S21t-10111c	ej01e	3.000E+00	1.400E+03	-1.400E+03	1.400E+03	1.400E+03	1.400E+03	-1.980E+03	0.000E+00
S21t-10111c	ej01f	3.000E+00	1.500E+03	-1.500E+03	1.500E+03	1.500E+03	1.500E+03	-2.121E+03	0.000E+00
S21t-10111c	ej01g	3.000E+00	1.600E+03	-1.600E+03	1.600E+03	1.600E+03	1.600E+03	-2.263E+03	0.000E+00
S21t-10111c	ej01h	3.000E+00	1.700E+03	-1.700E+03	1.700E+03	1.700E+03	1.700E+03	-2.404E+03	0.000E+00
S21t-10111c	ej01i	3.000E+00	1.800E+03	-1.800E+03	1.800E+03	1.800E+03	1.800E+03	-2.546E+03	0.000E+00
S21t-10111c	ej01j	3.000E+00	1.900E+03	-1.900E+03	1.900E+03	1.900E+03	1.900E+03	-2.687E+03	0.000E+00
S21t-10111c	ej01k	3.000E+00	2.000E+03	-2.000E+03	2.000E+03	2.000E+03	2.000E+03	-2.828E+03	0.000E+00

		L[m]	w[N/m]	Ray[N]	Maz[Nm]	V1[N]	M1[Nm]	V2[N]	M2[Nm]
S21t-10111c	ej02a	3.000E+00	1.000E+03	1.500E+03	1.500E+03	6.667E+02	-4.444E+02	1.667E+02	-5.556E+01
S21t-10111c	ej02b	3.000E+00	1.100E+03	1.650E+03	1.650E+03	7.333E+02	-4.889E+02	1.833E+02	-6.111E+01
S21t-10111c	ej02c	3.000E+00	1.200E+03	1.800E+03	1.800E+03	8.000E+02	-5.333E+02	2.000E+02	-6.667E+01
S21t-10111c	ej02d	3.000E+00	1.300E+03	1.950E+03	1.950E+03	8.667E+02	-5.778E+02	2.167E+02	-7.222E+01
S21t-10111c	ej02e	3.000E+00	1.400E+03	2.100E+03	2.100E+03	9.333E+02	-6.222E+02	2.333E+02	-7.778E+01
S21t-10111c	ej02f	3.000E+00	1.500E+03	2.250E+03	2.250E+03	1.000E+03	-6.667E+02	2.500E+02	-8.333E+01
S21t-10111c	ej02g	3.000E+00	1.600E+03	2.400E+03	2.400E+03	1.067E+03	-7.111E+02	2.667E+02	-8.889E+01
S21t-10111c	ej02h	3.000E+00	1.700E+03	2.550E+03	2.550E+03	1.133E+03	-7.556E+02	2.833E+02	-9.444E+01
S21t-10111c	ej02i	3.000E+00	1.800E+03	2.700E+03	2.700E+03	1.200E+03	-8.000E+02	3.000E+02	-1.000E+02
S21t-10111c	ej02j	3.000E+00	1.900E+03	2.850E+03	2.850E+03	1.267E+03	-8.444E+02	3.167E+02	-1.056E+02
S21t-10111c	ej02k	3.000E+00	2.000E+03	3.000E+03	3.000E+03	1.333E+03	-8.889E+02	3.333E+02	-1.111E+02

		L[m]	F[N]	Td[N]	Ti[N]	Bx=-Ax[N]	Ay[N]	By[N]
S21t-10111c	ej03a	1.400E+01	1.000E+03	8.000E+02	6.000E+02	4.800E+02	3.600E+02	6.400E+02
S21t-10111c	ej03b	1.400E+01	1.100E+03	8.800E+02	6.600E+02	5.280E+02	3.960E+02	7.040E+02
S21t-10111c	ej03c	1.400E+01	1.200E+03	9.600E+02	7.200E+02	5.760E+02	4.320E+02	7.680E+02
S21t-10111c	ej03d	1.400E+01	1.300E+03	1.040E+03	7.800E+02	6.240E+02	4.680E+02	8.320E+02
S21t-10111c	ej03e	1.400E+01	1.400E+03	1.120E+03	8.400E+02	6.720E+02	5.040E+02	8.960E+02
S21t-10111c	ej03f	1.400E+01	1.500E+03	1.200E+03	9.000E+02	7.200E+02	5.400E+02	9.600E+02
S21t-10111c	ej03g	1.400E+01	1.600E+03	1.280E+03	9.600E+02	7.680E+02	5.760E+02	1.024E+03
S21t-10111c	ej03h	1.400E+01	1.700E+03	1.360E+03	1.020E+03	8.160E+02	6.120E+02	1.088E+03
S21t-10111c	ej03i	1.400E+01	1.800E+03	1.440E+03	1.080E+03	8.640E+02	6.480E+02	1.152E+03
S21t-10111c	ej03j	1.400E+01	1.900E+03	1.520E+03	1.140E+03	9.120E+02	6.840E+02	1.216E+03
S21t-10111c	ej03k	1.400E+01	2.000E+03	1.600E+03	1.200E+03	9.600E+02	7.200E+02	1.280E+03

		b=h[m]	a[º]	y[m]	x[m]
S21t-10111c	ej04a	6.000E+00	7.000E+01	3.000E+00	1.500E+00

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 05.11.2009a

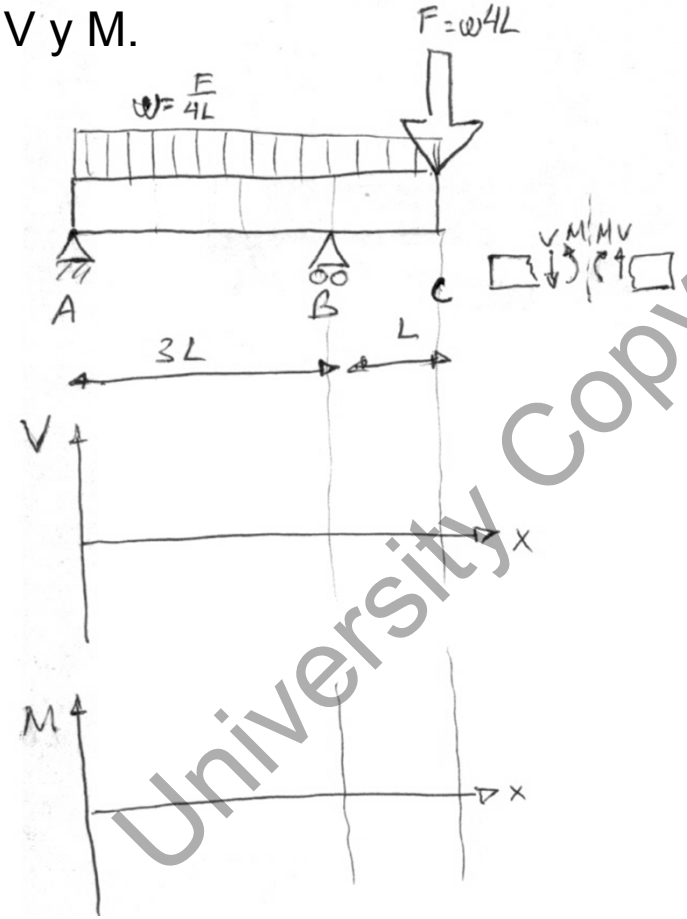
Dada la viga F=100[N], L=1[m] calcular:

1p. Reacciones en A y B.

1p. Cortante y momento A-B.

1p. Cortante y momento B-C.

1p. Gráfica de V y M.

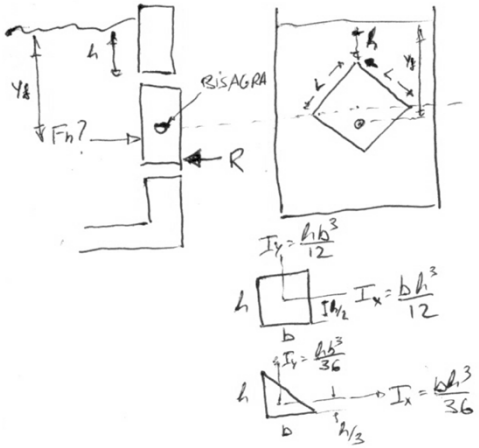


Dada la presa h=1[m] L=√2[m] calcular:

1p. Fuerza hidráulica F_h.

1p. Posición y_f de F_h.

1p. Calcular R para que no se abra.

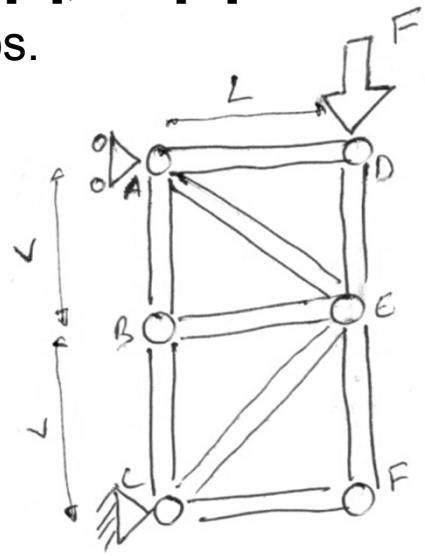


Dado la estructura F=100[N], L=1[m] calcular:

1p. Reacciones en apoyos.

1p. Tracciones BE y CE.

1p. Tracción AB.



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 05.11.2009b

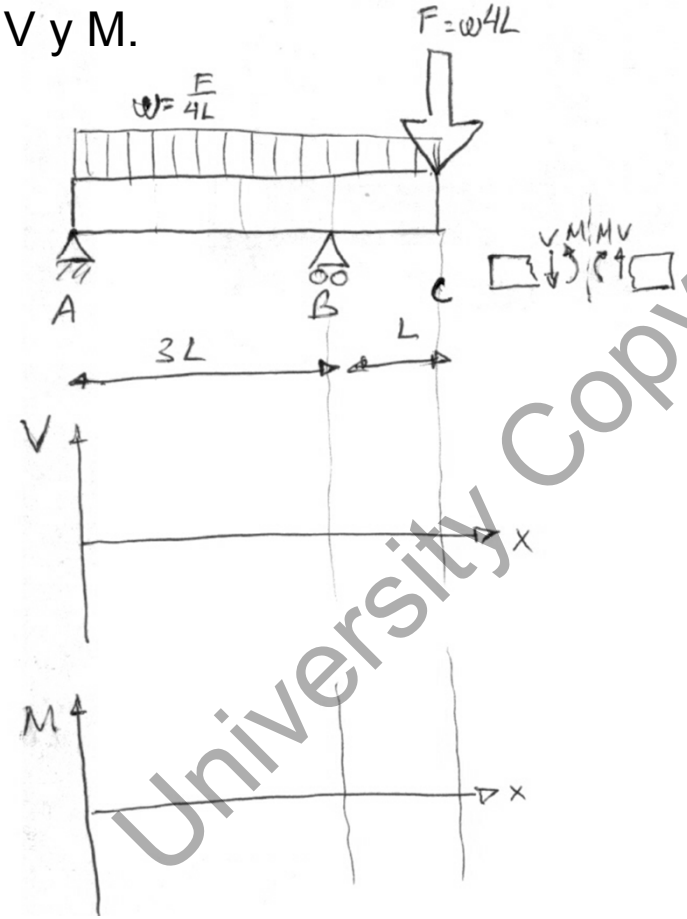
Dada la viga F=100[N], L=2[m] calcular:

1p. Reacciones en A y B.

1p. Cortante y momento A-B.

1p. Cortante y momento B-C.

1p. Gráfica de V y M.

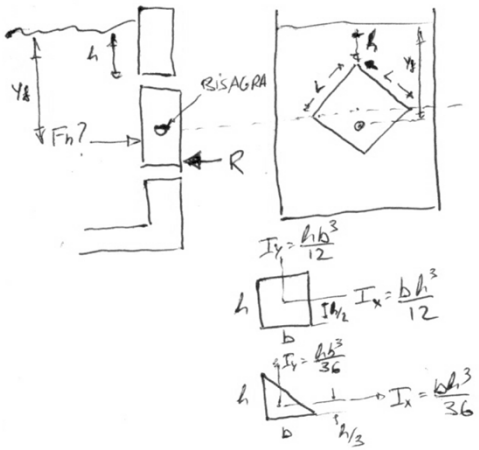


Dada la presa h=1[m] L=2√2[m] calcular:

1p. Fuerza hidráulica F_h.

1p. Posición y_f de F_h.

1p. Calcular R para que no se abra.

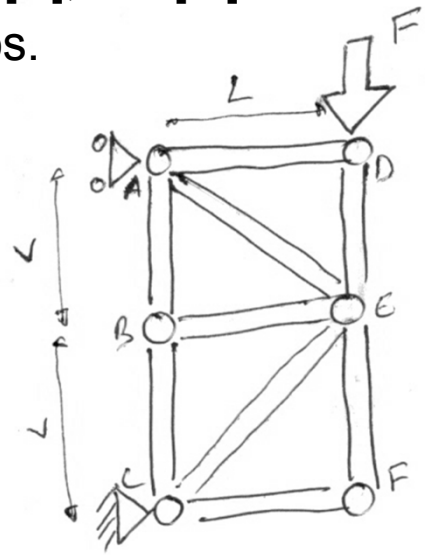


Dado la estructura F=100[N], L=2[m] calcular:

1p. Reacciones en apoyos.

1p. Tracciones BE y CE.

1p. Tracción AB.



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 05.11.2009c

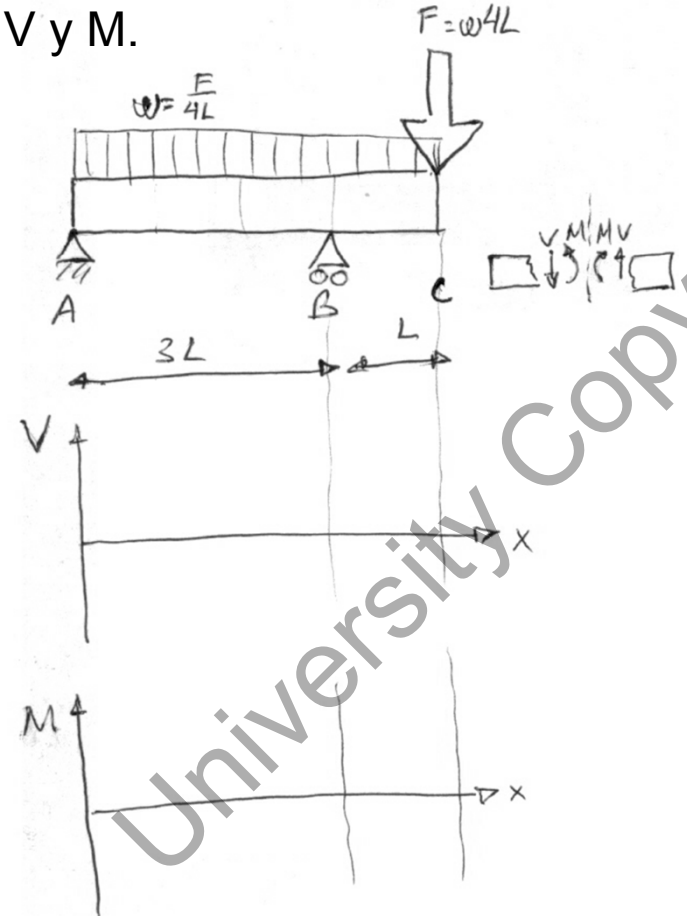
Dada la viga F=200[N], L=1[m] calcular:

1p. Reacciones en A y B.

1p. Cortante y momento A-B.

1p. Cortante y momento B-C.

1p. Gráfica de V y M.

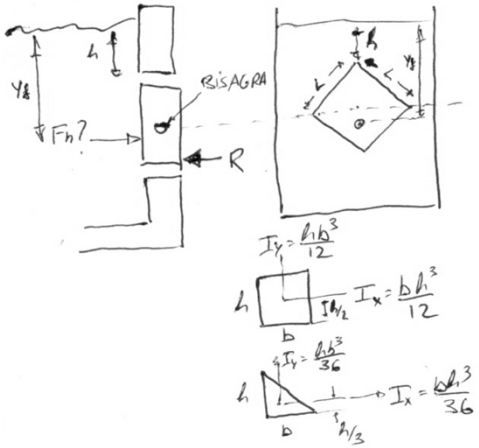


Dada la presa h=2[m] L=√2[m] calcular:

1p. Fuerza hidráulica F_h.

1p. Posición y_f de F_h.

1p. Calcular R para que no se abra.

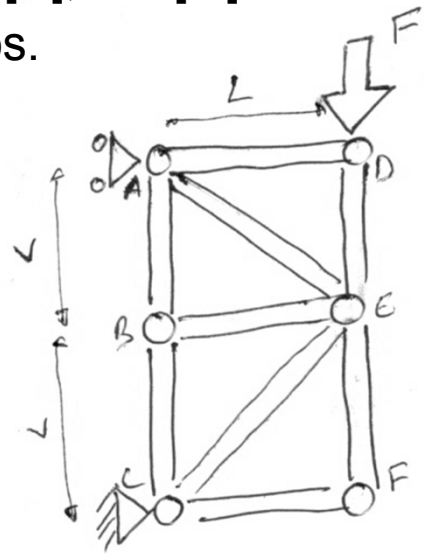


Dado la estructura F=200[N], L=1[m] calcular:

1p. Reacciones en apoyos.

1p. Tracciones BE y CE.

1p. Tracción AB.



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 05.11.2009d

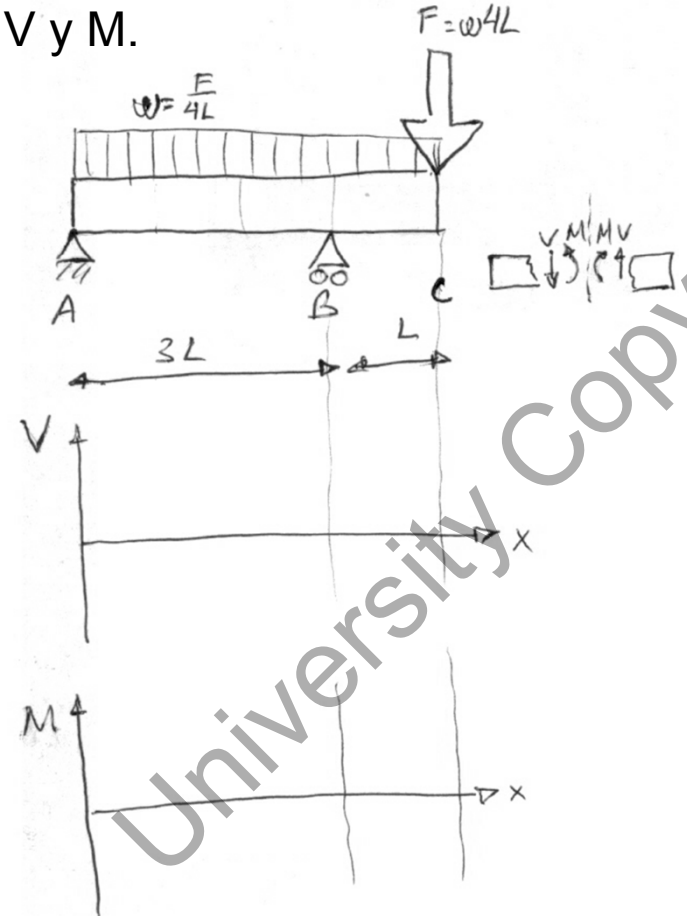
Dada la viga F=200[N], L=2[m] calcular:

1p. Reacciones en A y B.

1p. Cortante y momento A-B.

1p. Cortante y momento B-C.

1p. Gráfica de V y M.

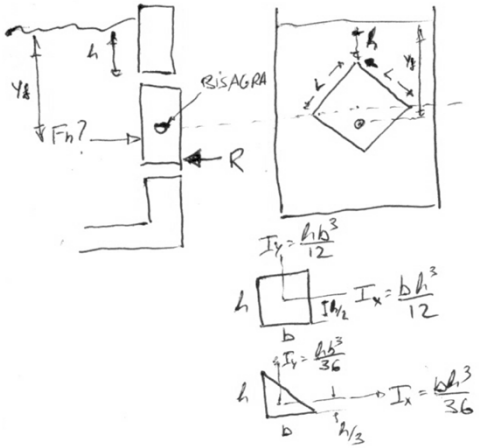


Dada la presa h=2[m] L=2√2[m] calcular:

1p. Fuerza hidráulica F_h.

1p. Posición y_f de F_h.

1p. Calcular R para que no se abra.

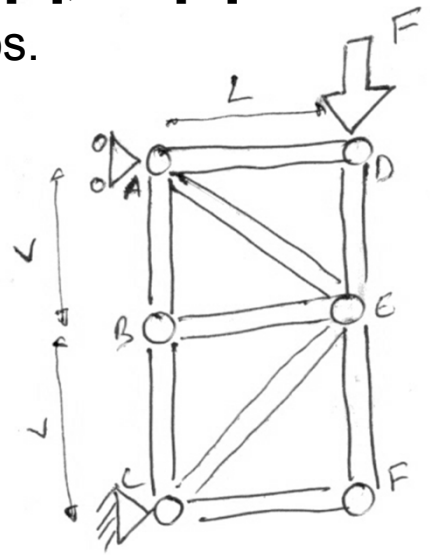


Dado la estructura F=200[N], L=2[m] calcular:

1p. Reacciones en apoyos.

1p. Tracciones BE y CE.

1p. Tracción AB.



University Copy For Library Use

SOLUCIONES

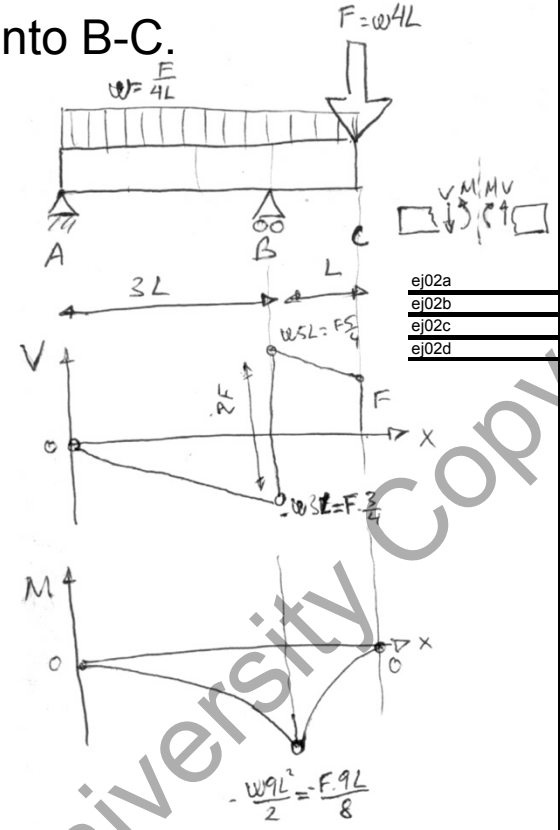
Dada la viga F=200[N], L=2[m] calcular:

1p. Reacciones en A y B.

1p. Cortante y momento A-B.

1p. Cortante y momento B-C.

1p. Gráfica de V y M.



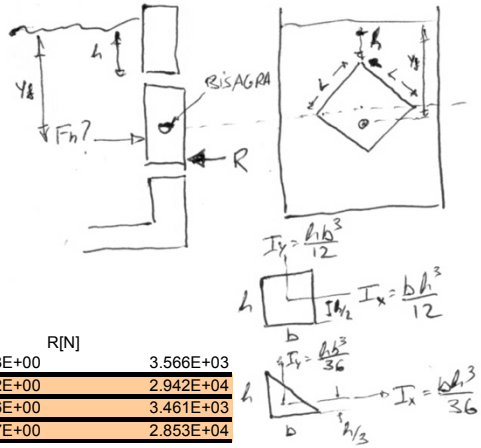
	L[m]	F[N]	Rax[N]	Ray[N]	Rby[N]	VBizq[N]	MBizq[Nm]	VBder[N]	MBder[Nm]
ej01a	1.000E+00	1.000E+02	0.000E+00	0.000E+00	2.000E+02	-7.500E+01	-1.125E+02	1.250E+02	-1.125E+02
ej01b	2.000E+00	1.000E+02	0.000E+00	0.000E+00	2.000E+02	-7.500E+01	-2.250E+02	1.250E+02	-2.250E+02
ej01c	1.000E+00	2.000E+02	0.000E+00	0.000E+00	4.000E+02	-1.500E+02	-2.250E+02	2.500E+02	-2.250E+02
ej01d	2.000E+00	2.000E+02	0.000E+00	0.000E+00	4.000E+02	-1.500E+02	-4.500E+02	2.500E+02	-4.500E+02

Dada la presa h=2[m] L=2√2[m] calcular:

1p. Fuerza hidráulica F_h.

1p. Posición y_f de F_h.

1p. Calcular R para que no se abra.



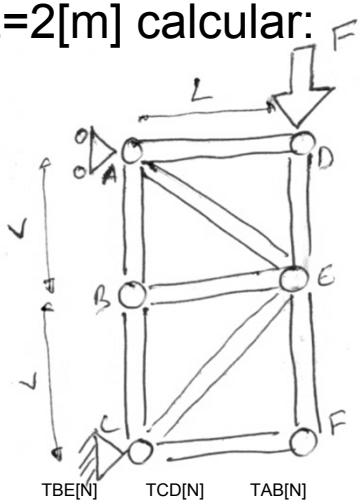
	L[m]	h[m]	hcg[m]	Fh[N]	yfh[m]	R[N]
ej02a	1.414E+00	1.000E+00	2.000E+00	3.923E+04	2.083E+00	3.566E+03
ej02b	2.828E+00	1.000E+00	3.000E+00	2.354E+05	3.222E+00	2.942E+04
ej02c	1.414E+00	2.000E+00	3.000E+00	5.884E+04	3.056E+00	3.461E+03
ej02d	2.828E+00	2.000E+00	4.000E+00	3.138E+05	4.167E+00	2.853E+04

Dado la estructura F=200[N], L=2[m] calcular:

1p. Reacciones en apoyos.

1p. Tracciones BE y CE.

1p. Tracción AB.



	L[m]	F[N]	Rax[N]	Rbx[N]	Rby[N]	TBE[N]	TCD[N]	TAB[N]
ej03a	1.000E+00	1.000E+02	-5.000E+01	5.000E+01	1.000E+02	0.000E+00	-7.071E+01	-5.000E+01
ej03b	2.000E+00	1.000E+02	-5.000E+01	5.000E+01	1.000E+02	0.000E+00	-7.071E+01	-5.000E+01
ej03c	1.000E+00	2.000E+02	-1.000E+02	1.000E+02	2.000E+02	0.000E+00	-1.414E+02	-1.000E+02
ej03d	2.000E+00	2.000E+02	-1.000E+02	1.000E+02	2.000E+02	0.000E+00	-1.414E+02	-1.000E+02

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 06.11.2008a

Dada la presa de la figura calcular:

0.5p. h en función de y.

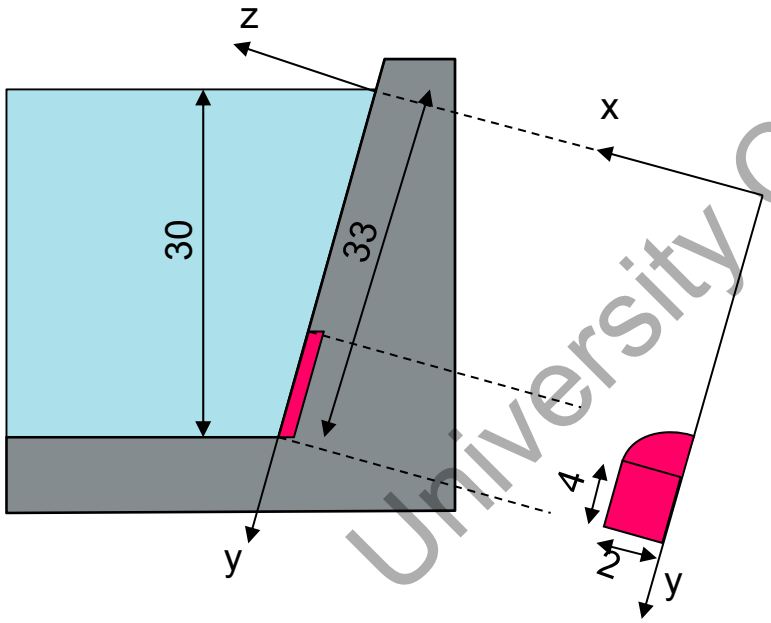
1p. posición centro gravedad puerta x e y.

1p. fuerza resultante aplicada a la puerta.

0.5p. inercia de la puerta en centro gravedad.

0.5p. inercia de la puerta en sistema "x-y".

1p. posición de aplicación de fuerza x e y.

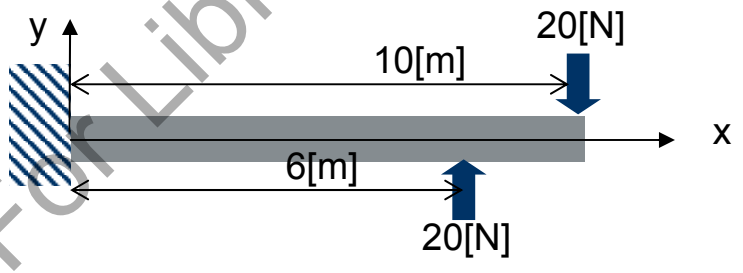


Dada la viga calcular:

1p. reacciones en apoyo.

1p. cortante a tramos en función de x.

1p. momento flector a tramos.

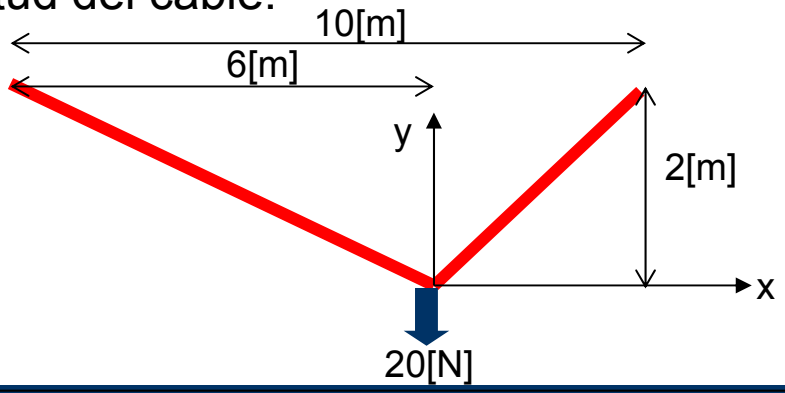


Dado el cable:

1p. reacciones en apoyos.

1p. tensión máxima el cable.

0.5p. longitud del cable.



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 05.11.2008b

Dada la presa de la figura calcular:

0.5p. h en función de y.

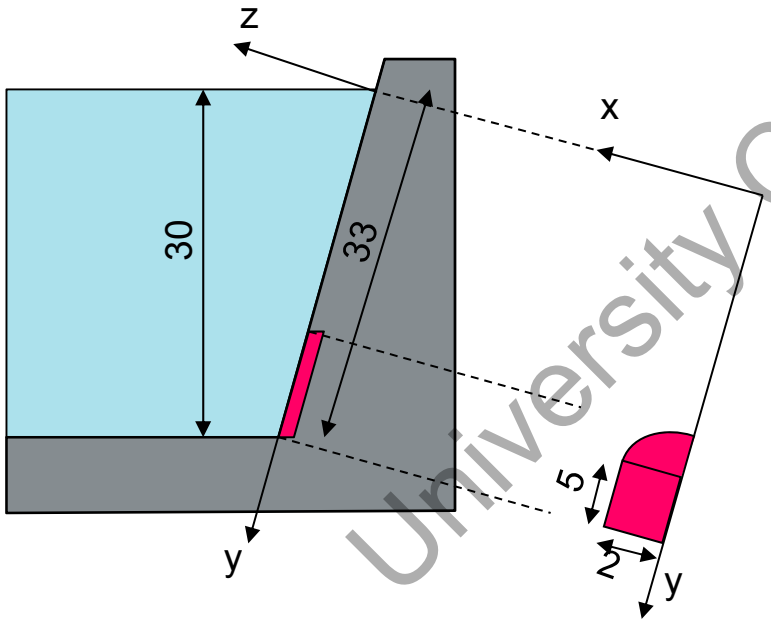
1p. posición centro gravedad puerta x e y.

1p. fuerza resultante aplicada a la puerta.

0.5p. inercia de la puerta en centro gravedad.

0.5p. inercia de la puerta en sistema "x-y".

1p. posición de aplicación de fuerza x e y.

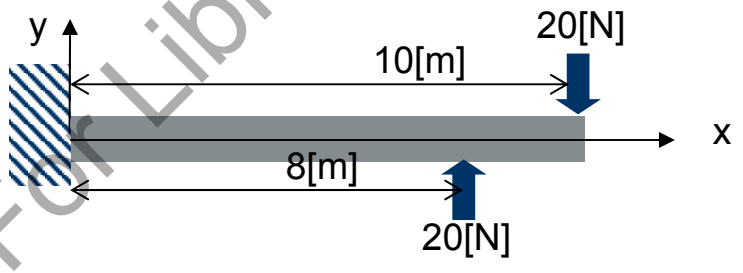


Dada la viga calcular:

1p. reacciones en apoyo.

1p. cortante a tramos en función de x.

1p. momento flector a tramos.

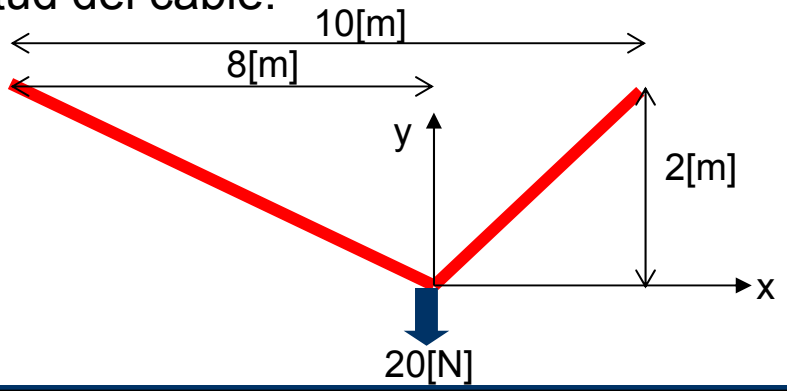


Dado el cable:

1p. reacciones en apoyos.

1p. tensión máxima el cable.

0.5p. longitud del cable.



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 05.11.2008c

Dada la presa de la figura calcular:

0.5p. h en función de y.

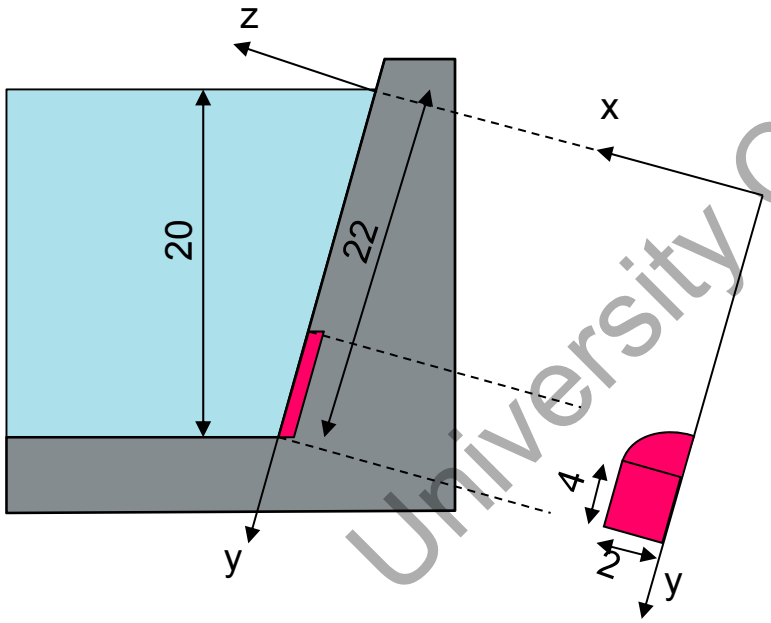
1p. posición centro gravedad puerta x e y.

1p. fuerza resultante aplicada a la puerta.

0.5p. inercia de la puerta en centro gravedad.

0.5p. inercia de la puerta en sistema "x-y".

1p. posición de aplicación de fuerza x e y.

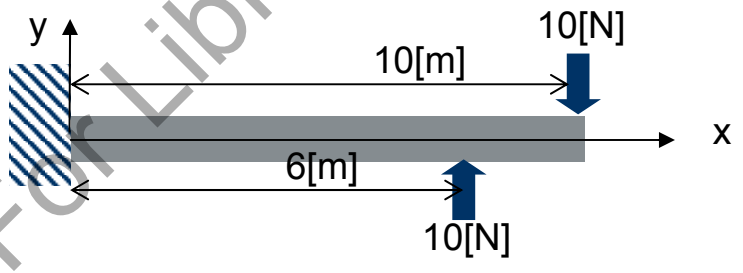


Dada la viga calcular:

1p. reacciones en apoyo.

1p. cortante a tramos en función de x.

1p. momento flector a tramos.

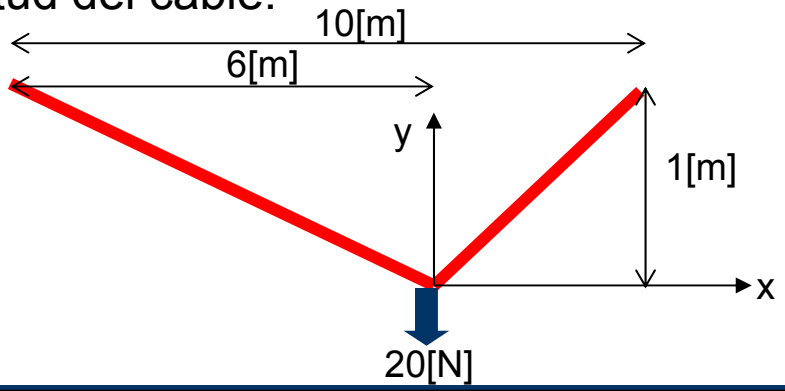


Dado el cable:

1p. reacciones en apoyos.

1p. tensión máxima el cable.

0.5p. longitud del cable.



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 05.11.2008d

Dada la presa de la figura calcular:

0.5p. h en función de y.

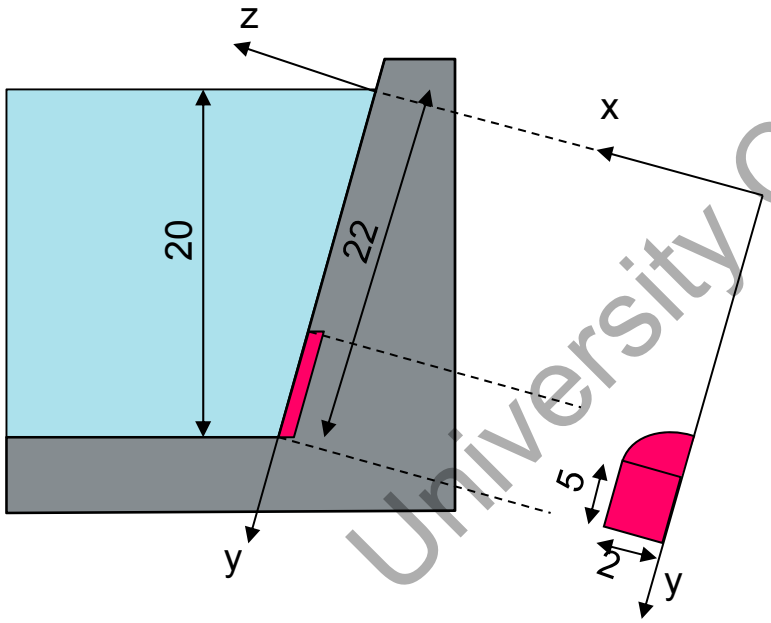
1p. posición centro gravedad puerta x e y.

1p. fuerza resultante aplicada a la puerta.

0.5p. inercia de la puerta en centro gravedad.

0.5p. inercia de la puerta en sistema "x-y".

1p. posición de aplicación de fuerza x e y.

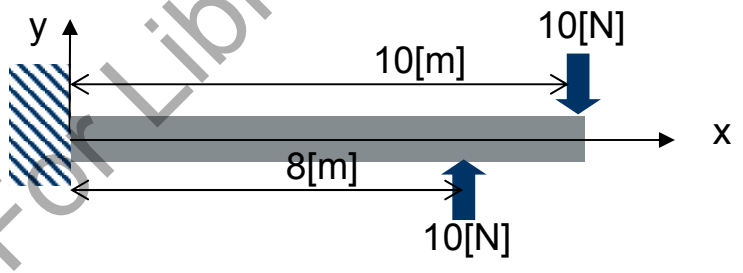


Dada la viga calcular:

1p. reacciones en apoyo.

1p. cortante a tramos en función de x.

1p. momento flector a tramos.

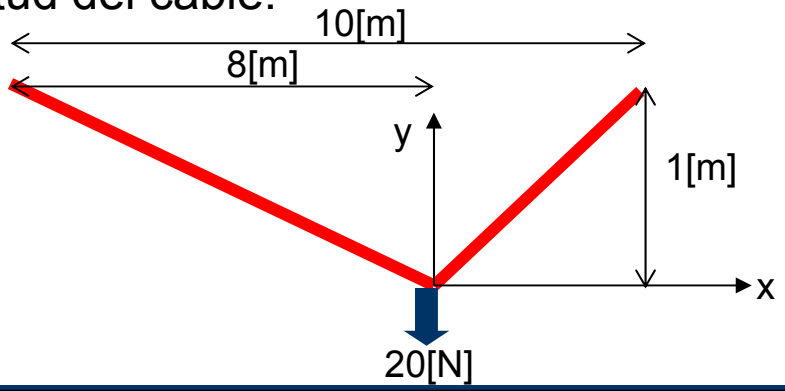


Dado el cable:

1p. reacciones en apoyos.

1p. tensión máxima el cable.

0.5p. longitud del cable.



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: 05.11.2008e

Dada la presa de la figura calcular:

0.5p. h en función de y.

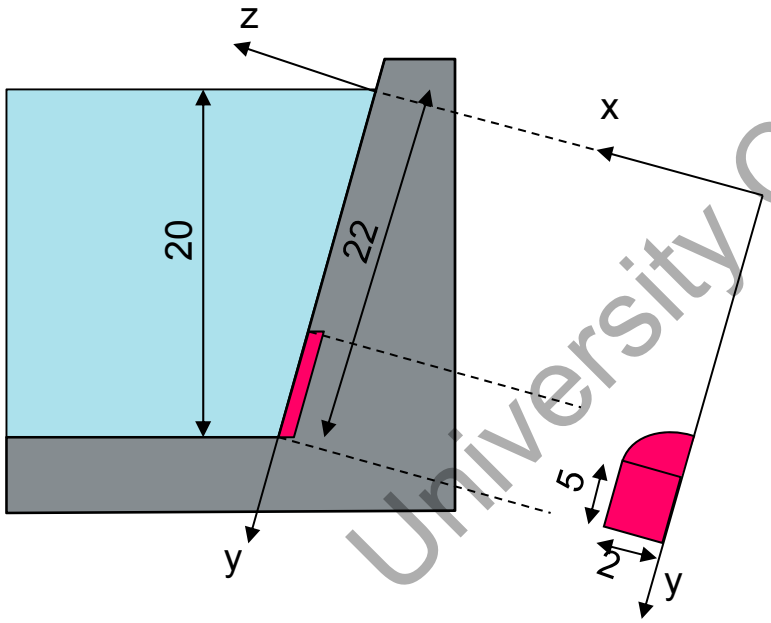
1p. posición centro gravedad puerta x e y.

1p. fuerza resultante aplicada a la puerta.

0.5p. inercia de la puerta en centro gravedad.

0.5p. inercia de la puerta en sistema "x-y".

1p. posición de aplicación de fuerza x e y.

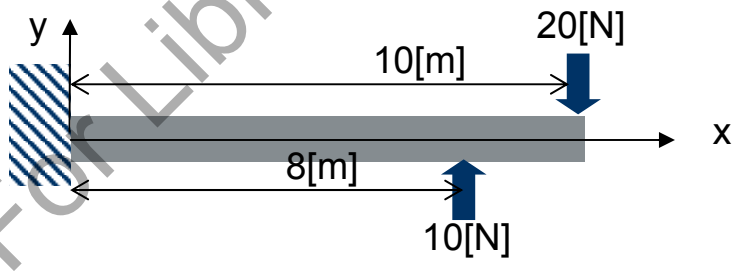


Dada la viga calcular:

1p. reacciones en apoyo.

1p. cortante a tramos en función de x.

1p. momento flector a tramos.

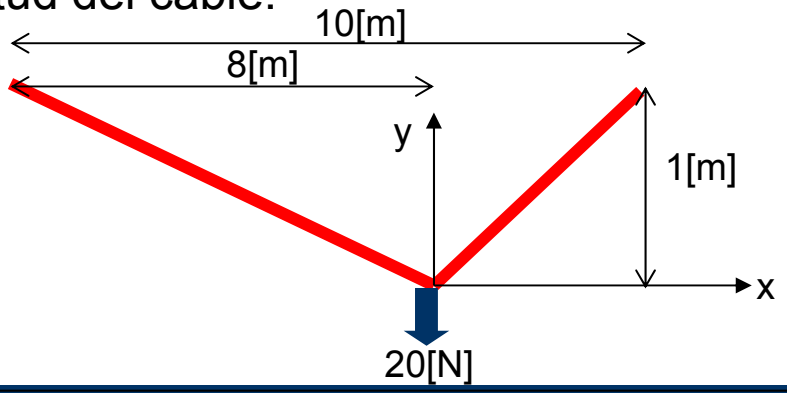


Dado el cable:

1p. reacciones en apoyos.

1p. tensión máxima el cable.

0.5p. longitud del cable.



University Copy For Library Use

SOLUCIONES

Dada la presa de la figura calcular:

0.5p. h en función de y.

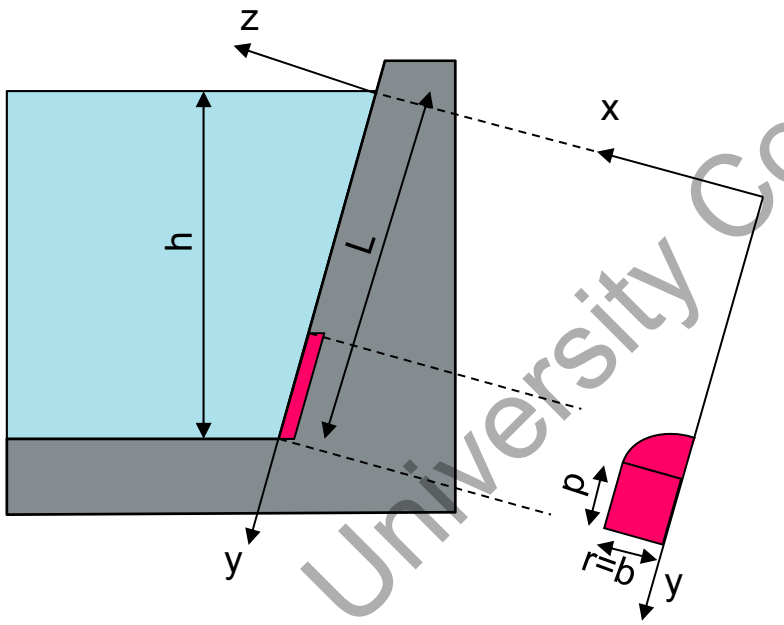
1p. posición centro gravedad puerta x e y.

1p. fuerza resultante aplicada a la puerta.

0.5p. inercia de la puerta en centro gravedad.

0.5p. inercia de la puerta en sistema "x-y".

1p. posición de aplicación de fuerza x e y.



	a	b	c	d
L[m]	3.300E+01	3.300E+01	2.200E+01	2.200E+01
prof[m]	3.000E+01	3.000E+01	2.000E+01	2.000E+01
b[m]	2.000E+00	2.000E+00	2.000E+00	2.000E+00
h[m]	4.000E+00	5.000E+00	4.000E+00	5.000E+00
r[m]	2.000E+00	2.000E+00	2.000E+00	2.000E+00
xr	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00
yr	3.100E+01	3.050E+01	2.000E+01	1.950E+01
Ar	8.000E+00	1.000E+01	8.000E+00	1.000E+01
Ixr	1.067E+01	2.083E+01	1.067E+01	2.083E+01
Iyr	2.667E+00	3.333E+00	2.667E+00	3.333E+00
Ixyr	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
xc	8.488E-01	8.488E-01	8.488E-01	8.488E-01
yc	2.815E+01	2.715E+01	1.715E+01	1.615E+01
Ac	3.142E+00	3.142E+00	3.142E+00	3.142E+00
Ixc	8.781E-01	8.781E-01	8.781E-01	8.781E-01
Iyc	8.781E-01	8.781E-01	8.781E-01	8.781E-01
Ixyc	2.635E-01	2.635E-01	2.635E-01	2.635E-01
At	1.114E+01	1.314E+01	1.114E+01	1.314E+01
xt	9.574E-01	9.639E-01	9.574E-01	9.639E-01
yt	3.020E+01	2.970E+01	1.920E+01	1.870E+01
Ixt	2.985E+01	4.852E+01	2.985E+01	4.852E+01
Iyt	3.596E+00	4.266E+00	3.596E+00	4.266E+00
Ixyt	1.235E+00	1.474E+00	1.235E+00	1.474E+00
xr	9.610E-01	9.676E-01	9.631E-01	9.699E-01
yr	3.021E+01	2.971E+01	1.921E+01	1.872E+01
R	3.000E+06	3.481E+06	1.907E+06	2.192E+06

University Copy For Library Use

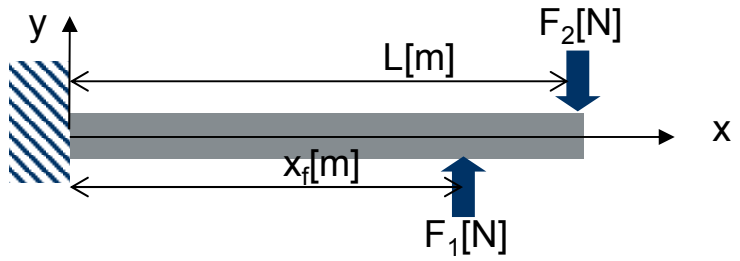
SOLUCIONES

Dada la viga calcular:

1p. reacciones en apoyo.

1p. cortante a tramos en función de x.

1p. momento flector a tramos.



	ej02a	ej02b	ej02c	ej02d	ej02e
L[m]	1.000E+01	1.000E+01	1.000E+01	1.000E+01	1.000E+01
xf[m]	6.000E+00	8.000E+00	6.000E+00	8.000E+00	8.000E+00
F1[N]	2.000E+01	2.000E+01	1.000E+01	1.000E+01	1.000E+01
F2[N]	2.000E+01	2.000E+01	1.000E+01	1.000E+01	2.000E+01
Fay[N]	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	1.000E+01
Maz[Nm]	8.000E+01	4.000E+01	4.000E+01	2.000E+01	1.200E+02
V1xf[N]	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	1.000E+01
M1xf[Nm]	-8.000E+01	-4.000E+01	-4.000E+01	-2.000E+01	-4.000E+01
V2xf[N]	2.000E+01	2.000E+01	1.000E+01	1.000E+01	2.000E+01
M2xf[Nm]	-8.000E+01	-4.000E+01	-4.000E+01	-2.000E+01	-4.000E+01

$0 \rightarrow x_f$: $V=F_2-F_1$; $M=(F_2-F_1)x-(F_2L-F_1x_f)$;

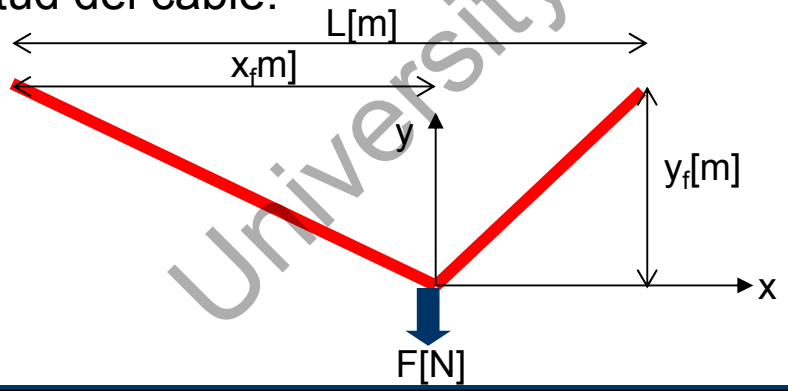
$x_f \rightarrow L$: $V=F_2$; $M=-F_2(L-x)$;

Dado el cable:

1p. reacciones en apoyos.

1p. tensión máxima el cable.

0.5p. longitud del cable.



	ej03a	ej03b	ej03c	ej03d
L[m]	1.000E+01	1.000E+01	1.000E+01	1.000E+01
xf[m]	6.000E+00	8.000E+00	6.000E+00	8.000E+00
yf[m]	2.000E+00	2.000E+00	1.000E+00	1.000E+00
F[N]	2.000E+01	2.000E+01	2.000E+01	2.000E+01
Fay[N]	8.000E+00	4.000E+00	8.000E+00	4.000E+00
Fby[N]	1.200E+01	1.600E+01	1.200E+01	1.600E+01
Tmax_b[N]	2.683E+01	2.263E+01	4.948E+01	3.578E+01
Fbx[N]	2.400E+01	1.600E+01	4.800E+01	3.200E+01
Fax[N]	-2.400E+01	-1.600E+01	-4.800E+01	-3.200E+01
Ta[N]	2.530E+01	1.649E+01	4.866E+01	3.225E+01
L[m]	1.080E+01	1.107E+01	1.021E+01	1.030E+01

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Segundo control de cuatro a realizar durante el curso.

University Copy For Library Use

S16t.- Movimiento de Traslación.

Mejora 1415 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.

➢ Control de estática con presiones en compuerta por método inercias, cortantes y momentos en viga empotrada y tensiones en estructura.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos de esta sesión

➢ Comprender que la segunda parte de la asignatura primero se basa en el movimiento y cálculo de velocidades y aceleraciones y se denomina cinemática.

➢ Comprender que la segunda parte de la asignatura se dedica a calcular fuerzas y momento dinámicos para lo que se necesita conocer la aceleración la masa y la distribución e la masa conocida como inercia de masa.

➢ Comprender que para casos en que se conozca el recorrido lineal o angular es útil aplicar métodos de energía.

➢ Comprender que para caso que conozcamos el tiempo de aplicación es útil aplicar momento lineal o angular.

➢ Iniciar la simplificación de movimiento curvo y a lo largo de trayectoria.

$$v = \dot{r}_{P/O} = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta;$$

$$a = \left(\ddot{r} - r\left(\dot{\theta}\right)^2\right)e_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)e_\theta$$

$$v(t) = \dot{s}e_t$$

$$a(t) = \ddot{s}e_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}e_n$$

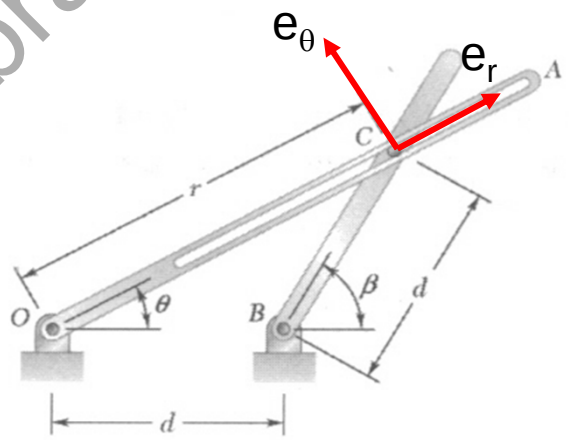
$$\rho = \frac{\left(1+\dot{y}^2\right)^{3/2}}{\ddot{y}}$$

University Copy For Library Use

- Introducción a dinámica-cinemática.

$$v_{C'} = v_C + v_{C'C}$$

$$a_{C'} = a_C + a_{C'C} + 2\omega_{guiaOC'} \times v_{C'C}$$



University Copy For Library Use

- Introducción a dinámica-cinética.

$$F_{ext} = \frac{\partial(mv)}{\partial t}$$

Si *m* constante

$$F_{ext} = ma$$

$$mv_1 + \int_1^2 F_{ext}\partial t = mv_2$$

$$F_{ext}\partial s = \frac{\partial(mv)\partial s}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \int_1^2 F_{ext}\partial s = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$M_{ext} = \frac{\partial(I\omega)}{\partial t}$$

Si *I* constante

$$M_{ext} = I\alpha$$

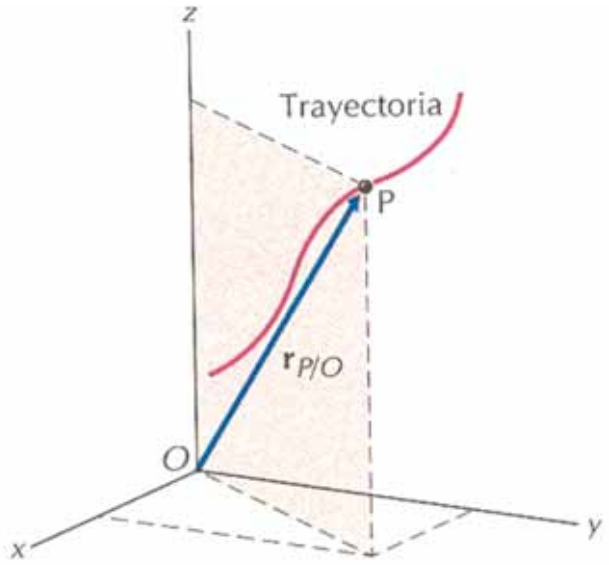
$$I\omega_1 + \int_1^2 M_{ext}\partial t = I\omega_2$$

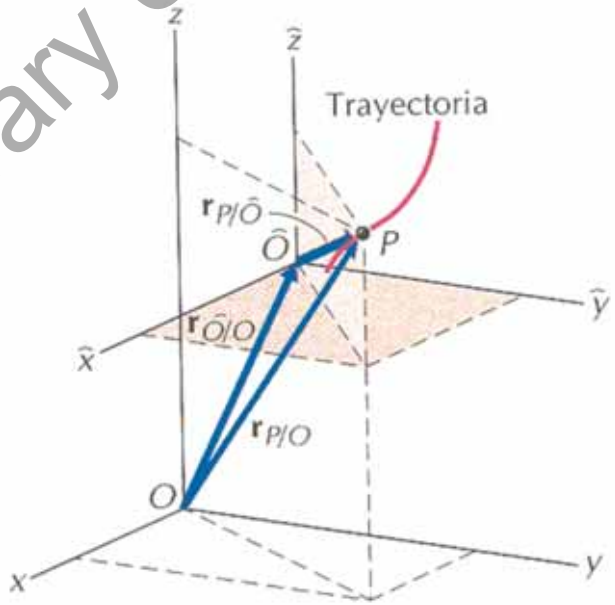
$$M_{ext}\partial\theta = \frac{\partial(I\omega)\partial\theta}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2 + \int_1^2 M_{ext}\partial\theta = \frac{1}{2}I\omega_2^2$$

University Copy For Library Use

- Posición y trayectoria de un punto en el espacio.





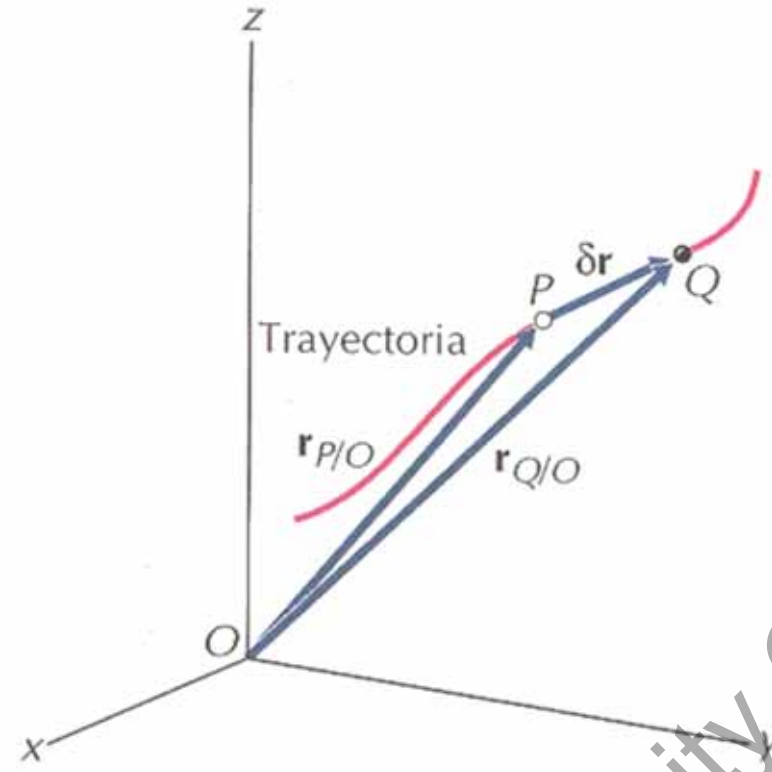
$$r_{P/O} = xi + yj + zk$$

$$r_{P/\hat{O}} = \hat{x}i + \hat{y}j + \hat{z}k;$$

$$r_{P/O} = r_{\hat{O}/O} + r_{P/\hat{O}}$$

University Copy For Library Use

- Desplazamiento, velocidad y aceleración.



Desplazamiento

$$\delta r = r_{Q/O} - r_{P/O}$$

Velocidad

$$v_P = \frac{dr_{P/O}}{dt} = \dot{r}_{P/O};$$

$$v_P = v_x i + v_y j + v_z k = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k$$

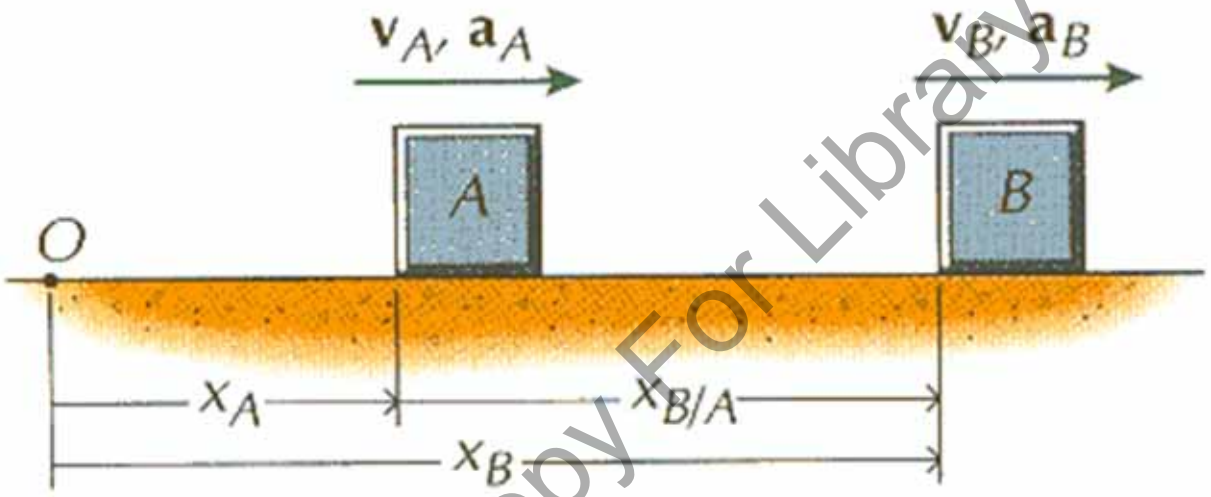
Aceleración

$$a_P = \frac{dv_P}{dt} = \dot{v}_P = \frac{d^2 r_{P/O}}{dt^2} = \ddot{r}_{P/O};$$

$$a_P = a_x i + a_y j + a_z k = \dot{v}_x i + \dot{v}_y j + \dot{v}_z k = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k$$

University Copy For Library Use

- Movimiento relativo.



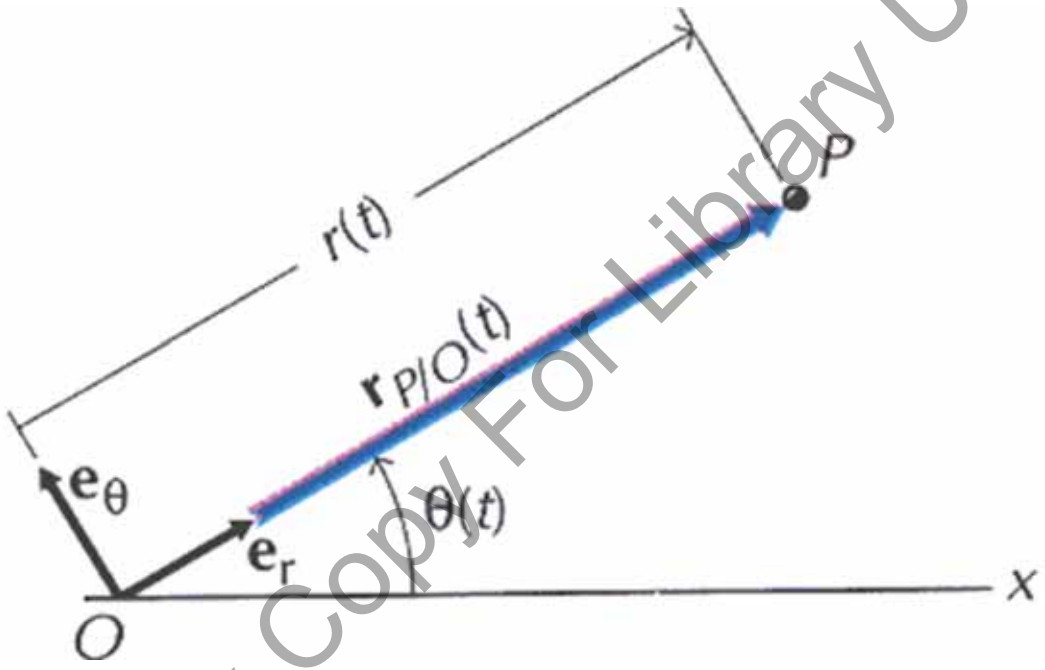
$$x_B = x_A + x_{B/A}$$

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

University Copy For Library Use

- Coordenadas polares.



$$r_{P/O}(t) = r(t)e_r$$

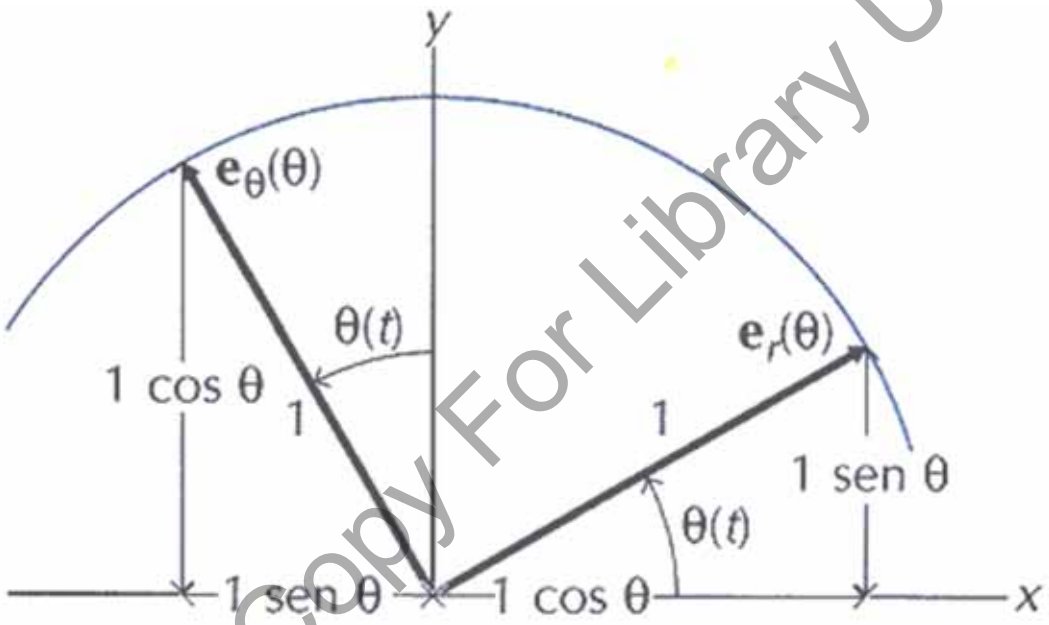
$$e_r(\theta) = \cos\theta i + \sin\theta j$$

$$\theta = \theta(t)$$

$$v(t) = \dot{r}_{P/O}(t) = \dot{r}(t)e_r + r(t)\dot{e}_r$$

University Copy For Library Use

- Derivada vector unitario polar.



$$e_r = \cos\theta i + sen\theta e$$

$$e_\theta = -sen\theta e + \cos\theta j$$

$$\frac{de_r}{d\theta} = -sen\theta e + \cos\theta j = e_\theta$$

$$\frac{de_\theta}{d\theta} = -\cos\theta i - sen\theta e = -e_r$$

University Copy For Library Use

- Velocidad y aceleración en trayectoria circular.

$$v = \dot{r}_{P/O} = \dot{r}e_r + r\dot{e}_r \; y \; \dot{e}_r = \dot{\theta}e_\theta$$

$$v = \dot{r}_{P/O} = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta;$$

$$a = \dot{v} = \ddot{r}_{P/O} = \ddot{r}e_r + \dot{r}\dot{\theta}e_\theta + \dot{r}\dot{\theta}e_\theta + r\left[\ddot{\theta}e_\theta + \dot{\theta}\left(-\dot{\theta}e_r\right)\right]$$

$$a = \left(\ddot{r} - r\left(\dot{\theta}\right)^2\right)e_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)e_\theta$$

Si el radio es constante;

$$v(t) = r\dot{\theta}e_\theta$$

$$a(t) = -r\dot{\theta}^2 e_r + r\ddot{\theta}e_\theta$$

Si el ángulo es constante (traslación);

$$v(t) = \dot{r}e_r$$

$$a(t) = \ddot{r}e_r$$

Si velocidad angular es constante=ω;

$$v(t) = \dot{r}e_r + r\omega e_\theta$$

$$a(t) = \left(\ddot{r} - r\omega^2\right)e_r + 2\dot{r}\omega e_\theta$$

University Copy For Library Use

• Ejercicio Meriam Sample 2.1.

Si la posición de una partícula es $s(t)=2t^3-24t+6$ [m] encontrar velocidad, aceleración y el tiempo necesario para conseguir una velocidad de 259.2 [km/h] y aceleración en ese instante.

Primero derivamos para tener velocidad y aceleración:

$v(t)=6t^2-24$ [m/s];

$a(t)=12t$ [m/s^2];

Segundo encontramos el tiempo en que la velocidad es la deseada:

$259.2[km/h]*1000[m/km]/3600[s/h]=72[m/s]= 6t^2-24 \Rightarrow t=\pm4[s]$;

Finalmente sustituimos el tiempo en la ecuación de la aceleración:

$a(t)=12t$;

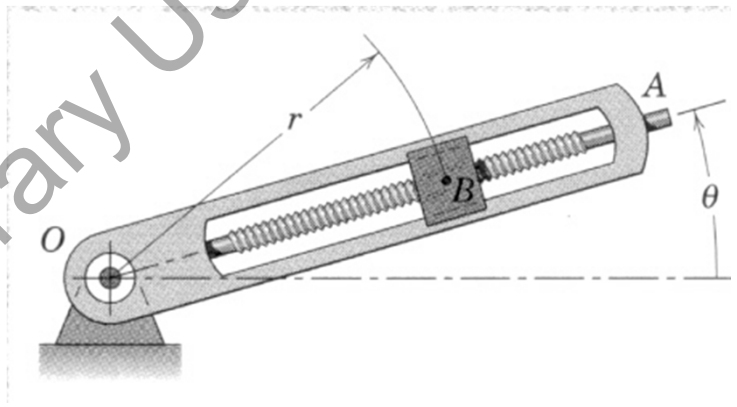
$a(4)=48$ [m/s^2] acelerando.

$a(-4)=-48$ [m/s^2] frenando.

Experimentalmente se desprecian los resultados de tiempo negativo pues la regresión carece de datos para ajustar la curva.

University Copy For Library Use

• Ejercicio casa Meriam Sample 2.9.



La rotación sigue la ley $\theta(t)=0.2t+0.02t^3$ [rad] y el radio $r(t)=0.2+0.04t^2$[m] siendo el tiempo en segundos. Calcular magnitud de velocidad y aceleración en t=3[s].

Primero derivamos para tener velocidad y aceleración en coordenadas polares:

$\delta r(t)/\delta t = 0.08t$ [m/s];

$\delta^2 r(t)/\delta t^2 = 0.08$ [m/s^2];

$\delta\theta(t)/\delta t = 0.2+0.06t^2$ [rad/s];

$\delta^2\theta(t)/\delta t^2 = 0.12t$ [rad/s^2];

Juntamos para tener componentes:

para t=3 v_r=0.24 [m/s]

para t=3 a_r=-0.227[m/s^2]

para t=3 v_θ=0.414 [m/s]

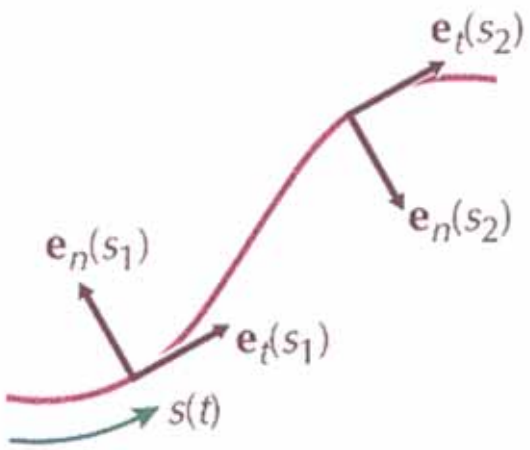
;

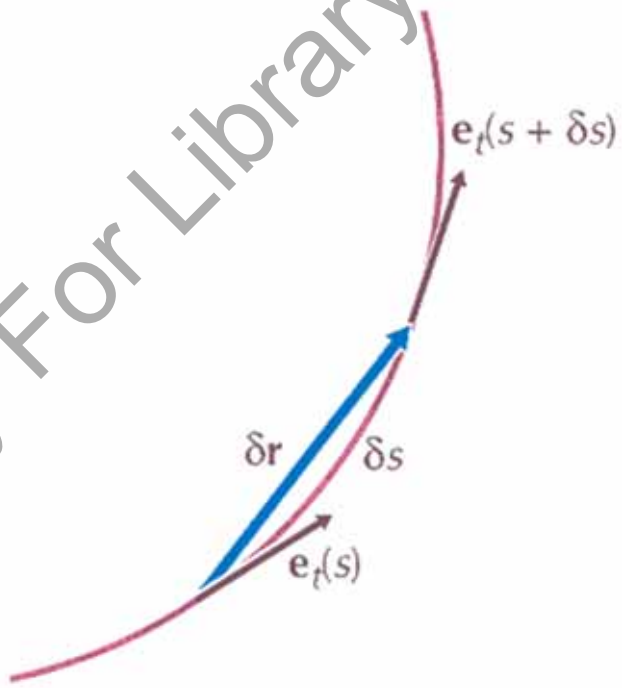
para t=3 a_θ=0.557 [m/s^2];

University Copy For Library Use

- Velocidad y aceleración en una trayectoria cualquiera.

Estudiamos la velocidad y aceleración de una trayectoria cualquiera sobre una curva "s".

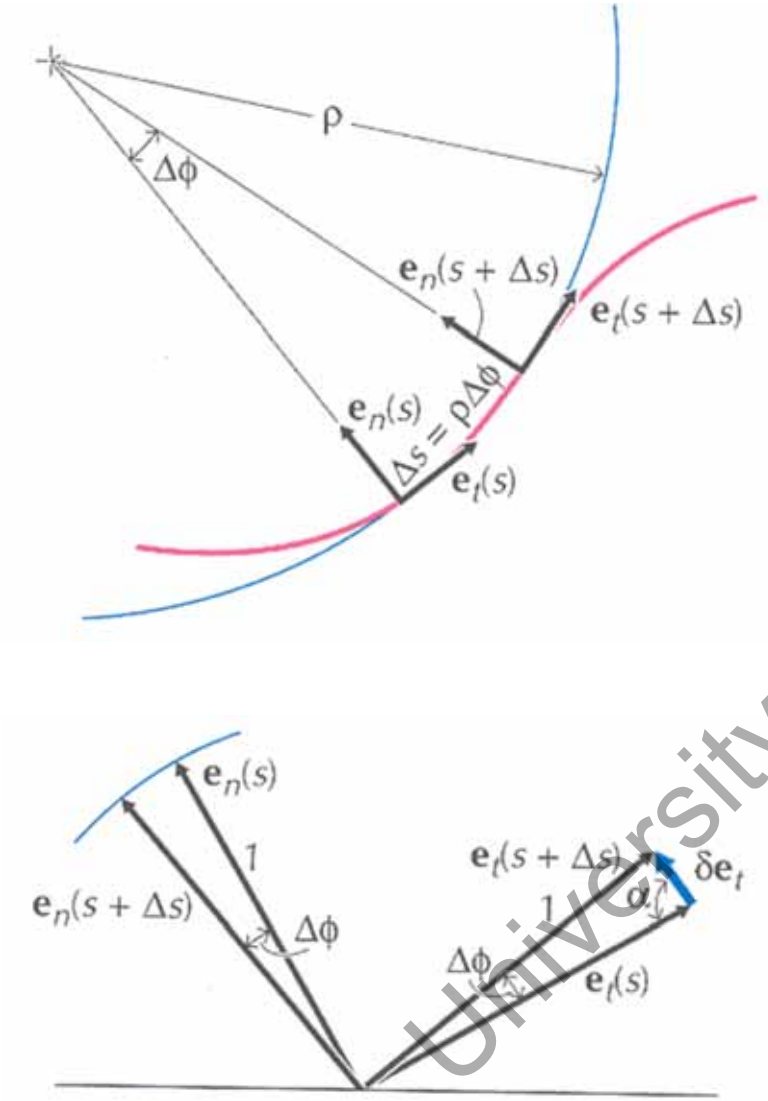




$$v(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta r(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta s(t)}{\delta t} e_t = \dot{s} e_t = v e_t$$

University Copy For Library Use

- Movimiento curvilíneo plano.



Como el vector e_t varía con el tiempo se ha de derivar junto a la velocidad para calcular la aceleración.

$$\dot{e}_t = \frac{de_t}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{de_t}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{e_t(s+\Delta s) - e_t(s)}{\Delta s};$$

$$si\ \Delta\phi \to 0, \left|e_t(s+\Delta s) - e_t(s)\right| \to 1\Delta\phi,\ y\ \alpha \to 90^o$$

$$\Rightarrow \frac{de_t}{ds} \approx \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} e_n(s);$$

$$como\ que\ \Delta s = \rho\Delta\varphi$$

$$\dot{e}_t = \frac{\dot{s}}{\rho} e_n(s);\ con\ \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \rho\dot{\phi}$$

University Copy For Library Use

- Movimiento curvilíneo plano.

Finalmente calculamos la aceleración en componentes tangencial y normal a la curva "s".

$$v(t) = ve_t$$

$$a(t) = a_t e_t + a_n e_n = \dot{v}(t) = \frac{\partial(\dot{s}e_t)}{\partial t} = \ddot{s}e_t + \dot{s}\dot{e}_t$$

$$a(t) = \ddot{s}e_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}e_n$$

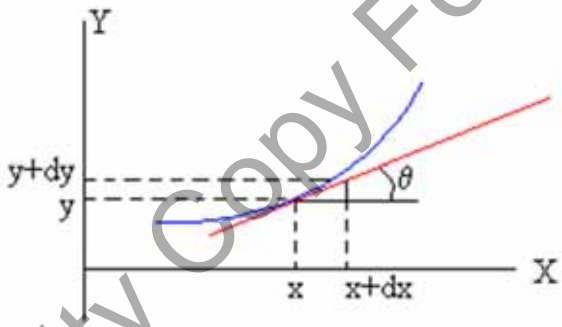
$$v(t) = \dot{s}e_t$$

$$a(t) = \ddot{s}e_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}e_n$$

Si el radio es constante r=ρ comprobamos:

$$v(t) = r\dot{\theta}e_\theta$$

$$a(t) = -r\dot{\theta}^2 e_r + r\ddot{\theta}e_\theta$$



Como vemos en la figura, en el triángulo rectángulo de base *dx*, altura *dy* e hipotenusa *ds*, establecemos las siguientes relaciones

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

La fórmula del radio de curvatura es

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{d\arctan\frac{dy}{dx}} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

El radio de curvatura es una cantidad positiva

University Copy For Library Use

• Ejercicio Riley ejemplo 13.12.

Un punto se mueve por la curva x*y=10 con una velocidad para x=5 de 5m/s de caída y que disminuye a=0.5m/s^2. Hallar la componente tangencial y normal de la caja.

dy/dx=-10/x^2.,

en x=5 pendiente=-10/25=-0.4

y''=20/x^3.,

en x=5 y''(5)=20/125=0.16

a_t=-0.5m/s^2 con la que está frenando

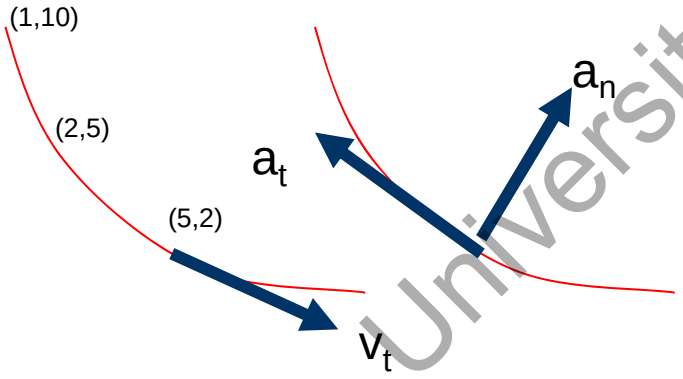
radio curvatura ρ= (1+y'^{2})$^{3/2}$/y''= 1/0.1281=7.808 m

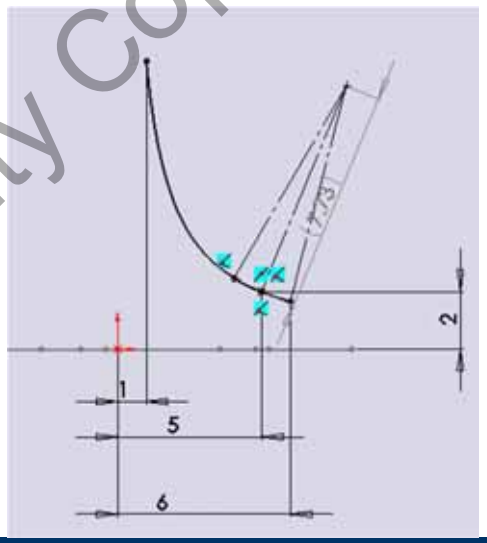
a_n=v^2/ρ = 5^2 / 7.808 = 3.202 m/s^2

$$v(t) = \dot{s} e_t$$

$$a(t) = \ddot{s} e_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} e_n$$

$$\rho = \frac{\left(1 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\ddot{y}}$$





University Copy For Library Use

- Ejercicio Casa.

Un punto se mueve por la curva $x^2+y^{2*}=1=r^2$ con una velocidad para x=1 de 5m/s de caída y que disminuye $a=0.5m/s^2$. Hallar la componente tangencial y normal de la caja.

$$v(t) = \dot{s}e_t$$

$$a(t) = \ddot{s}e_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}e_n$$

$$\rho = \frac{\left(1+\dot{y}^2\right)^{3/2}}{\ddot{y}}$$

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Introducción a las ecuaciones de velocidad y aceleración en coordenadas cartesianas y polares.

➢ Ejercicios de cálculo de velocidad y aceleración en coordenadas cartesianas y polares.

➢ Introducción al movimiento plano curvilíneo considerando posiciones relativas entre puntos de un mismo cuerpo sólido.

University Copy For Library Use

S17t.- Movimiento General.

Mejora 1415 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.

➢ Introducción al movimiento plano curvilíneo considerando posiciones relativas entre puntos de un mismo cuerpo sólido.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos de esta sesión

➢ Aprender a simplificar el movimiento de sólidos en función de sus apoyos para saber si un punto sólo tiene velocidad y aceleración en “x” por ejemplo, o si el cuerpo se desplaza pero no rota.

➢ Comprender que el movimiento de un sólido rígido es una traslación y una rotación de radio constante.

➢ Saber calcular el CIR y aplicarlo para la particularidad de velocidades paralelas y no paralelas.

➢ Realizar ejercicio básico de velocidades basado en una barra que se traslada y rota.

➢ Introducir concepto coriolis que se verá en ejemplos posteriores.

➢ Uso de otros ejes no cartesianos.

$$v(t) = r\dot{\theta}e_\theta$$
$$a(t) = -r\dot{\theta}^2 e_r + r\ddot{\theta}e_\theta$$

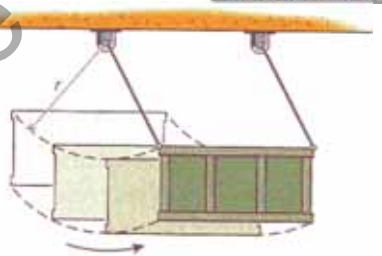
$$v_{D'} = v_D + v_{D'D}$$
$$a_{D'} = a_D + a_{D'D} + 2\omega_{guiaAD'} \times v_{D'D}$$

University Copy For Library Use

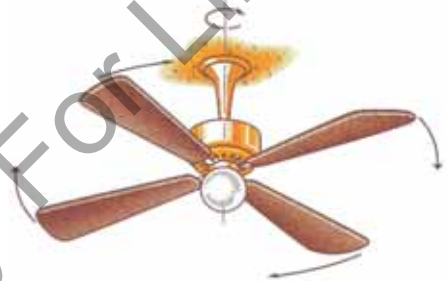
- Cinemática de sólidos.

Pasamos a estudiar la cinemática de varios sólidos. En las siguientes transparencias se analizarán las implicaciones en velocidades y aceleraciones de cada movimiento.

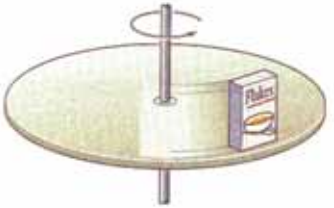
Traslación rectilínea
(a)



Traslación curvilínea
(b)

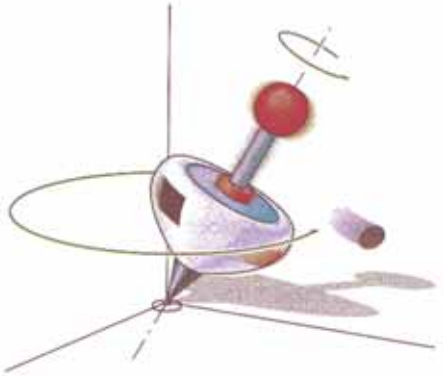


(c)



Rotación en torno a un eje fijo
(d)

Movimiento plano cualquiera
(e)

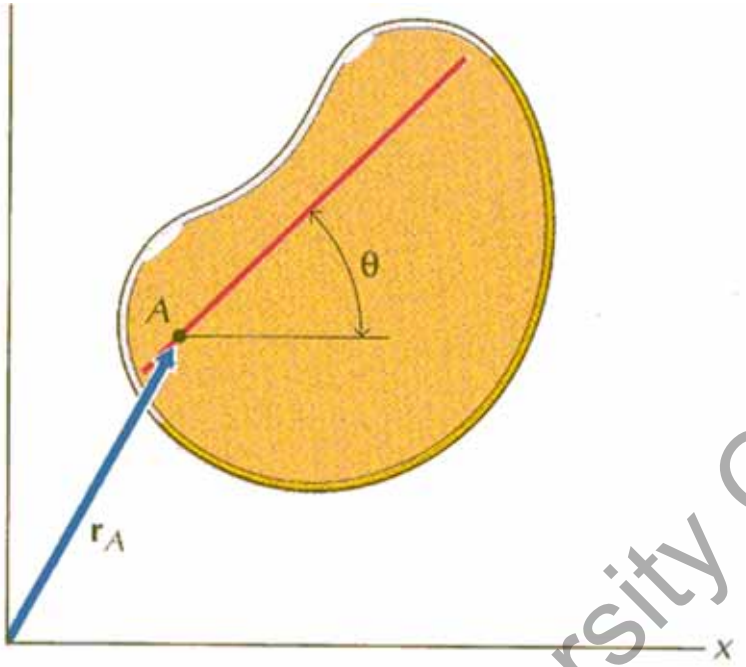


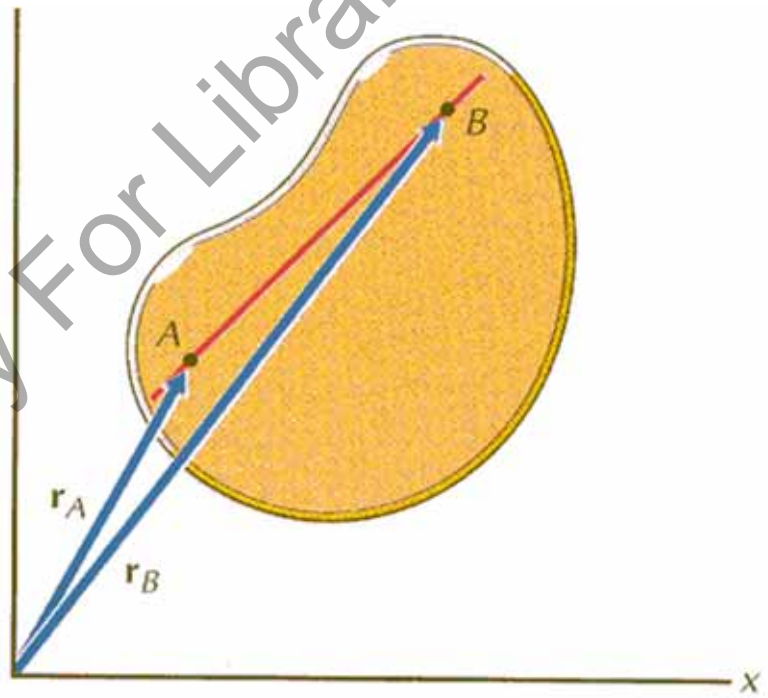
Rotación en torno a un punto fijo
(f)

University Copy For Library Use

- Posición de la recta en traslaciones.

Si analizamos dos puntos cualquiera de una recta en un cuerpo sometido a traslaciones veremos que han de tener la misma velocidad y aceleración.





$$r_B = r_A + r_{B/A}$$

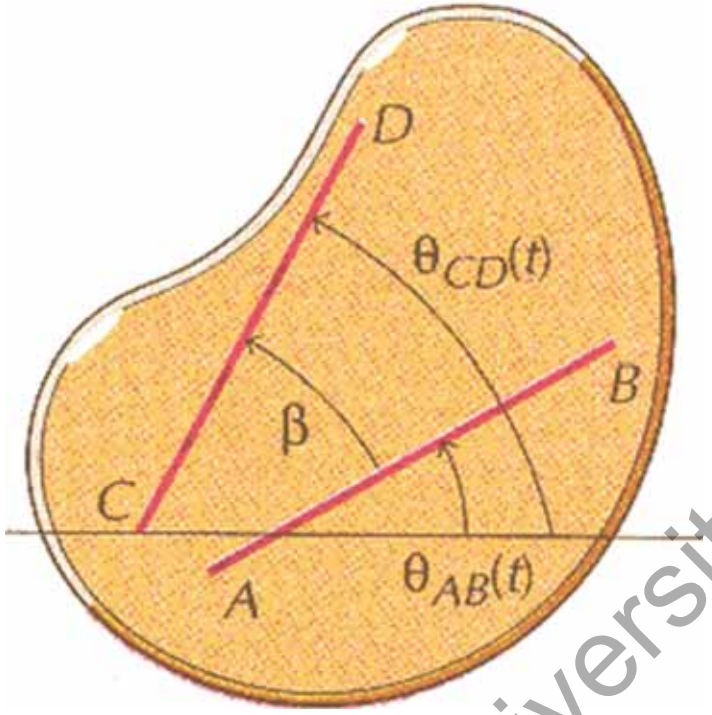
$$v_B = \dot{r}_A + \dot{r}_{B/A} = v_A, \; pues \; \dot{r}_{B/A} = 0$$

$$a_B = \dot{v}_B = a_A$$

University Copy For Library Use

- Posiciones de dos rectas en movimiento plano.

Si analizamos las posiciones de dos rectas pertenecientes a un cuerpo sometido a un movimiento plano comprobaremos que tienen la misma velocidad y aceleración angular.



$$\theta_{CD} = \theta_{AB} + \beta$$

$$\omega_{CD} = \dot{\theta}_{CD} = \dot{\theta}_{AB} + 0 = \omega_{AB},\ pues\ \dot{\beta} = 0$$

$$\alpha_{CD} = \dot{\omega}_{CD} = \dot{\omega}_{AB} = \alpha_{AB}$$

University Copy For Library Use

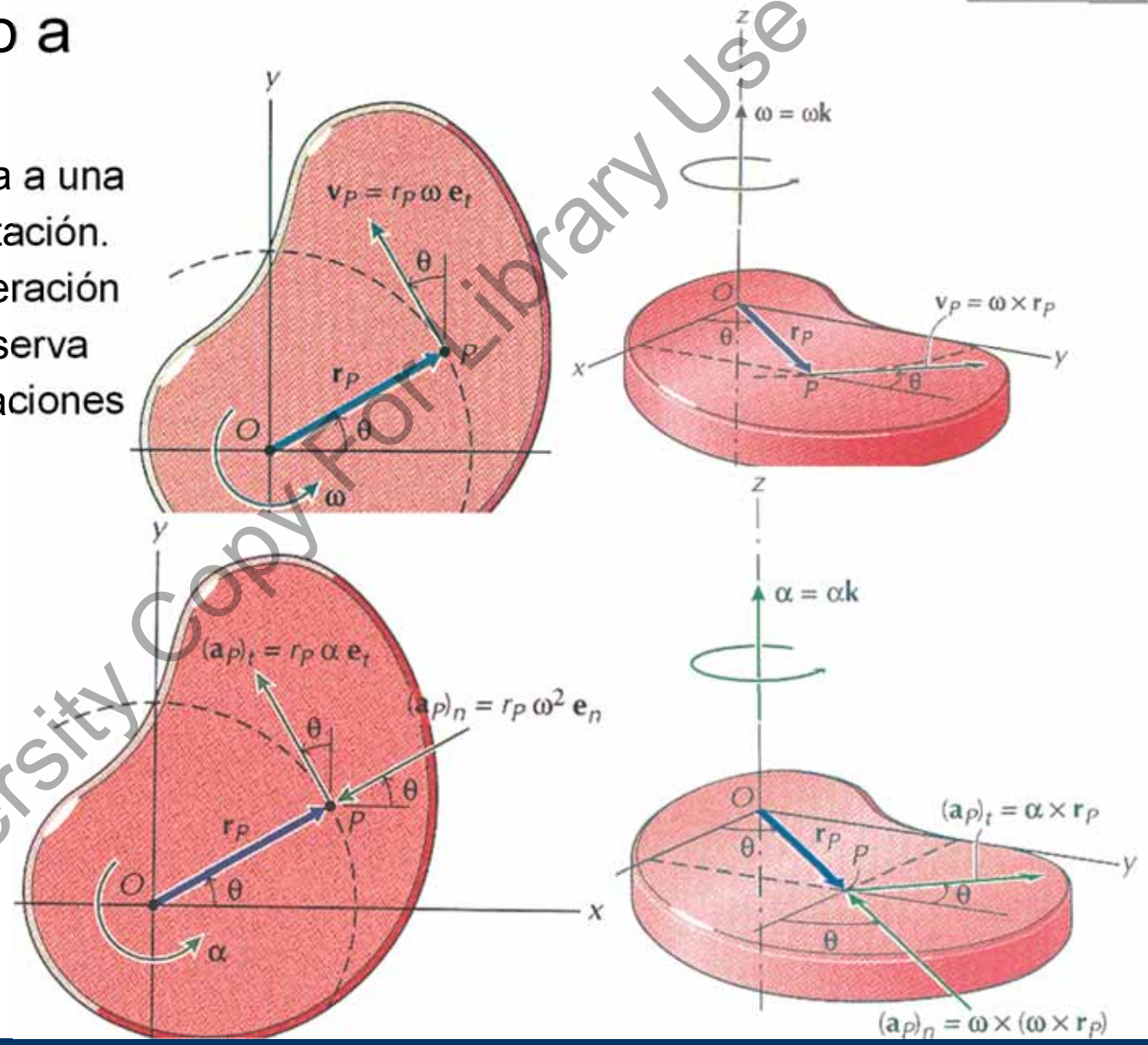
• Rotación en torno a un eje fijo.

Cualquier punto se encuentra a una distancia fija "r" del eje de rotación. Por tanto la velocidad y aceleración se calculan tal y como se observa en las figuras usando las relaciones de coordenadas polares.

Si el radio es constante;

$$v(t) = r\dot{\theta}e_\theta$$

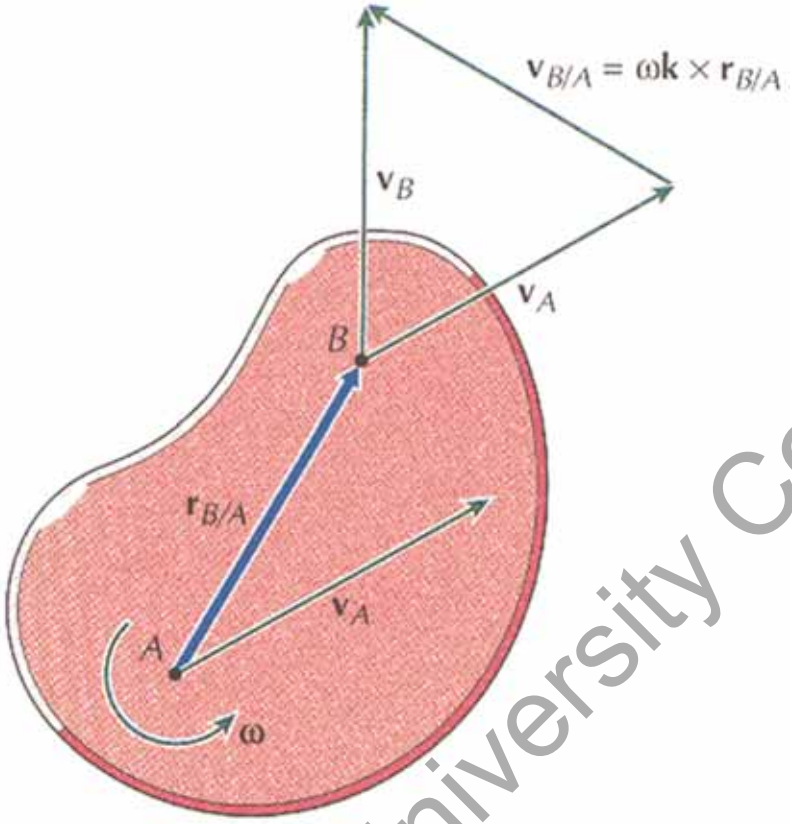
$$a(t) = -r\dot{\theta}^2 e_r + r\ddot{\theta}e_\theta$$

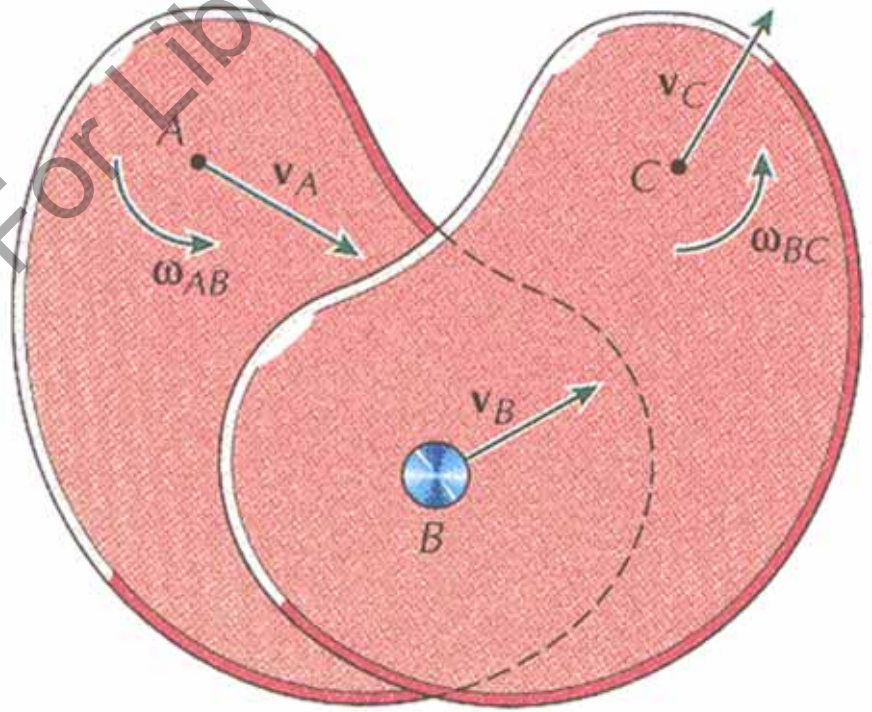


University Copy For Library Use

• Movimiento relativo en movimiento general.

Pasamos a estudiar las posiciones relativas en movimientos generales en un cuerpo y en dos cuerpos diferentes. En la notación se usan vectores para evitar descomponer.





$$v_B = v_A + v_{B/A} = v_A + r_{B/A}\omega e_t = v_A + \omega k \times r_{B/A}$$

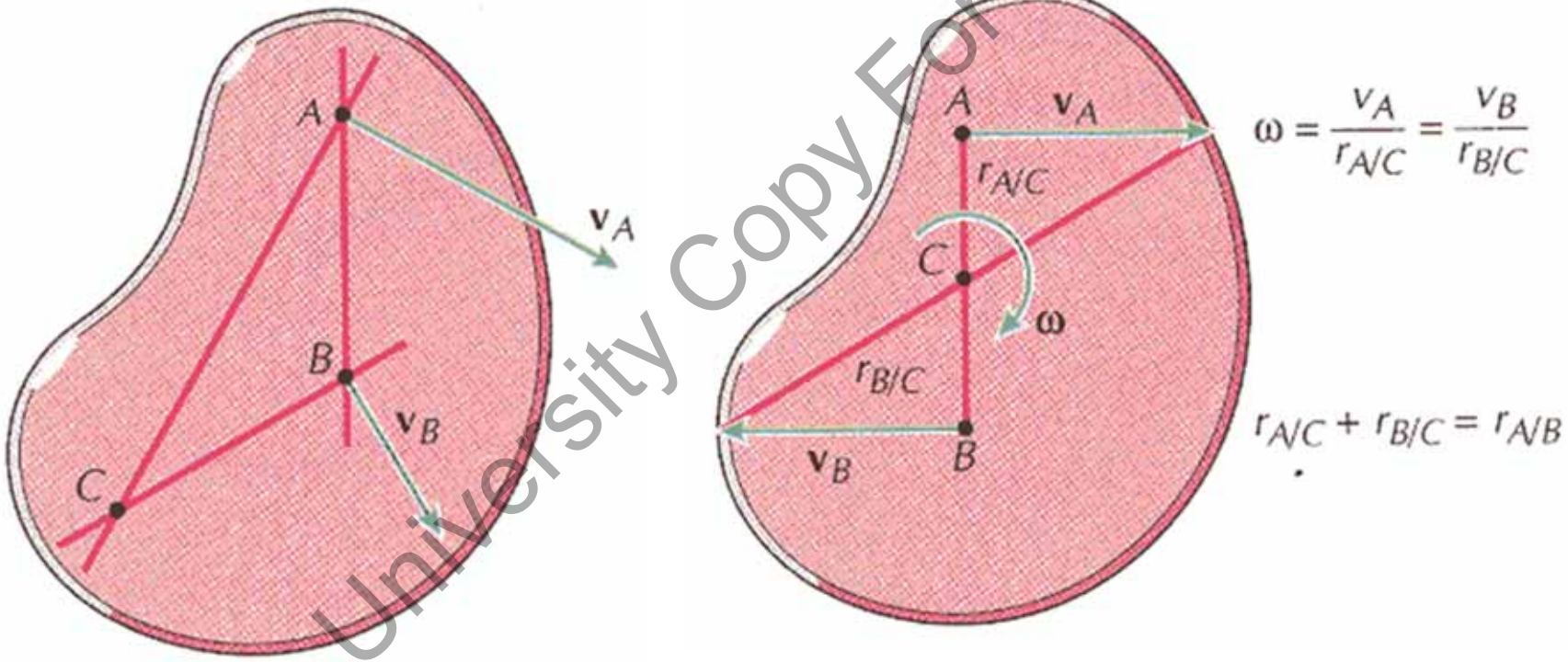
$$v_B = v_A + v_{B/A} = v_C + v_{B/C} = v_C + \omega_{BC} k \times r_{B/C}$$

University Copy For Library Use

- Centro instantáneo de rotación (CIR).

➢ El CIR está en la perpendicular al vector velocidad del punto

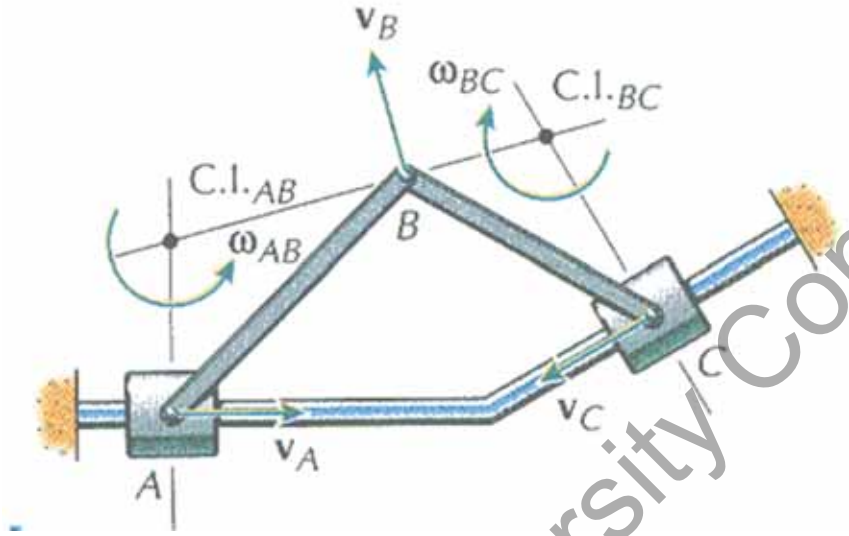
➢ El módulo de la velocidad es proporcional a la distancia al CIR y el coeficiente de proporcionalidad es ω.

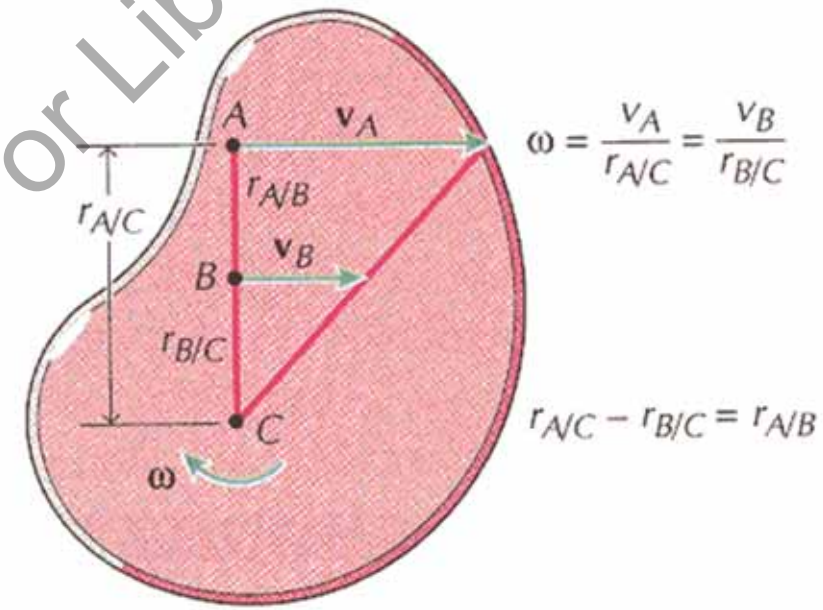


University Copy For Library Use

• Aplicación del CIR.

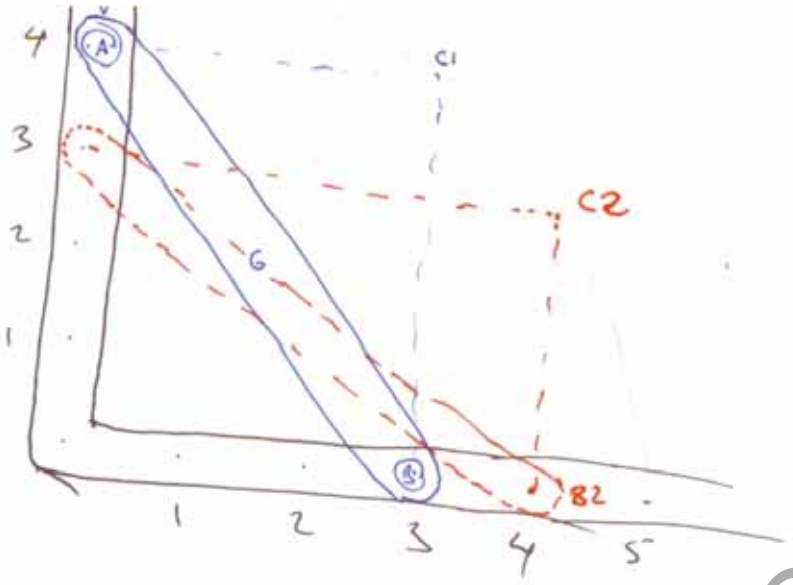
Si conocemos la velocidad en el punto C y en el punto B conocemos la dirección de la velocidad podemos calcular la velocidad en A.





University Copy For Library Use

- Resultados velocidades con CIR.



① CIR C1 versus C2
② ω_{A_1}
③ V_{B_1}
④ V_G desde C1, A y B
⑤ V_{B2}

Dato partida V_A=6[m/s] bajada

$V_{A_1} = V_{C_1} + V_{A/C_1}$

: $0 = 0 + 0$

: $-6 = 0 + -\omega \cdot 3 \Rightarrow \omega = 2$

$V_B = V_{C_1} + V_{B/C_1}$

x: $V_{Bx} = 0 + 2.4 = 8$

y: $0 = 0 + 0$

$V_{G_1} = V_{C_1} + V_{G/C_1}$

x: $V_{Gx} = 0 + 2.2 = 4$

y: $V_{Gy} = 0 - 2.15 = -3$

$V_G = V_A + V_{G/A_1}$

x: $V_{Gx} = 0 + 2.2 = 4$

y: $V_{Gy} = -6 + 2.15 = -3$

$V_G = V_{B_1} + V_{G/B_1}$

x: $V_{Gx} = 8 - 4 = 4$

y: $V_{Gy} = 0 - 2.15 = -3$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -3\omega, 0)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (8, 0, 0)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 1.5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (4, -3, 0)$

$(0, -6, 0) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 1.5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, -6, 0) + (4, 1.5, 0) = (4, -3, 0)$

$(8, 0, 0) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 1.5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (8, 0, 0) + (-4, -3, 0) = (4, -3, 0)$

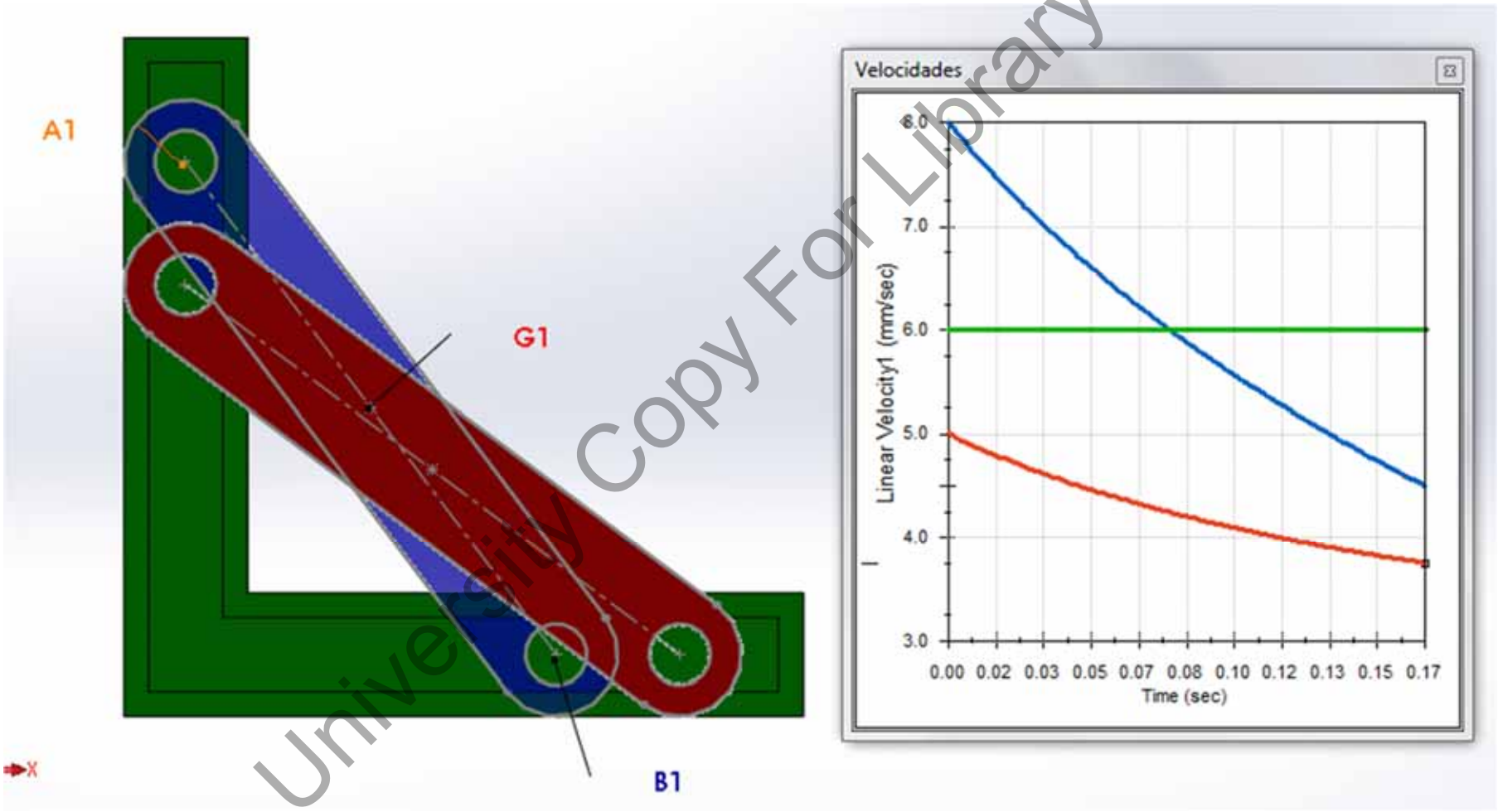
Sin MATES V_{B2}:

$V_{A2} = V_{C_2} + V_{A/C_2} \Rightarrow -6 = -\omega \cdot 4 \Rightarrow \omega = +1.5$

$\omega = 1.5 \rightarrow$

University Copy For Library Use

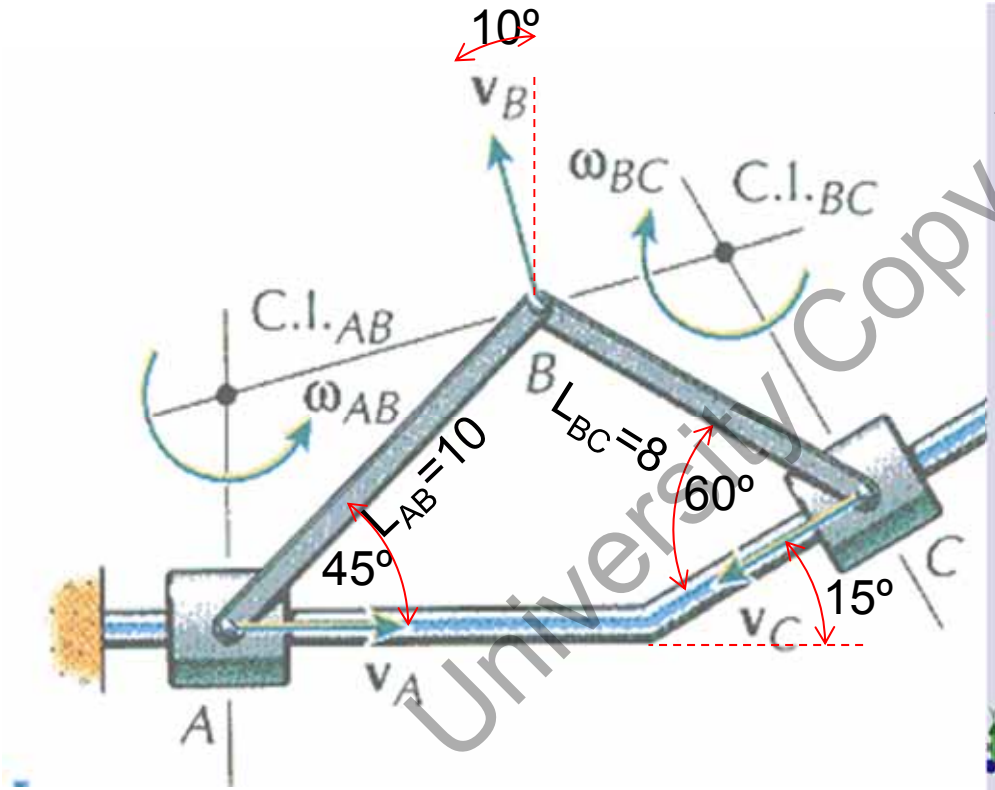
- Resultados velocidades SolidWorks.

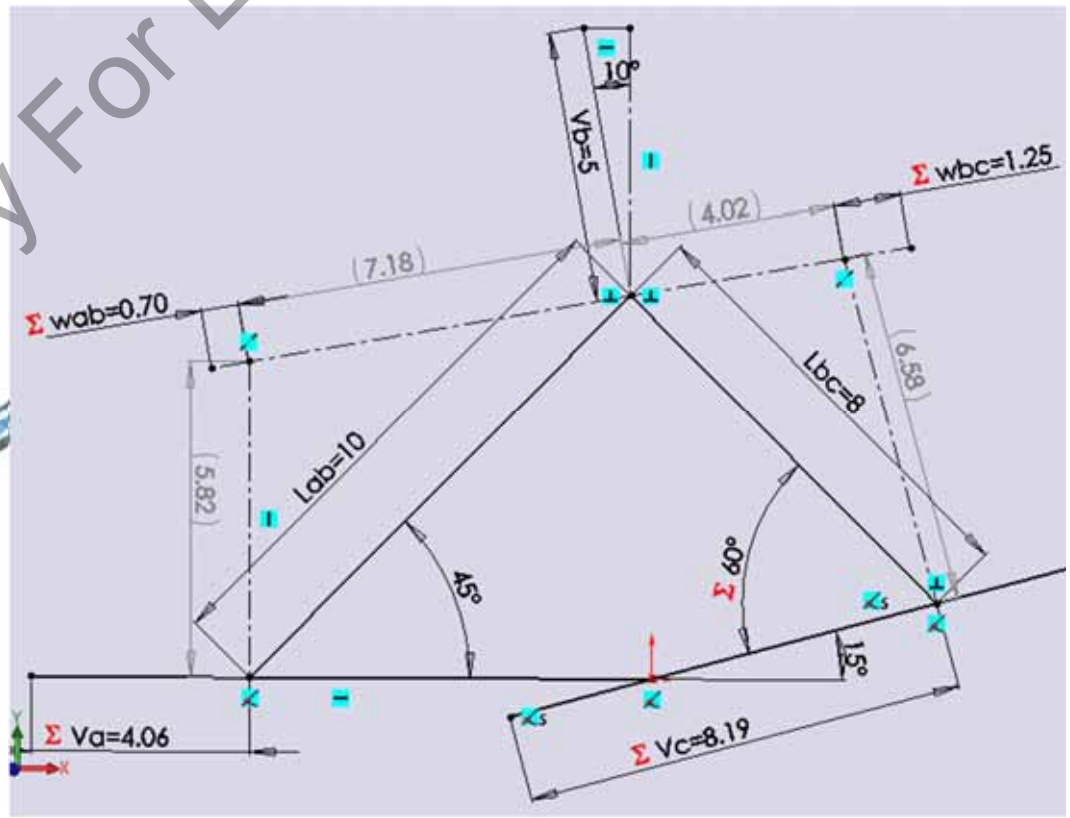


University Copy For Library Use

- Ejercicio CIR casa.

Si estiramos de B con 5m/s dar la velocidad de C y de A y las velocidades angulares de AB y BC.

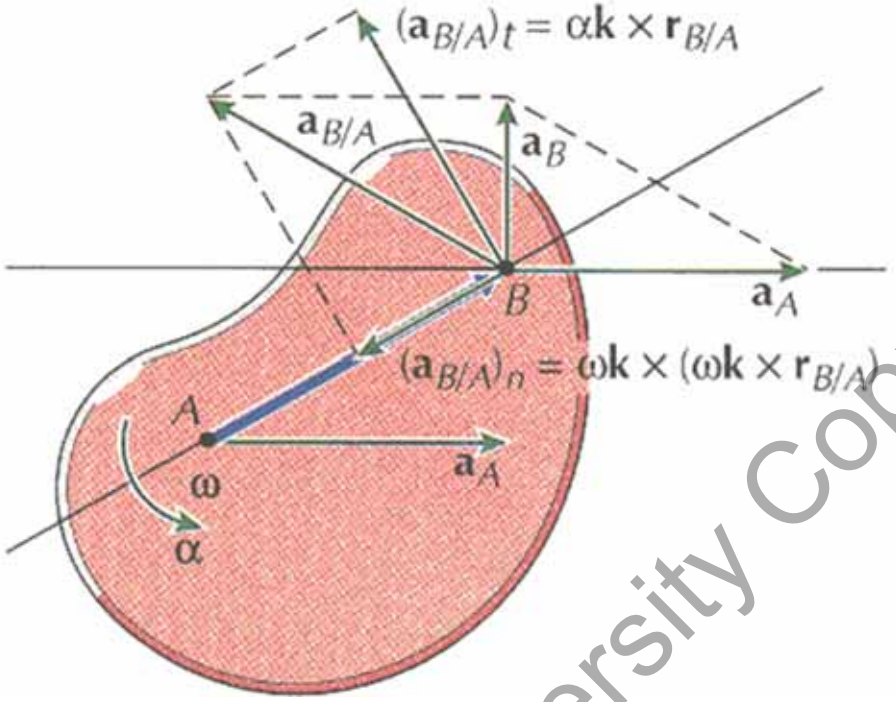


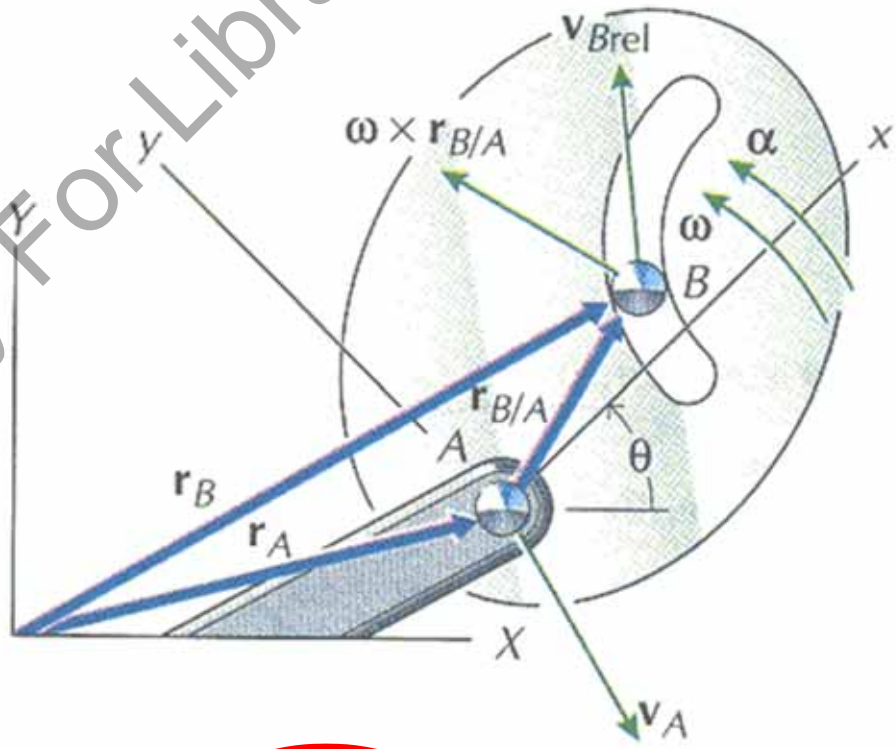


University Copy For Library Use

• Aceleración relativa en movimiento general no sólido.

Al igual que hemos relacionado velocidades podemos hacer los mismo con aceleraciones y además consideran que los cuerpos no son sólidos como con deslizaderas.





$$v_B = v_A + \omega k \times r_{B/A} + v_{Brel}$$

$$a_B = a_A + \omega k \times (\omega k \times r_{B/A}) + \alpha k \times r_{B/A} + a_{Brel} + 2\omega \times v_{Brel}$$

Aceleración de Coriolis

University Copy For Library Use

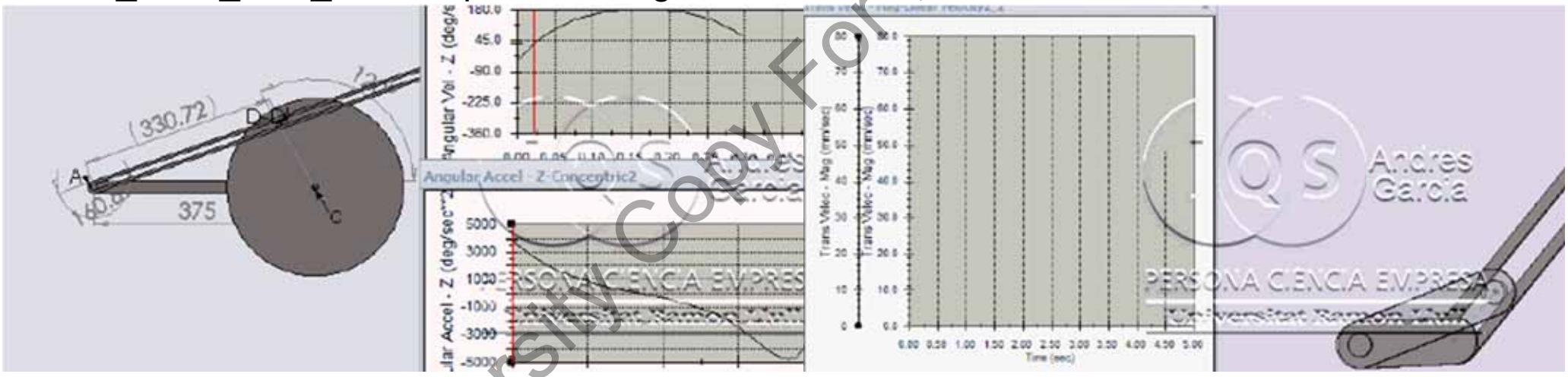
- Coriolis.

Para Coriolis vamos a usar una nomenclatura en todos los problemas como sigue:

D punto del sólido que gira y conocemos.

D' punto de la guía que gira que en el instante inicial se encuentra debajo de D

03MA_01rot_EXF_09101c-pr3-coriolis.gif Beer Din 15_150



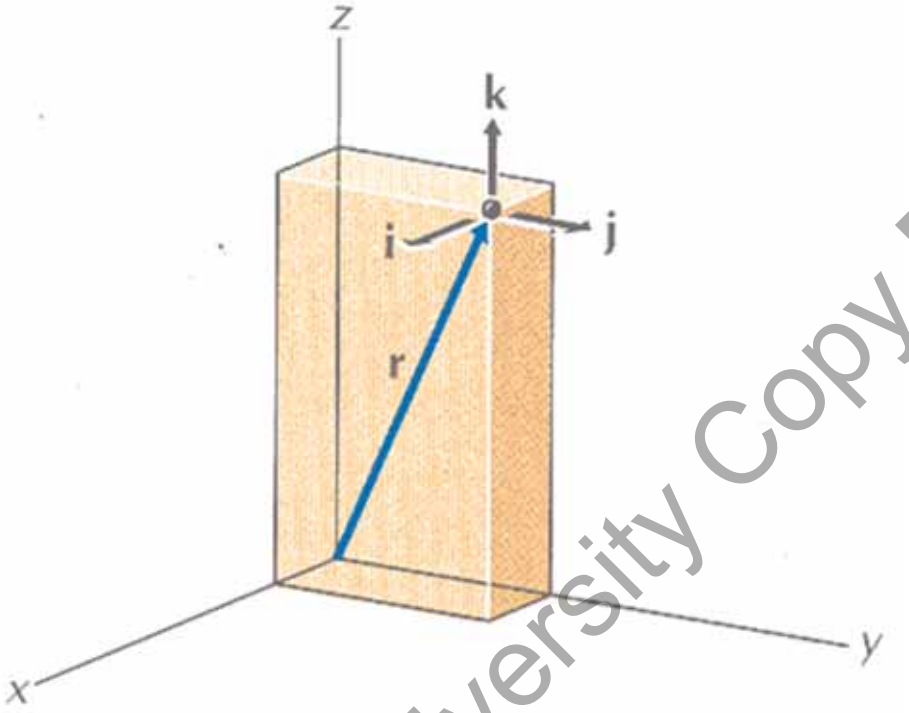
$$v_{D'} = v_D + v_{D'D}$$

$$a_{D'} = a_D + a_{D'D} + 2\omega_{guiaAD'} \times v_{D'D}$$

University Copy For Library Use

• Coordenadas rectangulares.

Repaso a los conceptos de posición, velocidad y aceleración en coordenadas rectangulares.

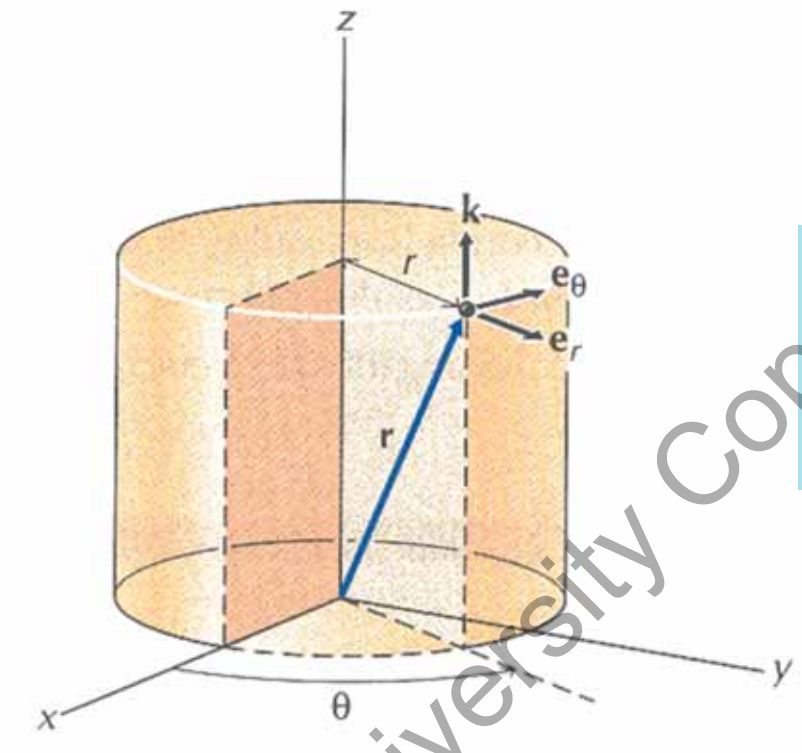


$$r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k};$$
$$v(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k};$$
$$a(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j} + \ddot{z}(t)\mathbf{k};$$

University Copy For Library Use

• Coordenadas cilíndricas.

Introducción de la componente "z" en el sistema de coordenadas polares estudiado en 2D para usar coordenadas cilíndricas 3D. (Uso: deslizamiento y giro de pieza en torno a rosca)

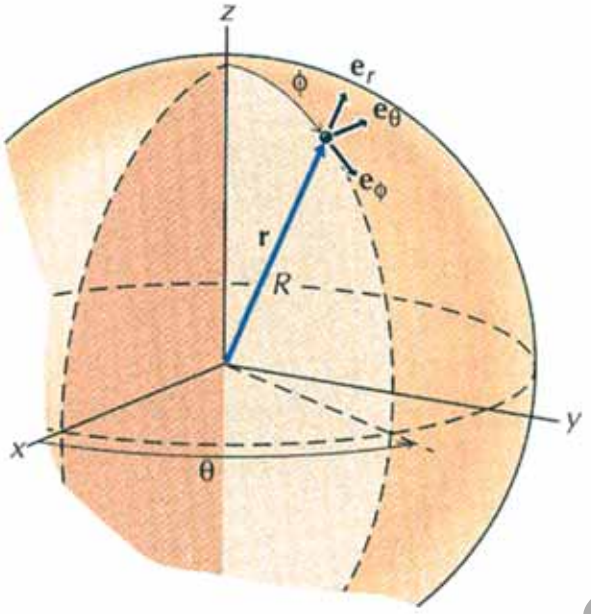


$$r(t) = r(t)\mathbf{e}_r + z(t)\mathbf{k};$$
$$v(t) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k};$$
$$a(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k};$$

University Copy For Library Use

• Coordenadas esféricas.

Introducción de la componente "z" en el sistema de coordenadas polares estudiado en 2D para usar coordenadas esféricas 3D. (Uso: satélites)



$$r(t) = R(t)\mathbf{e}_r;$$

$$v(t) = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{e}_\theta + R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi;$$

$$a(t) = \left(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\mathrm{sen}^2\phi\right)\mathbf{e}_R + \left(R\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi + 2\dot{R}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi + 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\right)\mathbf{e}_\theta + \left(R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} - R\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi\right)\mathbf{e}_\phi$$

University Copy For Library Use

• Ejemplo casa Riley 13-17 pag.63.

Un radar sigue a un avión y en el instante representado (t=0) R=19.5km, θ=110º (1.920 rad) y ϕ=60º (1.047 rad). Se estima R'=-85.5 m/s, R''=4.5 m/s^2, θ'=9e-3 rad/s, θ''=2e-5 rad/s^2, ϕ'=2.5e-3 rad/s y ϕ''=8e-5 rad/s^2. Calcular velocidad y aceleración del avión en coordenadas esféricas y rectangulares:

e_r=

e_θ=

e_ϕ=

v(0)=-85.5e_r + 19500*9e-3*sin(60º)e_θ + 19500*2.5e-3e_ϕ = -85.5e_r +151.99 e_θ + 47.75e_ϕ

a(0)=

(1950

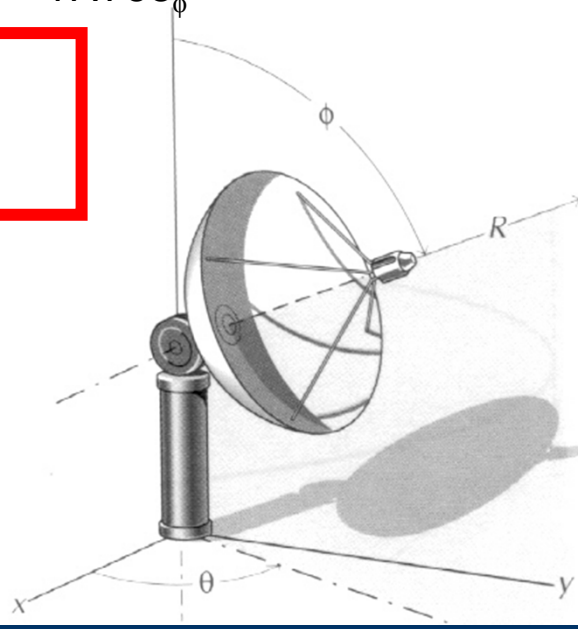
(1950

= 3.19e_r -0.556 e_θ +0.449e_ϕ

$$r(t) = R(t)\mathbf{e}_r;$$

$$v(t) = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{e}_\theta + R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi;$$

$$a(t) = \left(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}^2\phi\right)\mathbf{e}_R + \left(R\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi + 2\dot{R}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi + 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\right)\mathbf{e}_\theta + \left(R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} - R\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi\right)\mathbf{e}_\phi$$



University Copy For Library Use

- Ejemplo casa Riley 13-146 pag.66.

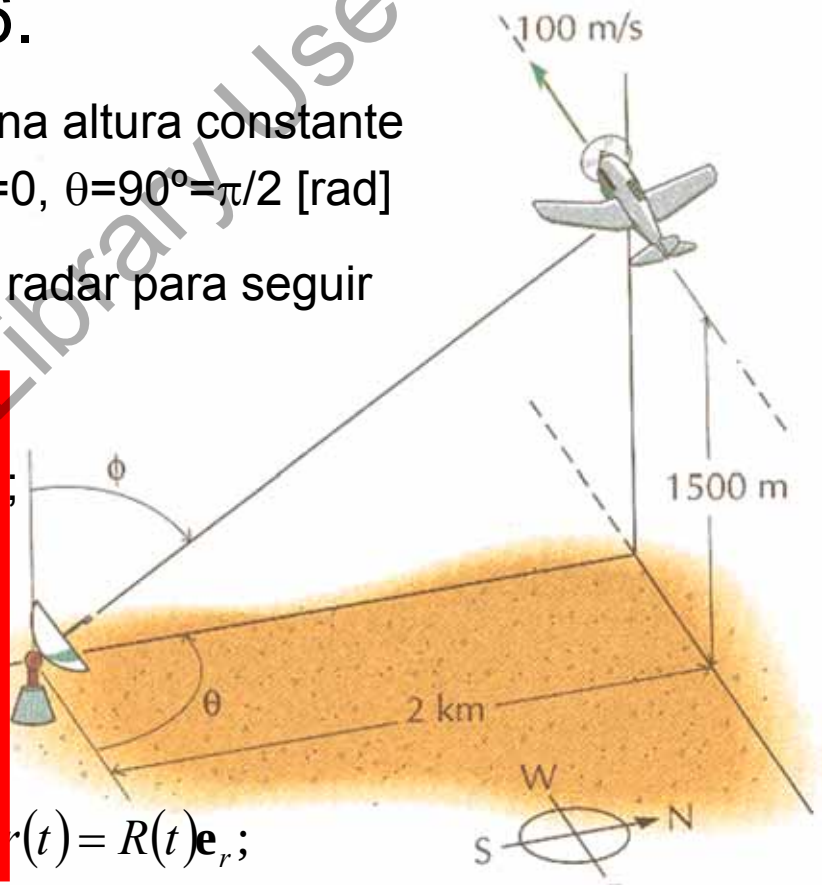
Un avión se mueve con una velocidad de 100 [m/s] a una altura constante de 1500 [m] a 2 [km] al norte del radar. Suponer para t=0, $\theta=90^{o}=\pi/2$ [rad]

Calcular las velocidades y aceleraciones angulares del radar para seguir al avión en t=0.

R(0)=

v(0)=

a(0)=



$$r(t) = R(t)\mathbf{e}_r;$$

$$v(t) = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{e}_\theta + R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi;$$

$$a(t) = \left(\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\mathrm{sen}^2\phi\right)\mathbf{e}_R + \left(R\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi + 2\dot{R}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi + 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\phi\right)\mathbf{e}_\theta + \left(R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} - R\dot{\theta}^2\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi\right)\mathbf{e}_\phi$$

Sol. libro $\theta'=0.050$ rad/s, $\theta''=0$ rad/s^2, $\phi'=0$ rad/s, $\phi''=0.0012$ rad/s^2.

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Introducción a movimientos en tres dimensiones.

University Copy For Library Use

S18t.- Ejercicios de Movimiento Plano General.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ....

- Repaso sesión anterior.

➢ Introducción a movimientos en tres dimensiones.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos de esta sesión

➢ Completar ejercicio básico barra con traslación y rotación para calcular velocidades y aceleraciones en dos posiciones.

➢ Comprender que la velocidad lineal ha bajado y por eso hay una desaceleración.

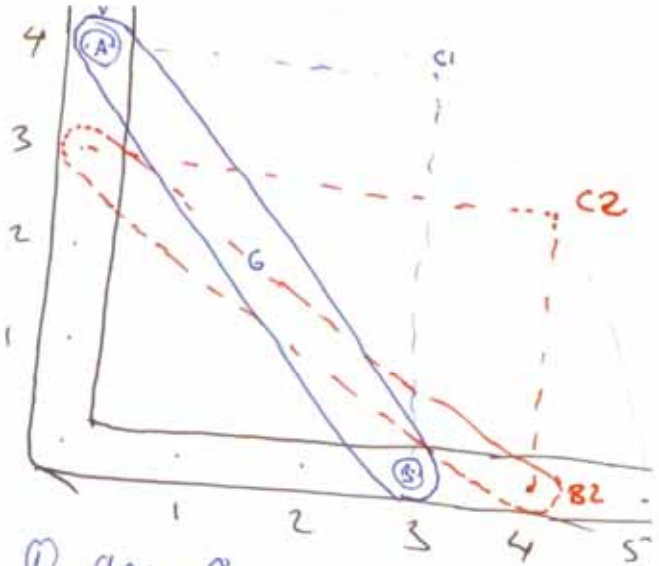
➢ Comprender que la velocidad rotacional ha bajado y por eso hay una aceleración angular negativa.

➢ Realizar el ejercicio con cálculo vectorial y con análisis gráfico para minimizar el impacto de errores matemáticos y ganar en intuición de signos de velocidades y aceleraciones.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Resultados aceleraciones ejercicio básico.

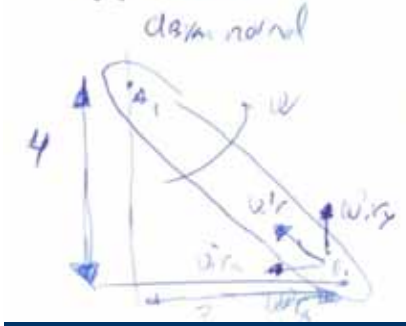


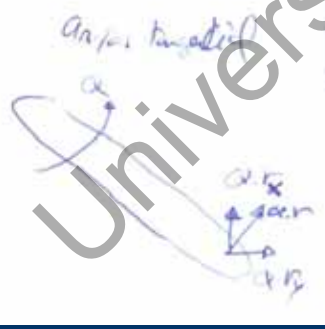
① a_{B1}, α_1

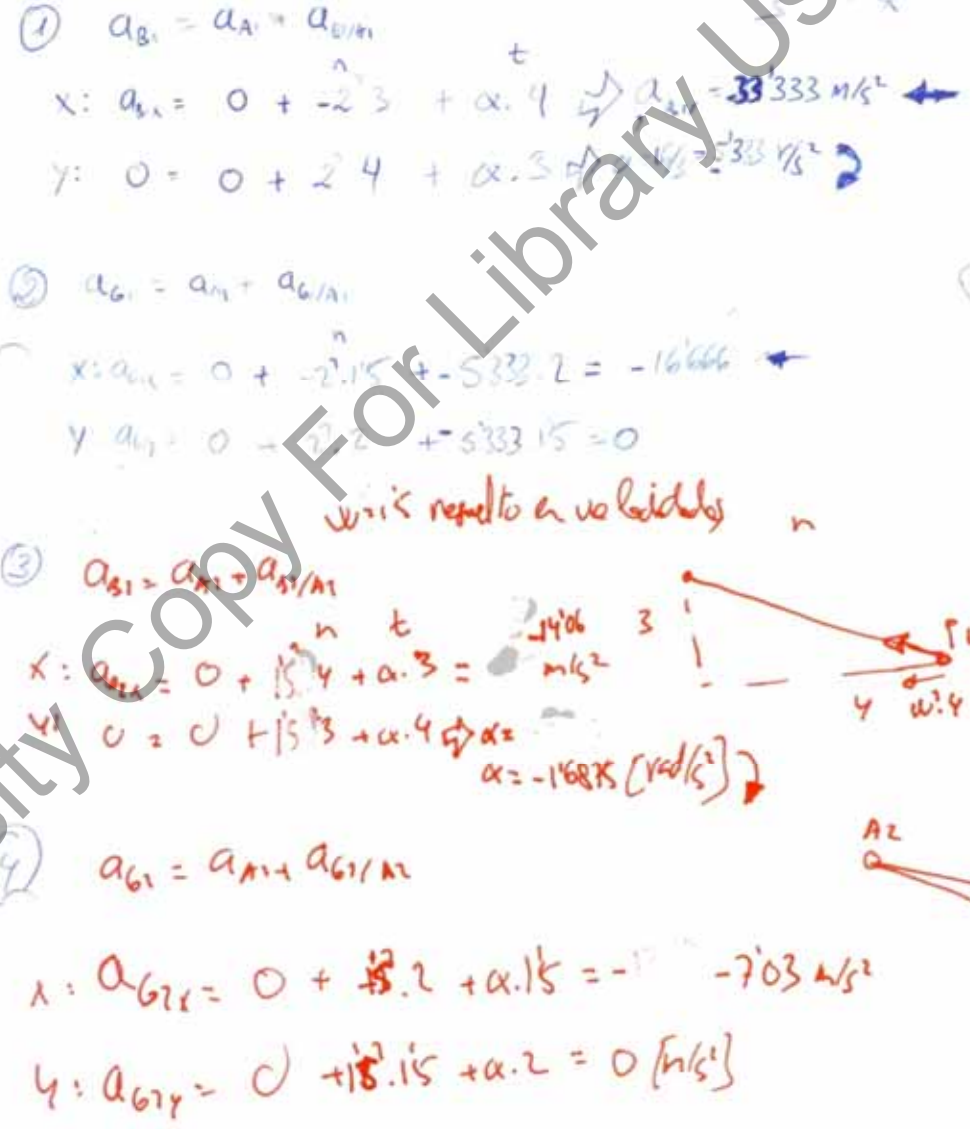
② a_{G1}

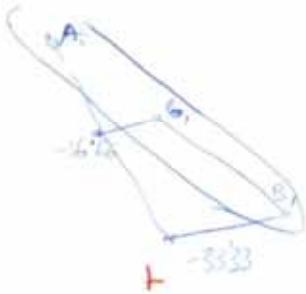
③ a_{B2}, α_2

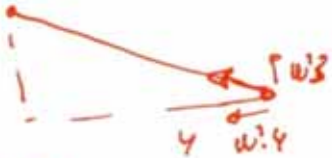
④ a_{G2}

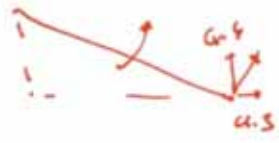


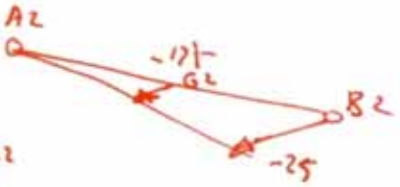






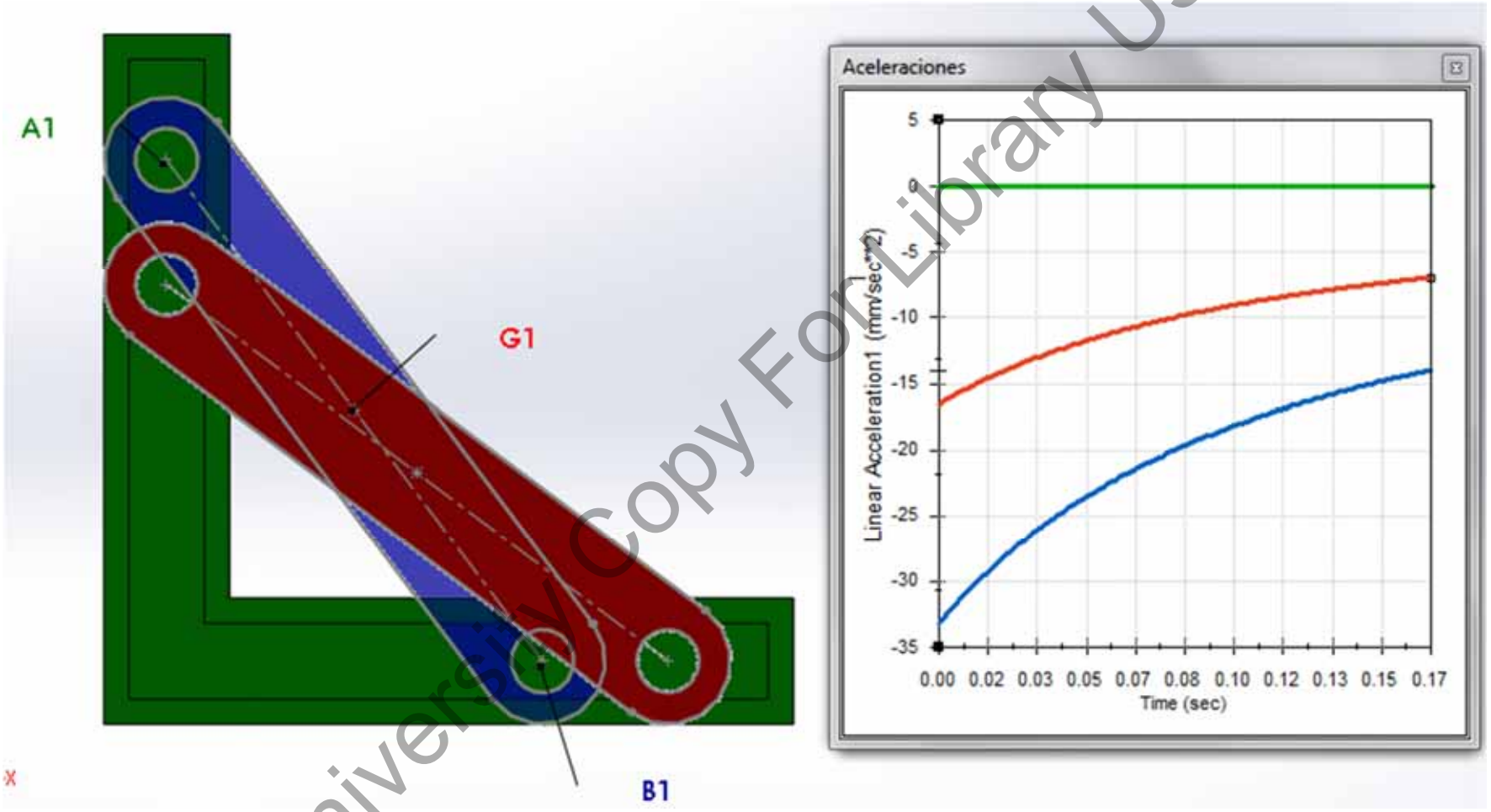






University Copy For Library Use

- Resultados aceleraciones SolidWorks.

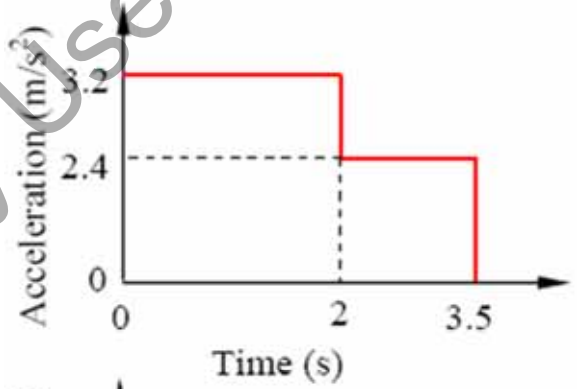


University Copy For Library Use

• Ejercicio U.Bristol Ex1.1.

Un vehículo acelera según gráfico superior cambiando de marcha a los 2 segundos.

(a) Calcular la velocidad y distancia recorrida desde inicio hasta 3.5 segundos.

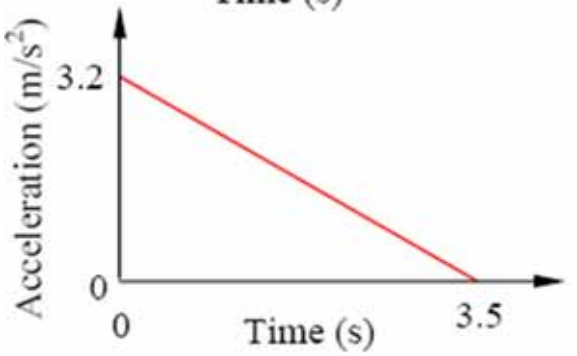


A los 2 segundos: $v_1 = v_0 + a_1 t_1 = 6.4 \text{ m/s}, \; s_1 = s_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 6.4 \text{ m}$

A los 3.5 segundos: $v_2 = v_1 + a_2 (t_2 - t_1) = 6.4 + 2.4 \times 1.5 = 10 \text{ m/s}$

$$s_2 = s_1 + v_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a_2 (t_2 - t_1)^2$$

$$= 6.4 + 6.4 \times 1.5 + \frac{1}{2} \times 2.4 \times 1.5^2 = 18.7 \text{ m}$$



(b) Otro vehículo con variador acelera según gráfico inferior. Calcular velocidad y distancia a los 3.5 segundos.

Ponemos a en función de t: a(t)=3.2-3.2*t/3.5 y calculamos integrando:

$$v_1 = v_0 + \int_{t=0}^{3.5} a\,dt = \left[3.2t - \frac{0.914}{2} t^2 \right]_{t=0}^{3.5} = 5.6 \text{ m/s}$$

$$s_1 = s_0 + \int_{t=0}^{3.5} v\,dt = \left[\frac{3.2}{2} t^2 - \frac{0.457}{3} t^3 \right]_{t=0}^{3.5} = 13.1 \text{ m}$$

University Copy For Library Use

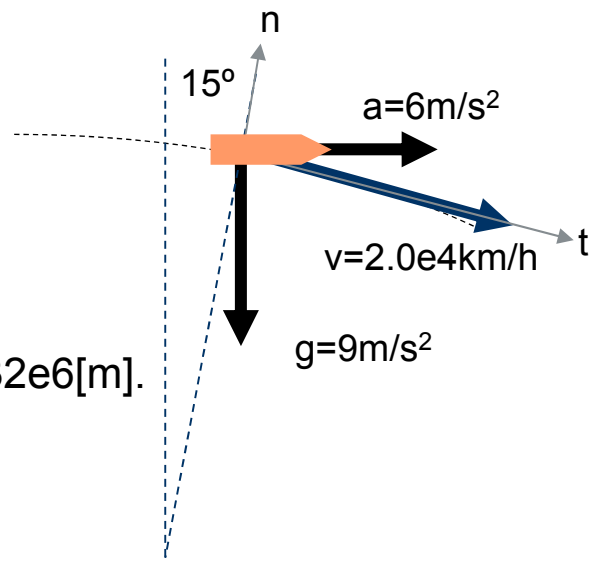
• Ejercicio Meriam Sample 2.8 pag.60.

Un cohete tiene una aceleración horizontal de 6[m/s^2] debido a su propulsión y en el instante de interés su trayectoria ya está inclinada 15º debido a la gravedad a esa altura es de 9 [m/s^2] y su velocidad es de 2.0e4 [km/h]. Calcular radio de curvatura y a que ritmo está creciendo la velocidad y el ángulo de la caída. Calcular la aceleración con componentes.

Primero distribuimos las aceleraciones en componentes:

a_n=9cos15º-6sin15º= 7.14 m/s^2.

a_t=9sin15º+6cos15º= 8.12 m/s^2.



Calculamos el radio de curvatura con la relación entre velocidad y aceleración normal:

$a_n=v^2/\rho \Rightarrow \rho=v^2/a_n$=(2000[km/h]*1000[m/km]/3600[s/h])^2/7.14[m/s^2]=4.32e6[m].

Calculamos el cambio de velocidad instantánea:

$\delta v/\delta t=a_t$ =8.12[m/s].

Calculamos el cambio de ángulo o velocidad angular instantánea:

$v=\omega*\rho \Rightarrow \omega=v/\rho$=(2000[km/h]*1000[m/km]/3600[s/h])/4.32e6[m]=1.285e-5[rad/s].

Calculamos la aceleración total:

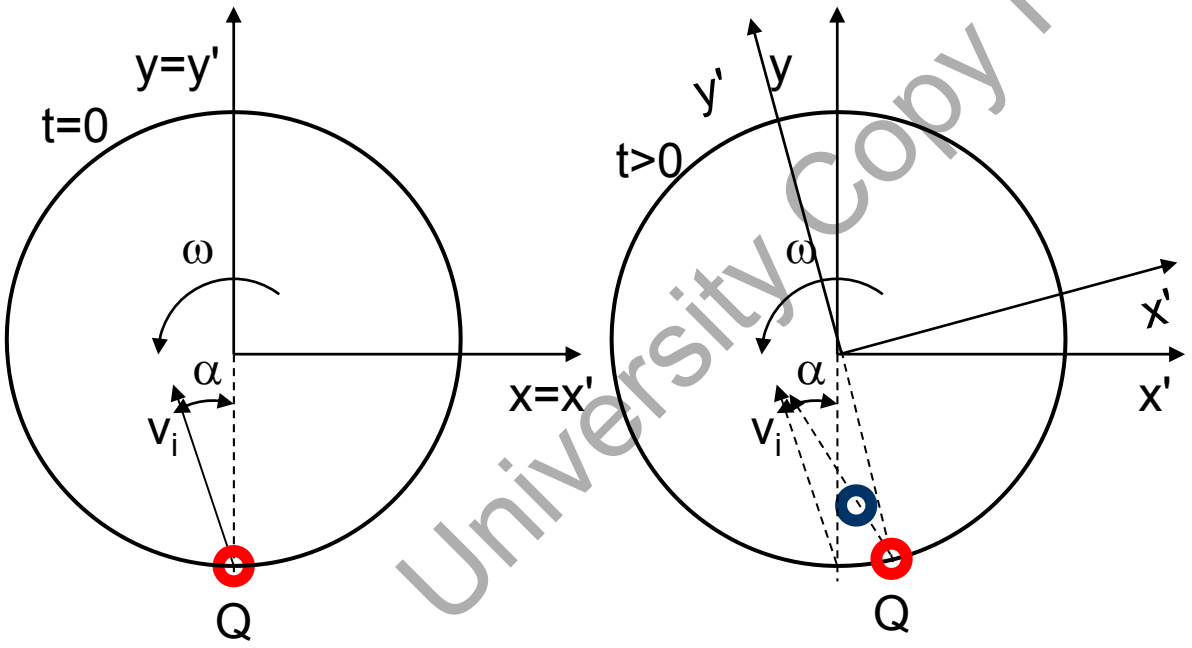
$a = 7.14e_n + 8.12\ e_t$, $|a|=\sqrt{(7.14^2+8.12^2)}$=10.81[m/s^2]

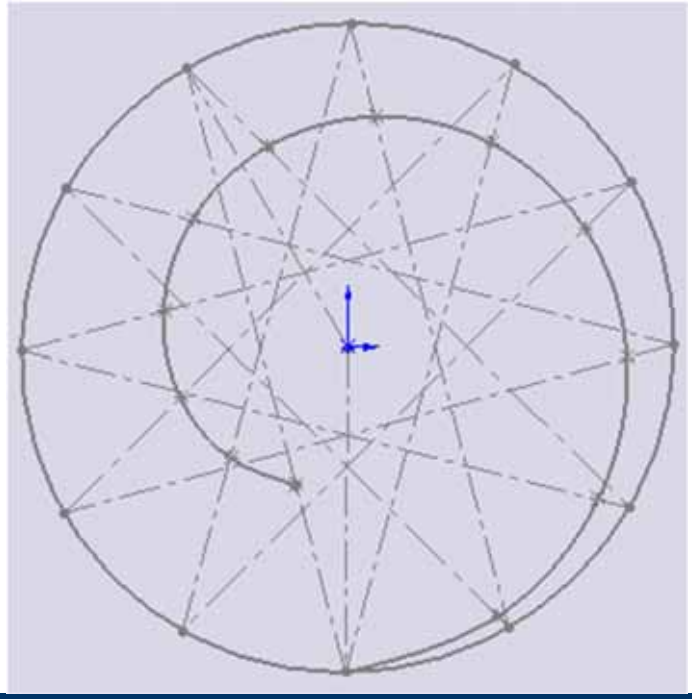
University Copy For Library Use

• Ejercicio Agulló Mecánica 1990 F2-10

Reflexionar sobre el siguiente ejercicio en casa.

Un objeto entra a un círculo de radio "r" que gira con velocidad angular ω. Al entrar lo hace con velocidad v_i y ángulo α. Calcular la velocidad absoluta de la partícula al entrar en el círculo y la aceleración relativa al círculo. Calcular la relación entre parámetros para que la partícula pase por centro. Calcular relación entre parámetros para que la partícula salga por el punto de entrada Q.

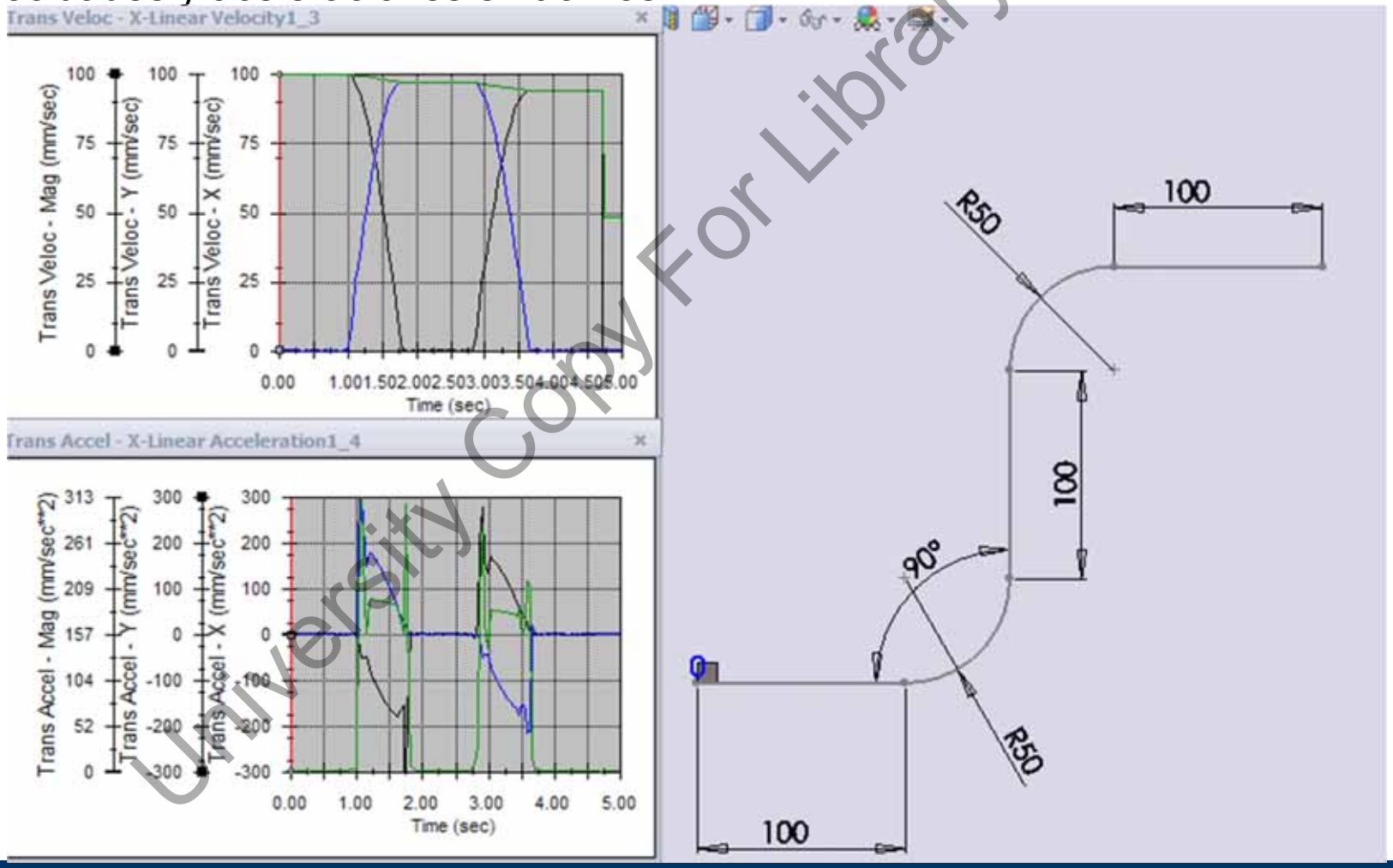




University Copy For Library Use

- Ejercicio SolidWorks

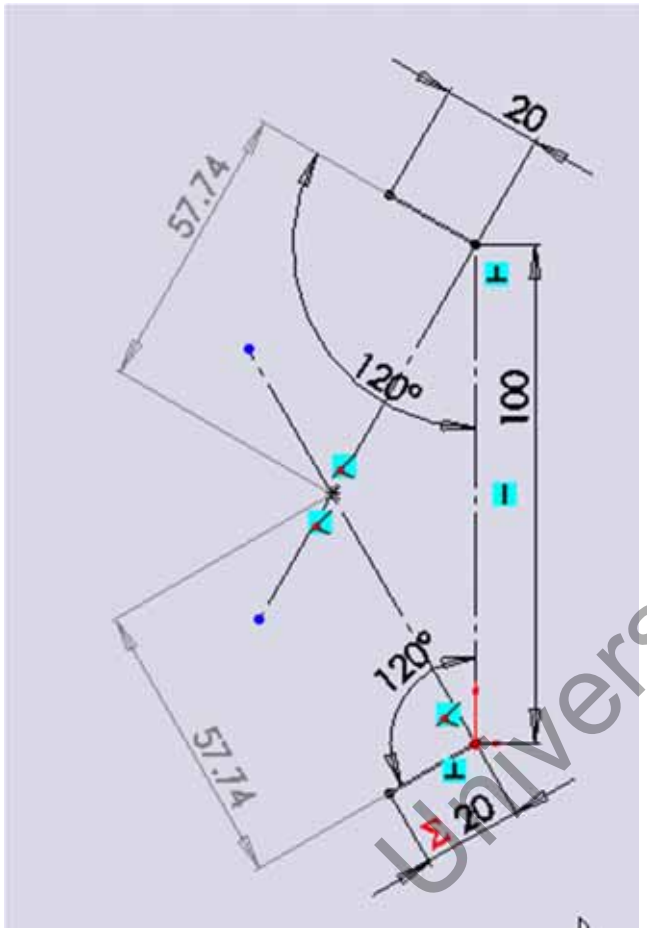
Si la partícula se mueve por la curva de la figura con una velocidad inicial de 100 [mm/s] deducir velocidades y aceleraciones en tramos.

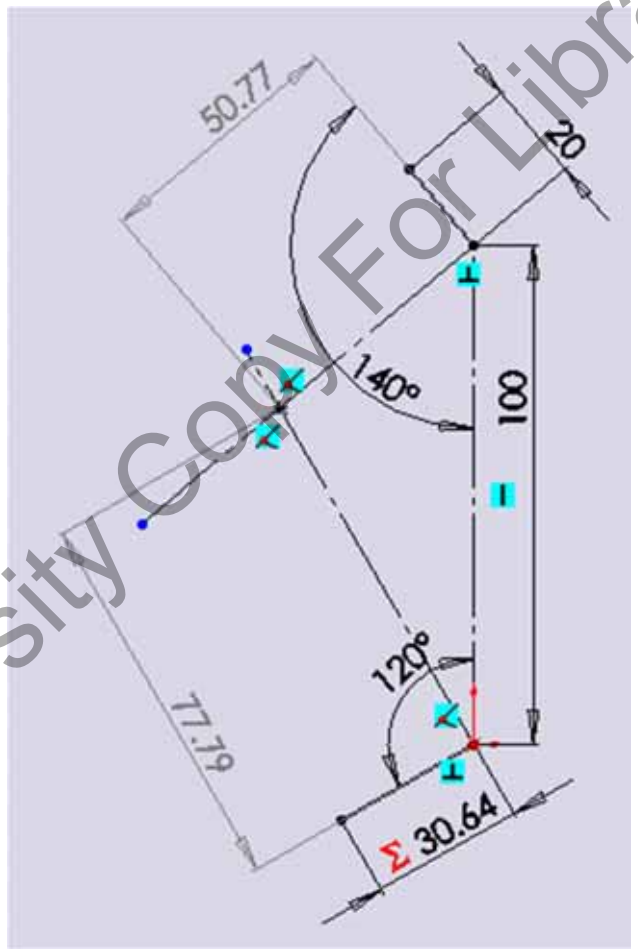


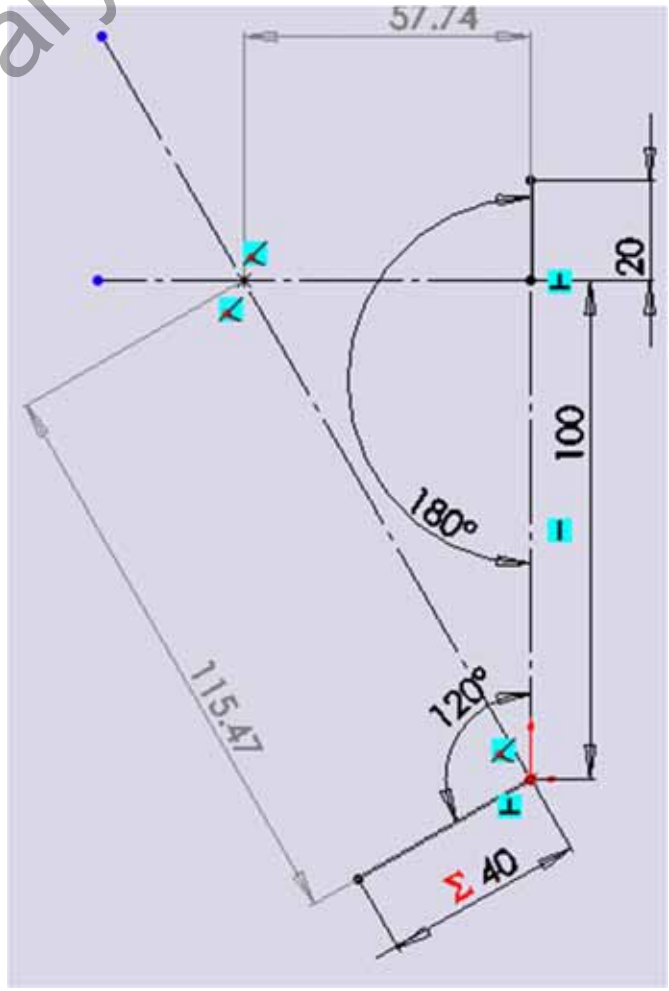
University Copy For Library Use

- Ejercicio SolidWorks para casa.

Demostrar que si el ángulo de las barras es el mismo la velocidad es la misma usando el CIR.

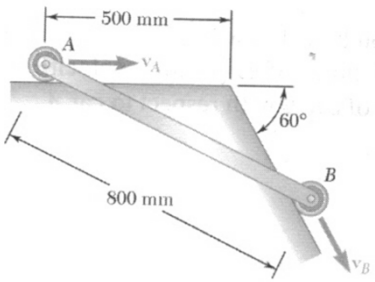






University Copy For Library Use

- Beer 11_118.



En el instante de la figura v_a=150[mm/s]. Velocidad relativa de "b" respecto a "a" sólo puede ser perpendicular a la barra AB. Determinar: (a) v_{ba} y (b) v_b.

Calculamos el triángulo con regla de los senos:

$\sin\beta/500 = \sin120º/800 \Rightarrow \beta=32.77º$

$\Rightarrow \alpha=180º-120º-32.77º=27.23º$

Calculamos la velocidad:

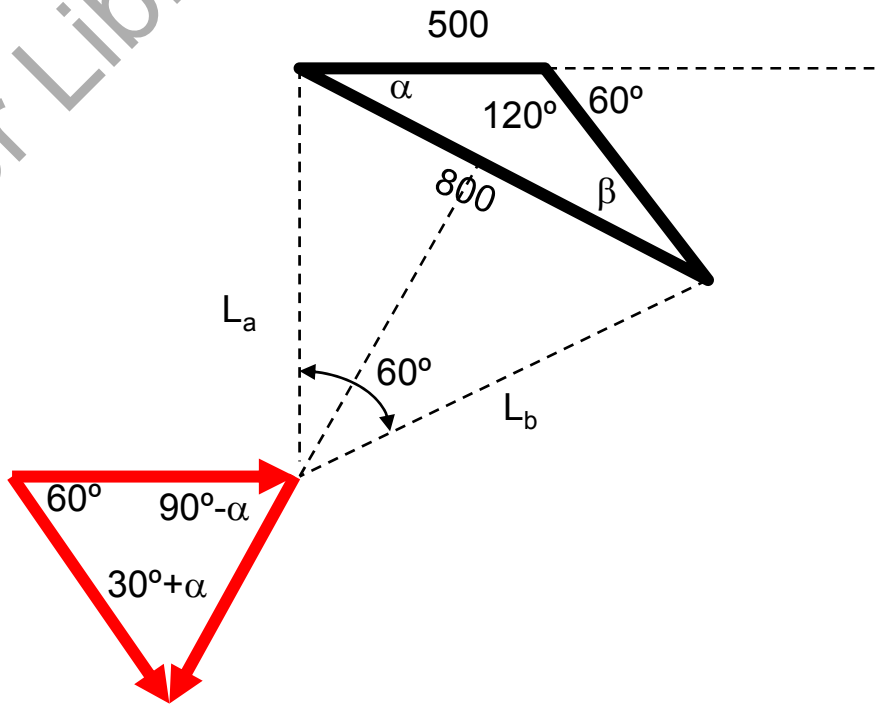
$v_b=v_a+v_{ba}$

Por regla de senos:

$v_{ba}/\sin60º=v_a/\sin(30+\alpha)=v_b/\sin(90-\alpha)$

(a) $v_{ba}=v_a*\sin60º/\sin(30+\alpha)=154.5$[mm/s]

(b) $v_b=v_a*\sin(90-\alpha)/\sin(30+\alpha)=158.6$[mm/s]



University Copy For Library Use

• Beer 11_118 por C.I.R.

Vamos a recalcular por C.I.R.

Calculamos el triángulo con regla de los senos:

$\sin\beta/500 = \sin 120º/800 \Rightarrow \beta=32.77º$

$\Rightarrow \alpha=180º-120º-32.77º=27.23º$

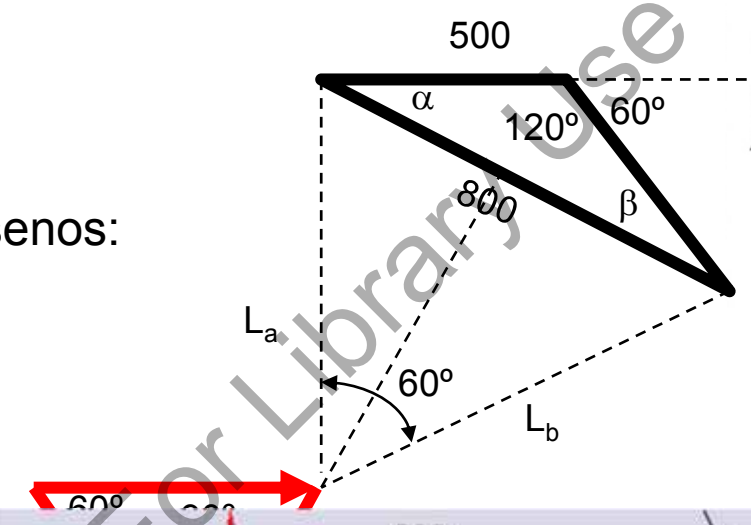
Calculamos las distancias a C.I.R.:

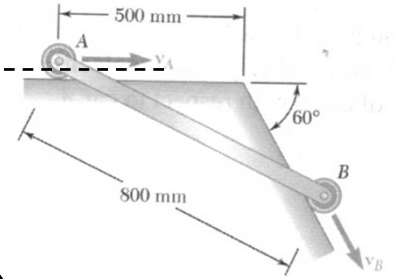
$L_b \sin 60º = 800\cos\alpha \Rightarrow L_b=821.39[mm]$

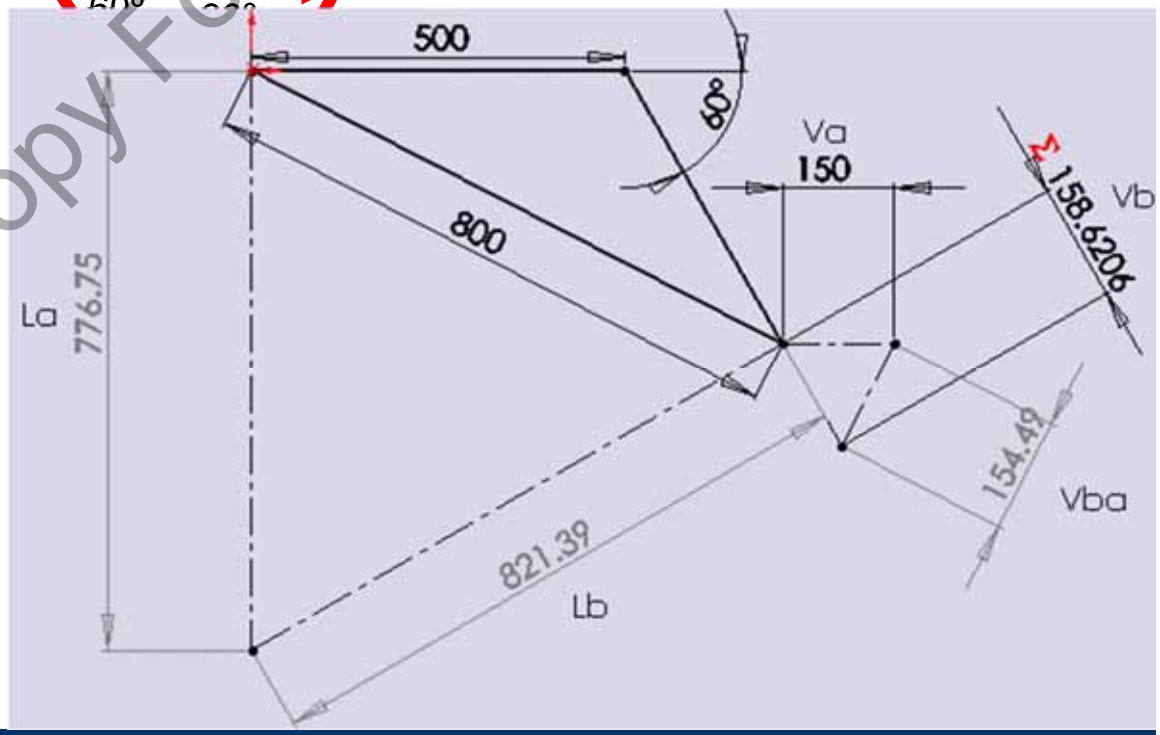
$L_a = 800\sin\alpha + L_b\cos 60º \Rightarrow L_a=776.75[mm]$

(b) $v_b=v_a*L_b/L_a=158.6[mm/s]$

(a) $v_{ba}=v_a*800/L_a=154.5[mm/s]$

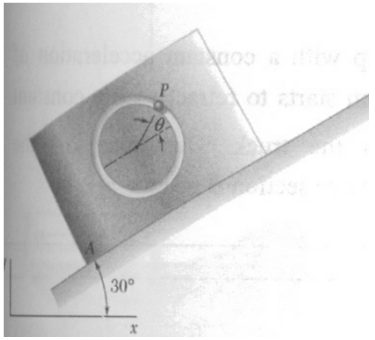






University Copy For Library Use

- Beer 11_124 (1/2).



El pin P se mueve con v_{pa}=80[m/s] constante contrarreloj. El bloque sube con v_a=48[m/s]. Determinar velocidad en "xy" de P para (a)θ=30º y (b)θ=135º.

Construimos el triángulo de velocidades:

$v_p=v_a+v_{pa}$ con las direcciones correctas

$v_p=(v_a\cos(30º)+v_{pa}\cos(120º+\theta))i + (v_a\sin(30º)+v_{pa}\sin(120º+\theta))j$

(a) v_p=-27.71i + 64.00j ⇨ $v_p=\sqrt{(27.71^2+64.00^2)}$=69.74[m/s]

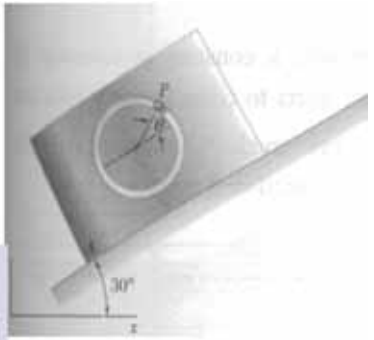
(b) v_p=20.86i -53.27j ⇨ $v_p=\sqrt{(20.86^2+53.27^2)}$=57.21[m/s]

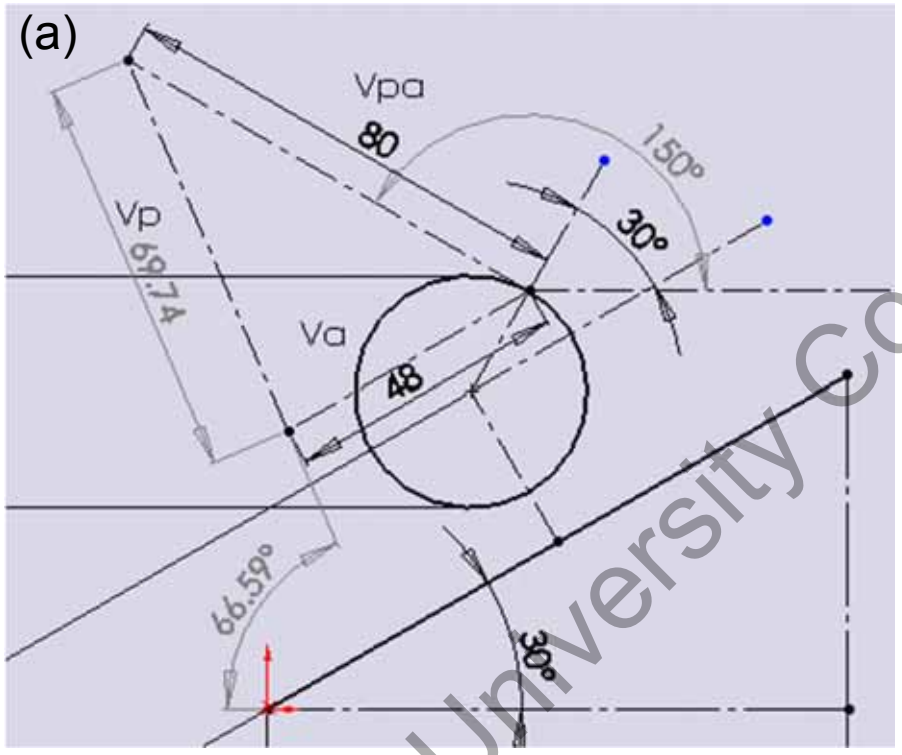
v1pax[m/s]	v1pay[m/s]	v1pa[m/s]	ang[º]	v2pax[m/s]	v2pay[m/s]	v1pa[m/s]	ang[º]
-2.771E+01	6.400E+01	6.974E+01	1.134E+02	2.086E+01	-5.327E+01	5.721E+01	-6.861E+01

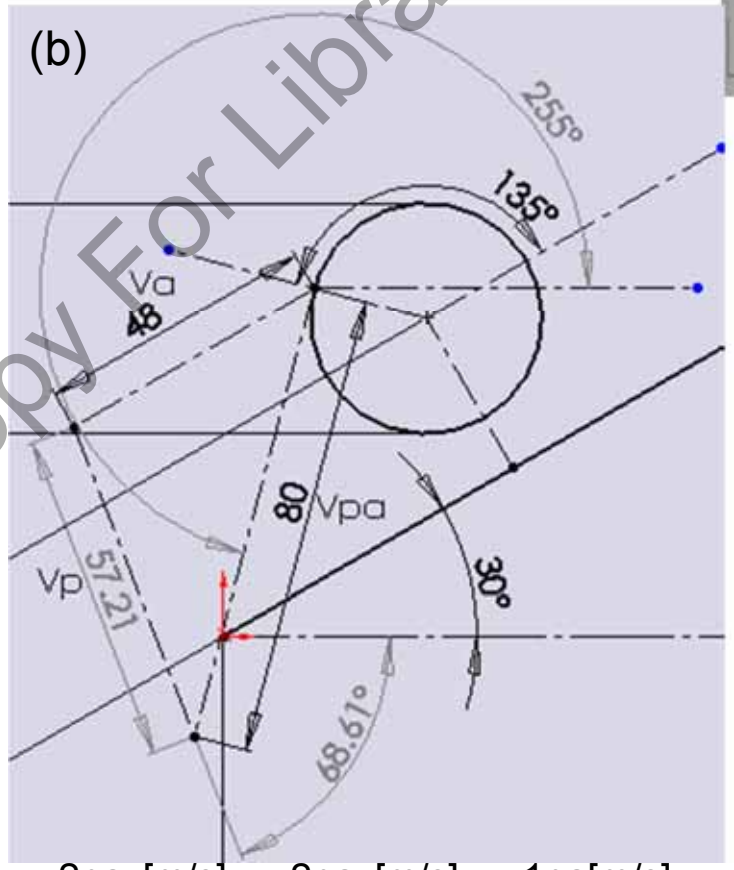
University Copy. For Library Use

- Beer 11_124 (2/2).

Podemos resolver las velocidades gráficamente con ayuda de SolidWorks.



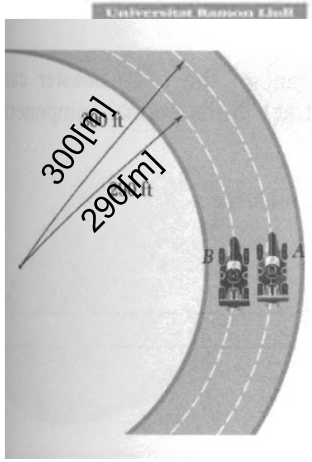




v1pax[m/s]	v1pay[m/s]	v1pa[m/s]	ang[º]	v2pax[m/s]	v2pay[m/s]	v1pa[m/s]	ang[º]
-2.771E+01	6.400E+01	6.974E+01	1.134E+02	2.086E+01	-5.327E+01	5.721E+01	-6.861E+01

University Copy For Library Use

- Beer 11_134.



El coche A adelanta a B con velocidad relativa $v_{ab}=3$ [m/s] y $a_{abn}=0.9[m/s^2]$ en dirección a centro curvatura. Los dos coches llevan velocidad constante. Calcular (a) velocidad de A y (b) velocidad de B.

$v_{ab}=v_a-v_b=3[m/s]$ en tangencial. ⇨ $v_b=v_a-3$

$a_{ab}=a_a-a_b=0.9[m/s^2]$ en dirección normal.

$a_{at}=0$ pues velocidad y radio constante.

$a_{an}=v_a^2/r_a=v_a^2/300=$ pues velocidad y radio constante.

$a_{bt}=0$ pues velocidad y radio constante.

$a_{bn}=v_b^2/r_b=v_b^2/290=(v_a-3)^2/290$ pues velocidad y radio constante.

$a_{abn}=v_a^2/300-(v_a-3)^2/290=0.9$ ⇨

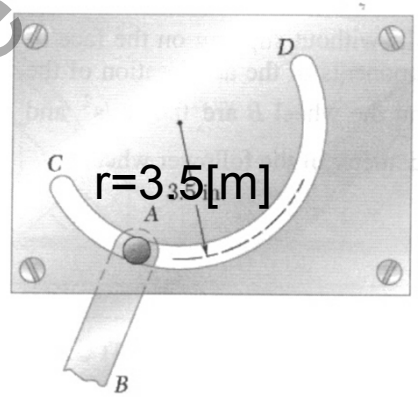
(a) $v_a=90[m/s]$

(b) $v_b=90-3=87[m/s]$

University Copy For Library Use

- Beer 11_137.

El pin A unido a AB se mueve por ranura CD. Si para t=0 se inicia v=0 subiendo su velocidad a razón 0.8[m/s^2]. Calcular aceleración total para (a) t=0s. y (b)t=2s.



El cambio de velocidad es a_{at}=0.8[m/s^2]

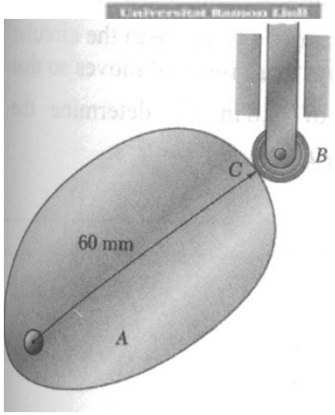
Para t=0, v=0 y por tanto:
a_{an}=0/3.5=0
por tanto aceleración = 0.8 [m/s^2]

Para t=2, v=0+0.8*2=1.6[m/s] y por tanto:
a_{an}=1.6^2/3.5=0.731
por tanto aceleración = $\sqrt{(0.8^2+0.731^2)}$= 1.084 [m/s^2]

University Copy For Library Use

- Problema para casa Beer 11_136.

La leva A está en contacto con rueda B sin deslizar. Si la aceleración de puntos de contacto es de 0.66[m/s2] y 6.8[m/s2] en en leva A y rueda B respectivamente: Calcular el diámetro de la rueda B.



Sol: $d_b=2\rho_b=11.65[mm]$

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios de dinámica de partículas con movimiento rectilíneo, movimiento curvilínea y con composición de movimientos.

University Copy For Library Use

S19t.- Ejercicios movimiento lineal.

Mejora 1415 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.
  - Ejercicio de aceleraciones con rotaciones.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Objetivos sesión.

➢ Realización de ejercicios de movimiento lineal en que el input cinemático no es función del tiempo.

a=f(x)

$$\int_{x1}^{x2} a\partial x = \int_{v1}^{v2} v\partial v = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

v=f(x)

$$\int_{t1}^{t2} \partial t = \int_{x1}^{x2} \frac{\partial x}{v} = t_2 - t_1$$

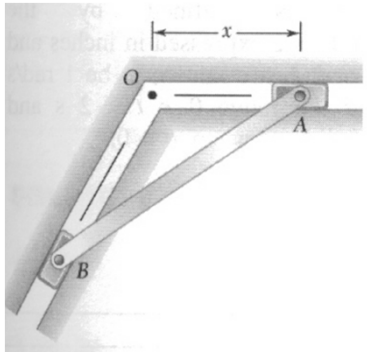
a=f(v)

$$\int_{t1}^{t2} \partial t = \int_{v1}^{v2} \frac{\partial v}{a} = t_2 - t_1$$

University Copy For Library Use

- Beer 11_003.

Si la deslizadera A se mueve en x siguiendo la ecuación x=20sin(10t)[m]. Dar la posición, velocidad y aceleración de A cuando t=0.05[s].



Primero calculamos la velocidad y aceleración derivando:

v=dx/dt=20*10*cos(10t)[m/s];

a=dv/dt=-20*10*10*sin(10t)[m/s^2];

Sustituimos para t=0.05[s]:

x=20sin(0.5)= 9.59[m];

v=200*cos(0.5)= 175.5[m/s];

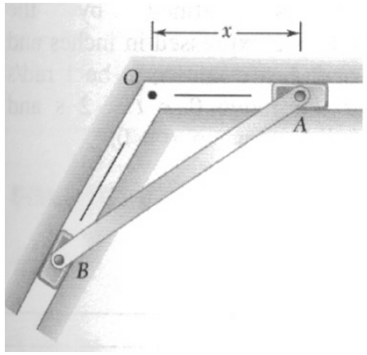
a=-2000*sin(0.5)= -959[m/s^2];

University Copy For Library Use

- Ejercicio básico casa.

Supongamos el ejercicio para una BO vertical y una barra BA de longitud 25[m]. Dar velocidad y aceleración de B en t=0.05[s] y en función de t.

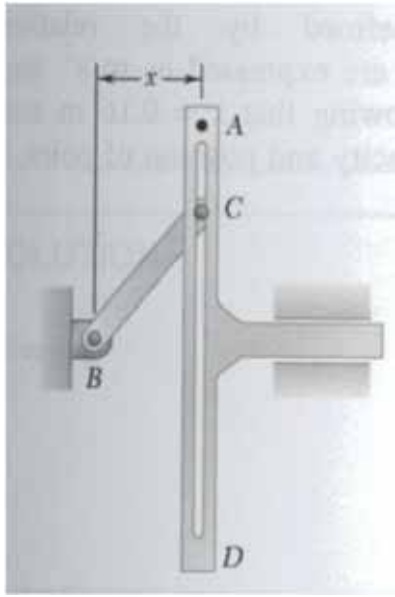
Este ejercicio es el mismo que el básico utilizado hasta ahora de una barra de 5metros …



University Copy For Library Use

- Beer 11_009.

La aceleración del punto A se define por la relación $a=-1.8\sin(3t)[m/s^2]$. Si se comienza en $t=0$ con $x_0=0$ y la velocidad $v_0=0.6[m/s]$. Dar posición velocidad y aceleración en $t=0.5[s]$.



Primero calculamos la velocidad y posición integrando:

$v=v_0+\text{int}(adt)=0.6+1.8/3*[\cos(3t)-\cos(0)]= 0.6*\cos(3t)$ [m/s];

$x=x_0+\text{int}(vdt)=0+0.6/3\sin(3t)=0.2\sin(3t)$ [m]

Sustituimos para t=0.5[s]:

$x=0.2\sin(1.5)= 0.1995$[m];

$v=0.6*\cos(1.5)= 0.04244$[m/s];

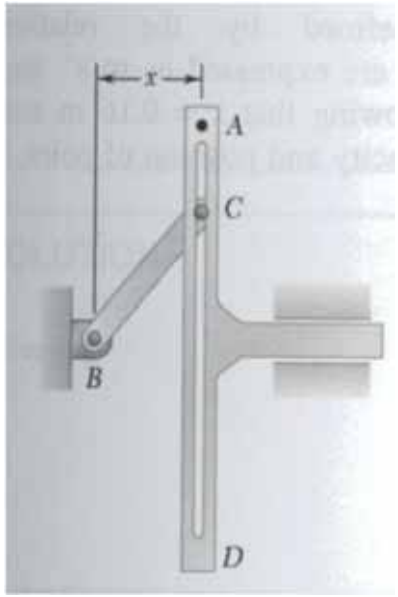
$a=-1.8*\sin(1.5)= -1.795[m/s^2]$;

x[m]	v[m/s]	a[m/s2]
1.995E-01	4.244E-02	-1.795E+00

University Copy For Library Use

• Ejercicio básico deslizamiento.

Supongamos que hacemos el ejercicio para BC=5[m] y que para x_A=4[m] nos sale v_A= 2[m/s] y a_A=-1 [m/s^2]. Dar velocidad y aceleración de BC.



Solución llamando a C' al punto que en ese instante está debajo de C:

ω_{BC}=-0.667[rad/s]

$v_{cc'}$=-2.667[m/s]

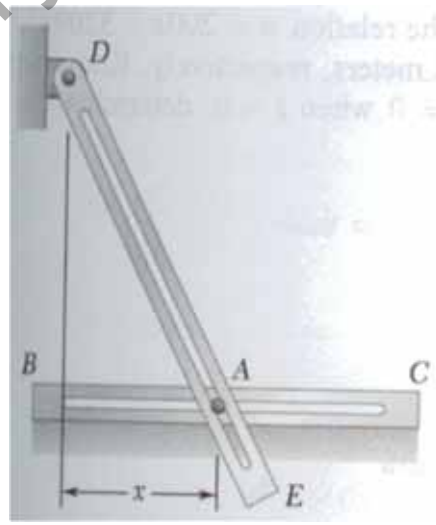
α_{BC}=-0.2592[rad/s^2]

$a_{cc'}$=-2.370[m/s]

University Copy For Library Use

- Beer 11_015.

Si la aceleración de a es $a=200x(1+kx^2)[m/s^2]$ y la velocidad en x=0 es $v_1=2.5[m/s]$ y en x=0.15[m] es $v_2=5[m/s]$: Determinar el valor de la constante k.



Como tenemos la aceleración en función de la posición hay que usar alguna relación para conseguir la velocidad.

a=f(x)

$$\left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{\partial v}{\partial t} \\ v=\dfrac{\partial x}{\partial t} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \partial t=\dfrac{\partial v}{a} \\ \partial t=\dfrac{\partial x}{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial x}{v}=\frac{\partial v}{a} \Rightarrow a\partial x=v\partial v \Rightarrow \int_{x1}^{x2} a\partial x=\int_{v1}^{v2} v\partial v=\frac{v_2^2-v_1^2}{2}$$

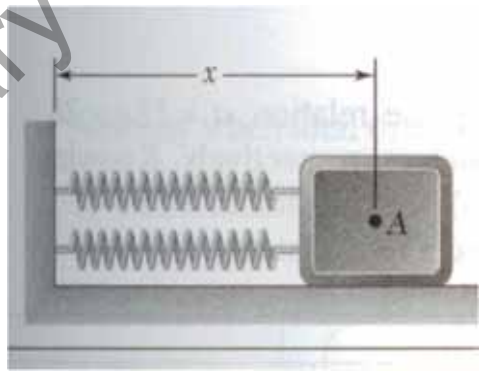
$$\int_0^{0.15} 200x(1+kx^2)\partial x=\int_{2.5}^{5} v\partial v \Rightarrow \left[\frac{200}{2}x^2+\frac{200}{4}kx^4\right]_0^{0.15}=\left[\frac{v^2}{2}\right]_{2.5}^{5}$$

$$\Rightarrow 2.25+0.0253125k=9.375 \Rightarrow k=281[1/\mathrm{m}^2]$$

University Copy For Library Use

• Beer 11_018.

El punto A oscila con aceleración $a=144(20-x)[m/s^2]$. Para el tiempo $t=0[s]$, $v_0=0[m/s]$ y $x_0=19[m]$. Dar posición y aceleración para $t=0.2[s]$



Como tenemos la aceleración en función de la posición hay que usar alguna relación para conseguir la velocidad.

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial v}{\partial t} \\ v &= \frac{\partial x}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \partial t &= \frac{\partial v}{a} \\ \partial t &= \frac{\partial x}{v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial x}{v} = \frac{\partial v}{a} \Rightarrow a\partial x = v\partial v \Rightarrow \int_{x1}^{x2} a\partial x = \int_{v1}^{v2} v\partial v$$

$$\int_{19}^{x} 144(20-x)\partial x = \int_{0}^{v} v\partial v \Rightarrow -144\left[\frac{(20-x)^2}{2}\right]_{19}^{x} = \left[\frac{v^2}{2}\right]_{0}^{v}$$

$$\Rightarrow v^2 = 144\left[1-(20-x)^2\right] \Rightarrow v = \pm 12\sqrt{\left[1-(20-x)^2\right]}[\text{m/s}]$$

v=f(x)

Para buscar la posición hay que utilizar una nueva relación: $\partial x = v\partial t \Rightarrow \partial t = \frac{\partial x}{v} \Rightarrow \int_{t1}^{t2} \partial t = \int_{x1}^{x2} \frac{\partial x}{v} = t_2 - t_1$

$$\int_{0}^{t} \partial t = \int_{19}^{x} \frac{\partial x}{\pm 12\sqrt{\left[1-(20-x)^2\right]}} \Rightarrow u = 20-x; \Rightarrow t = \int_{1}^{u} \frac{-\partial u}{\pm 12\sqrt{\left[1-(u)^2\right]}}$$

$$\Rightarrow t = \pm\frac{1}{12}\left(\arcsin(u) - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow u = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 12t\right) = \cos(\pm 12t) = \cos(12t)$$

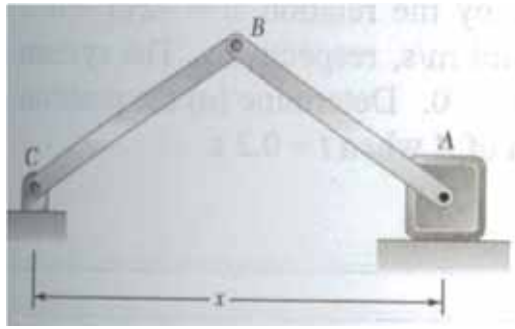
$$\Rightarrow x = 20 - \cos(12t) \Rightarrow v = 12\sin(12t) \Rightarrow a = 144\cos(12t) = 144(20-x)$$

$$x_{0.2} = 20 - \cos(12*0.2) = 20.74[\text{m}]$$
$$v_{0.2} = \pm 12\sqrt{\left[1-(20-20.74)^2\right]} = +8.106[\text{m/s}]$$
$$a_{0.2} = 144(20-20.74) = -106.2[\text{m/s}^2]$$

University Copy For Library Use

• Beer 11_023.

Si la aceleración de A depende de la velocidad con ecuación $a=-2k\sqrt{(k^2-v^2)}$ [m/s²] y el sistema empieza en t=0, $x_0=0.5$[m], $v_0=0$[m/s]. y en t=0.4[s] $x_1=0.4$[m]: determinar el valor de la constante k.



Como tenemos la aceleración en función de la velocidad hay que usar alguna relación para conseguir la velocidad.

a=f(v)

$$a=\frac{\partial v}{\partial t}\Rightarrow \partial t=\frac{\partial v}{a}\Rightarrow \int_{t1}^{t2}\partial t=\int_{v1}^{v2}\frac{\partial v}{a}=t_2-t_1$$

$$\int_0^t \partial t=\int_0^v \frac{\partial v}{-2k\sqrt{\left(k^2-v^2\right)}}\Rightarrow t=-\frac{1}{2k}\int_0^v \frac{\partial v}{\sqrt{\left(k^2-v^2\right)}}=-\frac{1}{2k}\left[\arcsin\left(\frac{v}{k}\right)\right]_0^v=-\frac{1}{2k}\arcsin\left(\frac{v}{k}\right)$$

$$\Rightarrow v=k\sin(-2kt)$$

Continuamos integrando para encontrar x y luego condiciones en $x_1=0.4$.

$$\int_{0.5}^{x}\partial x=\int_0^t v\partial t\Rightarrow x-0.5=\left[\frac{1}{2}\cos(2kt)\right]_0^t$$

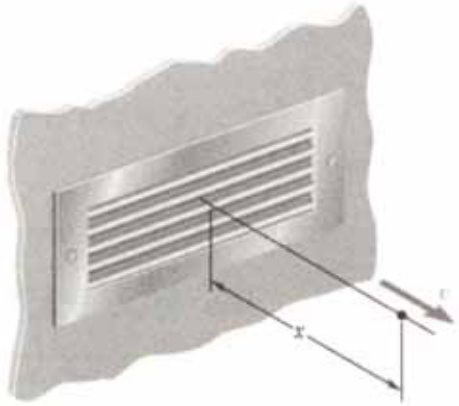
$$\Rightarrow x=0.5-0.5+\frac{1}{2}\cos(2kt)$$

$$\boxed{0.4=\frac{1}{2}\cos(2k0.4)\Rightarrow k=1.609[m/s]}$$

University Copy For Library Use

- Ejercicio para casa Beer 11_027.

La velocidad del aire se ha ajustado a una curva en función de la distancia a la salida v=2.16/x [m/s]. Determinar la aceleración del aire a 6 metros de la rejilla y el tiempo necesario para ir de 3 a 10 metros.



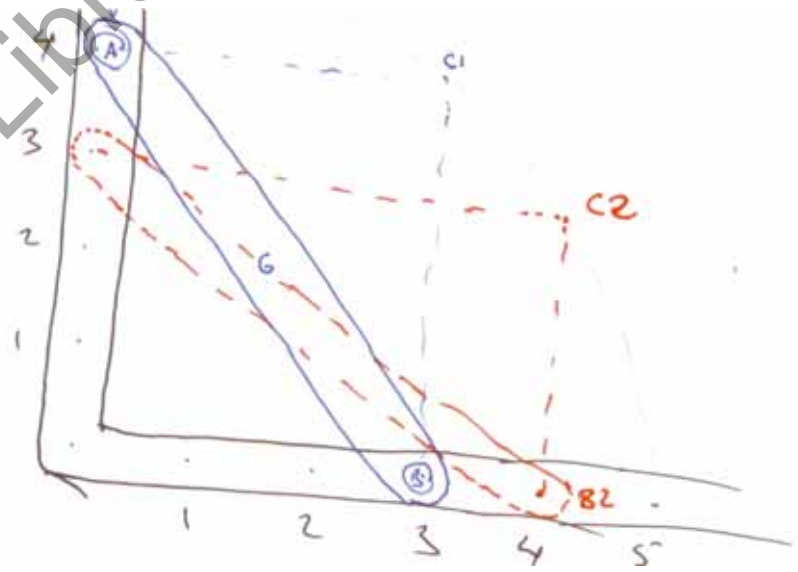
Sol. a_{x6}=-0.0216[m/s^2] , t_{3a10}=21.06[s]

University Copy For Library Use

- Ejercicio Base Casa.

Si la velocidad de A es v_A=-1.5*y dar velocidades y aceleraciones para y=4, y=3, y=0.

Si la velocidad de A es v_A=-24/y dar velocidades y aceleraciones para y=4, y=3, y=0*.



University Copy For Library Use

- Beer 11_089.

Una partícula se mueve x(t)=17.6-0.8t(t²-9t+24),y(t)=-13.8+0.6t(t²-9t+24). Demostrar que el movimiento es rectilíneo y encontrar velocidad y aceleración (a) t=2s. (b) t=3s. y (c) t=4s.

La pendiente de la trayectoria en una recta ha de ser constante y se demuestra:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y/\partial t}{\partial x/\partial t}=\frac{0.6\left(3t^2-18t+24\right)}{-0.8\left(3t^2-18t+24\right)}=-0.75$$

(a), (b) y (c) Buscamos las componentes en x e y de cada variable y sustituimos el tiempo:

$$v_x=\frac{\partial x}{\partial t}=-0.8\left(3t^2-18t+24\right)$$

$$v_y=\frac{\partial y}{\partial t}=0.6\left(3t^2-18t+24\right)$$

$$a_x=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-0.8\left(6t-18\right)$$

$$a_y=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0.6\left(6t-18\right)$$

	t=2	t=3	t=4
v_x	$0[m/s]$	$2.4[m/s]$	$0[m/s]$
v_y	$0[m/s]$	$-1.8[m/s]$	$0[m/s]$
a_x	$4.8[m/s^2]$	$0[m/s^2]$	$-4.8[m/s^2]$
a_y	$-3.6[m/s^2]$	$0[m/s^2]$	$3.6[m/s^2]$

University Copy For Library Use

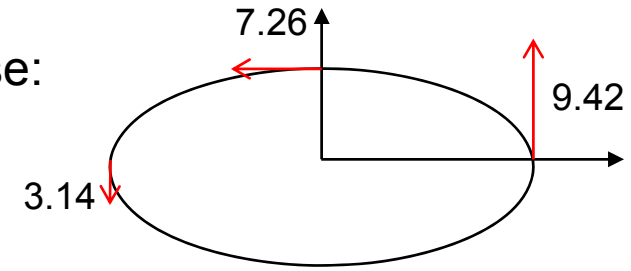
- Beer 11_090.

Una partícula se mueve x(t)=(4cosπt-2)/(2-cosπt) ,y(t)=(3sinπt)/(2-cosπt). Demostrar que el movimiento es curvilíneo con forma de elipse y encontrar velocidad (a) t=0s. (b) t=1/3s. y (c) t=1s.

Buscamos los puntos en x=0 e y=0 para ver los ejes de la elipse:

x=0⇨t=-1/3, 1/3, 2π-1/3 ... y=√3, - √3, √3 ...

y=0⇨t=0, 1, 2 ... x=2, -2, 2 ...



Comprobamos elipse: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=\frac{4-4\cos\pi t+\cos^2\pi t}{(2-\cos\pi t)^2}=1$

(a), (b) y (c) Buscamos las componentes en x e y de cada variable y sustituimos el tiempo:

$$v_x=\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{-6\pi\sin\pi t}{(2-\cos\pi t)^2}$$

$$v_y=\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{3\pi(2\cos\pi t-1)}{(2-\cos\pi t)^2}$$

t=0	t=1/3	t=1
$x=2[m]$	$x=0[m]$	$x=-2[m]$
$y=0[m]$	$y=\sqrt{3}[m]$	$y=0[m]$
$v_x=0[m/s]$	$v_x=-7.26[m/s]$	$v_x=0[m/s]$
$v_y=9.42[m/s]$	$v_y=0[m/s]$	$v_y=-3.142[m/s]$

University Copy For Library Use

- Beer 11_093.

Una partícula se encuentra a una distancia de origen r(t)= A(cos(t)+t*sin(t))i + A(sin(t)-t*cos(t))j. Determinar el tiempo en que la posición y aceleración son (a) perpendiculares y (b) paralelas.

Buscamos la velocidad y aceleración derivando:

$$v = \frac{\partial r}{\partial t} = A(t\cos(t))i + A(t\sin(t))j$$

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = A(\cos(t) - t\sin(t))i + A(\sin(t) + t\cos(t))j$$

(a) Si aceleración y posición son perpendiculares su producto escalar será nulo:

$$r \cdot a = A(\cos(t) + t\sin(t)) * A(\cos(t) - t\sin(t)) + A(\sin(t) - t\cos(t)) * A(\sin(t) + t\cos(t)) =$$

$$= A^2(\cos^2(t) - t^2\sin^2(t)) * (\sin^2(t) - t^2\cos^2(t)) = A^2(1 - t^2) = 0$$

$$\Rightarrow t = \pm 1[s.]$$

$$r(1) = A(\cos(1) + 1\sin(1))i + A(\sin(1) - 1\cos(1))j = A(1.382, -0.3011)$$

$$r(-1) = A(\cos(-1) - 1\sin(-1))i + A(\sin(-1) - (-1)\cos(-1))j = A(1.382, -0.3011)$$

(b) Si aceleración y posición son paralelos su producto vectorial será nulo:

$$r \times a = A(\cos(t) + t\sin(t)) * A(\sin(t) + t\cos(t)) - A(\sin(t) - t\cos(t)) * A(\cos(t) - t\sin(t)) =$$

$$= A^2[(\sin t\cos t + t\sin^2 t + t\cos^2 t + t^2\sin t\cos t) - (\sin t\cos t - t\sin^2 t - t\cos^2 t + t^2\sin t\cos t)] = A^2(2t) = 0$$

$$\Rightarrow t = 0[s.]$$

$$r(1) = A(\cos(0) + 0\sin(0))i + A(\sin(0) - 0\cos(0))j = A(1,0)$$

University Copy For Library Use

• Beer 11_111.

Un proyectil se lanza con una velocidad de 86[m/s]. El cohete aterriza a 104[m] del punto de salida. Determinar (a) ángulo de salida, (b) altura máxima alcanzada y (c) duración del vuelo.

La componente horizontal se calcula a velocidad constante: $x=v_0\cos\alpha t$;

La componente vertical se calcula con deceleración constante: $y=v_0\sin\alpha t - 0.5gt^2$

Al llegar al suelo tenemos dos ecuaciones:

$104=86*\cos\alpha*t$

$0=86*\sin\alpha*t - g/2*t^2$

Alternativamente podemos colocar "x" en la función de altura "y":

$0=86*\sin\alpha*104/(86*\cos\alpha) - g/2*104/(86*\cos\alpha)^2$

$\sin2\alpha=g*104/86^2$.

$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$

$\cos(2x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$

$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x\cdot\cos x$

$2\operatorname{sen}^2 x=1-\cos(2x)$

$2\cos^2 x=1+\cos(2x)$

$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$

$2\operatorname{sen}x\cos y=\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)$

$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$

$2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y=-\cos(x+y)+\cos(x-y)$

Beer_11_111

Search t,angle: .

```
> restart;eq0:=((104=86*cos(a)*t,0=86*sin(a)*t-9.81/2*t^2));
```

$$eq0 := \{0 = 86\sin(a)t - 4.905000000t^2, 104 = 86\cos(a)t\}$$

```
> solut:=solve(eq0,{a,t});
```

$$solut := \{a = -1.639989382, t = -17.49117471\}, \{a = -3.072399598, t = -1.212202987\}, \{t = 1.212202987, a = .06919305557\}, \{t = 17.49117471, a = 1.501603271\}$$

```
> ang:=evalf(180*(subs(solut[3],a))/Pi);
```

$$ang := 3.964470054$$

```
> eq1:=sin(2*a)=9.81*104/86^2;
```

$$eq1 := \sin(2a) = .1379448350$$

```
> solua:=solve(eq1,{a});
```

$$solua := \{a = .06919305555\}$$

```
> ang:=evalf(180*(subs(solua[1],a))/Pi);
```

$$ang := 3.964470054$$

University Copy For Library Use

- Ejercicio para casa Beer 11_094.

Una partícula de una onda vibrando y amortiguando sigue la ecuación $r(t)=30[t/(t+1)]i + 20[e^{-\pi t/2}*\cos(2\pi t)]j$ [m]. Determinar posición, velocidad y aceleración de la partícula para (a) t=0 y (b) t=1.5s.

Sol.: (a) r=(0,20)[m], v=(30,-31.42)[m/s], a=(-60,-740.2)[m/s^2]
(b) r=(18,-1.896), v=(4.8,2.978)[m/s], a=(-3.84,-70.16)[m/s^2]

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios de movimiento lineal con aceleraciones y velocidades en función de posición para movimientos rectilíneos.

University Copy For Library Use

S20t.- Ejercicios de Movimiento Relativo-Poleas.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ...

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios de movimiento lineal con aceleraciones y velocidades en función de posición para movimientos rectilíneos.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Objetivos sesión.

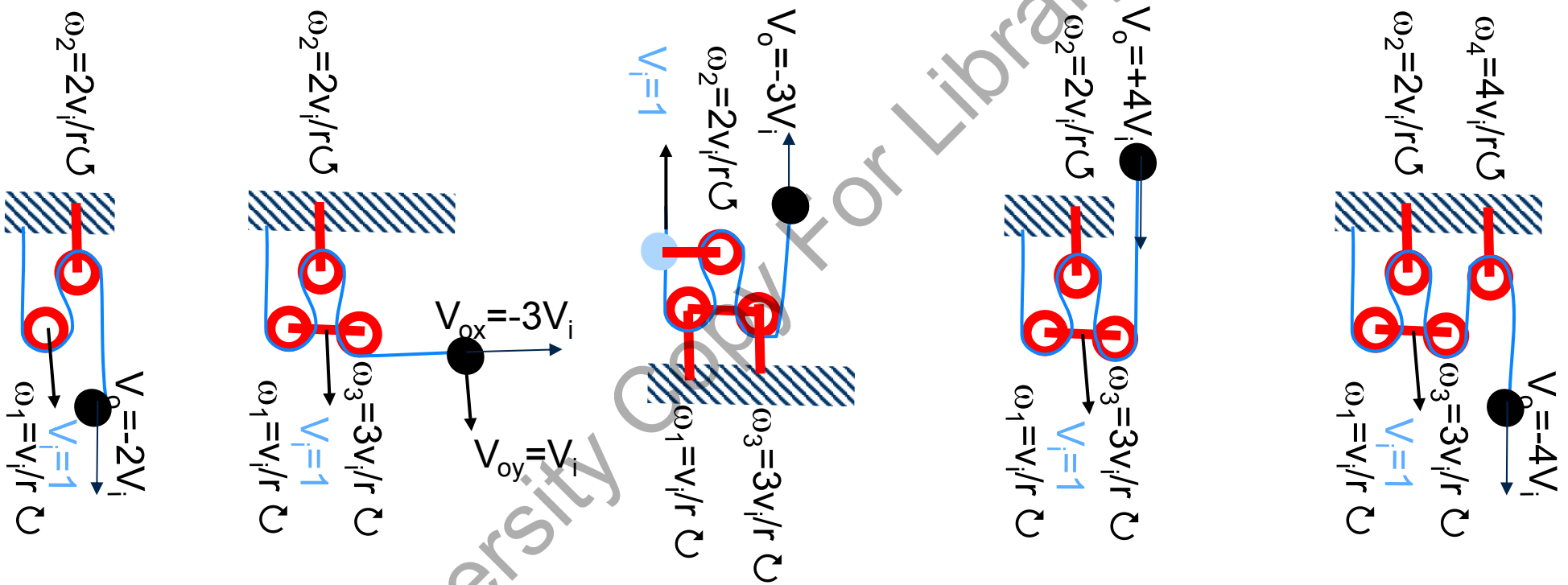
➢ Comprender la relación de velocidad y aceleración en función del número de poleas aplicadas para poder iniciar un ejercicio como el básico.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Poleas.

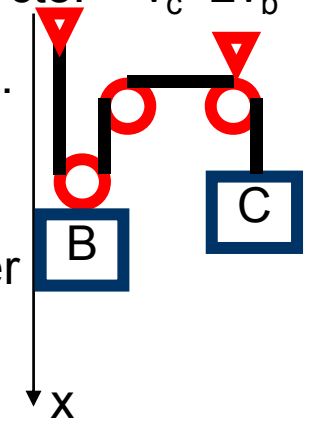
Explicar con velocidades de cuerda y no deslizamiento



University Copy For Library Use

• Poleas.

$x_c+2x_b+s=cte. \Rightarrow v_c+2v_b=0$



Para los ejercicios de poleas nos basamos en la longitud de cuerda constante.

Para el ejemplo básico tenemos que $v_c=-2v_b$ y $a_c=-2a_b$.

Una vez sabemos la relación de velocidades y aceleraciones vamos a resolver el movimiento por tres métodos.

F=ma para cada bloque:

$m_cg-T=ma_c$

$m_bg-2T=ma_b=-ma_c/2 \Rightarrow$ si $m_b=m_c$: $a_c=0.4g$, $v_c=0.4g*t$, $x_c=0.2g*t^2$.

Ft=mv para cada bloque:

$m_cgt-Tt=mv_c$

$m_bgt-2Tt=mv_b=-mv_c/2 \Rightarrow$ si $m_b=m_c$: $v_c=0.4g*t$ que es lo mismo que en método 1.

Por energías en total:

$0.5m_cv_c^2+0.5m_bv_b^2=m_cgx_c+m_bgx_b \Rightarrow$ si $m_b=m_c$: $0.5v_c^2(1+0.25)=gx_c(1-0.5) \Rightarrow$ $v_c=\pm\sqrt{(0.8gx_c)} \Rightarrow$

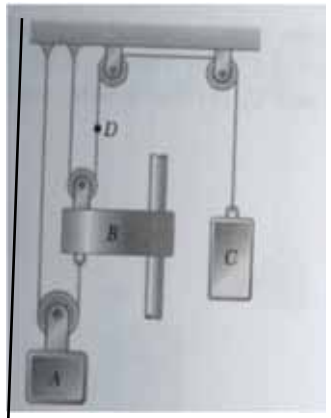
$t=\sqrt{(x_c/0.2g)} \Rightarrow x_c=0.2g*t^2$ que es lo mismo que en método 1.

v=f(x)

$$\int_{t1}^{t2}\partial t=\int_{x1}^{x2}\frac{\partial x}{v}=t_2-t_1$$

University Copy For Library Use

- Beer 11_047.



El bloque A desciende con v=2[m/s]. (a) Hallar la velocidad de B. (b) La vel. de C. (c) La relativa de B respecto a A. (d) La relativa del punto D del cable respecto a A.

(a) Si consideramos que la longitud del cable es constante de B a fijación:

$x_a+(x_a-x_b)=cte. \Rightarrow 2v_a-v_b=0 \Rightarrow v_b=2v_a= 4[m/s]$ descendiendo.

(b) Si consideramos que la longitud del cable es constante de C a fijación:

$x_c+2x_b=cte. \Rightarrow v_c+2v_b=0 \Rightarrow v_c=-2v_b= -8[m/s]$ subiendo.

(c) La velocidad relativa se encuentra a partir de las absolutas:

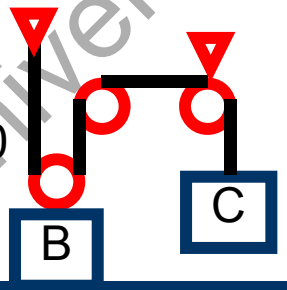
$v_{ba}=v_b-v_a=4-2=2[m/s]$ bajando y por tanto acercándose B a A.

(d) Primero calculamos la velocidad del punto D:

$v_d=-v_c=8[m/s]$ bajando.

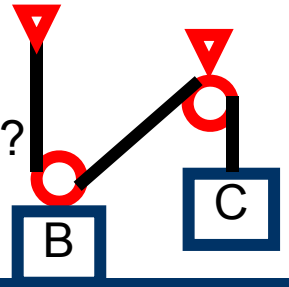
$v_{da}=v_d-v_a=8-2=6[m/s]$ bajando y por tanto acercándose D a A.

$x_c+2x_b+s=cte. \Rightarrow v_c+2v_b=0$



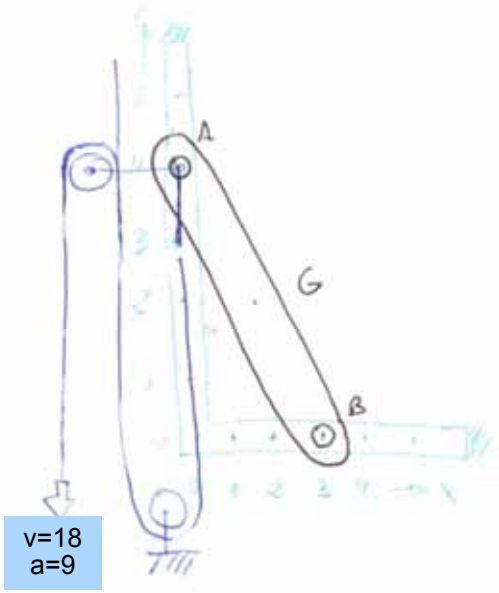
$x_c+x_b+\sqrt{(s^2+x_b^2)}=cte. \Rightarrow ?v_c+2v_b=0?$

No es cierto. Sólo para s=0!!



University Copy For Library Use

- Ejercicio básico con poleas.



① V_A, a_A

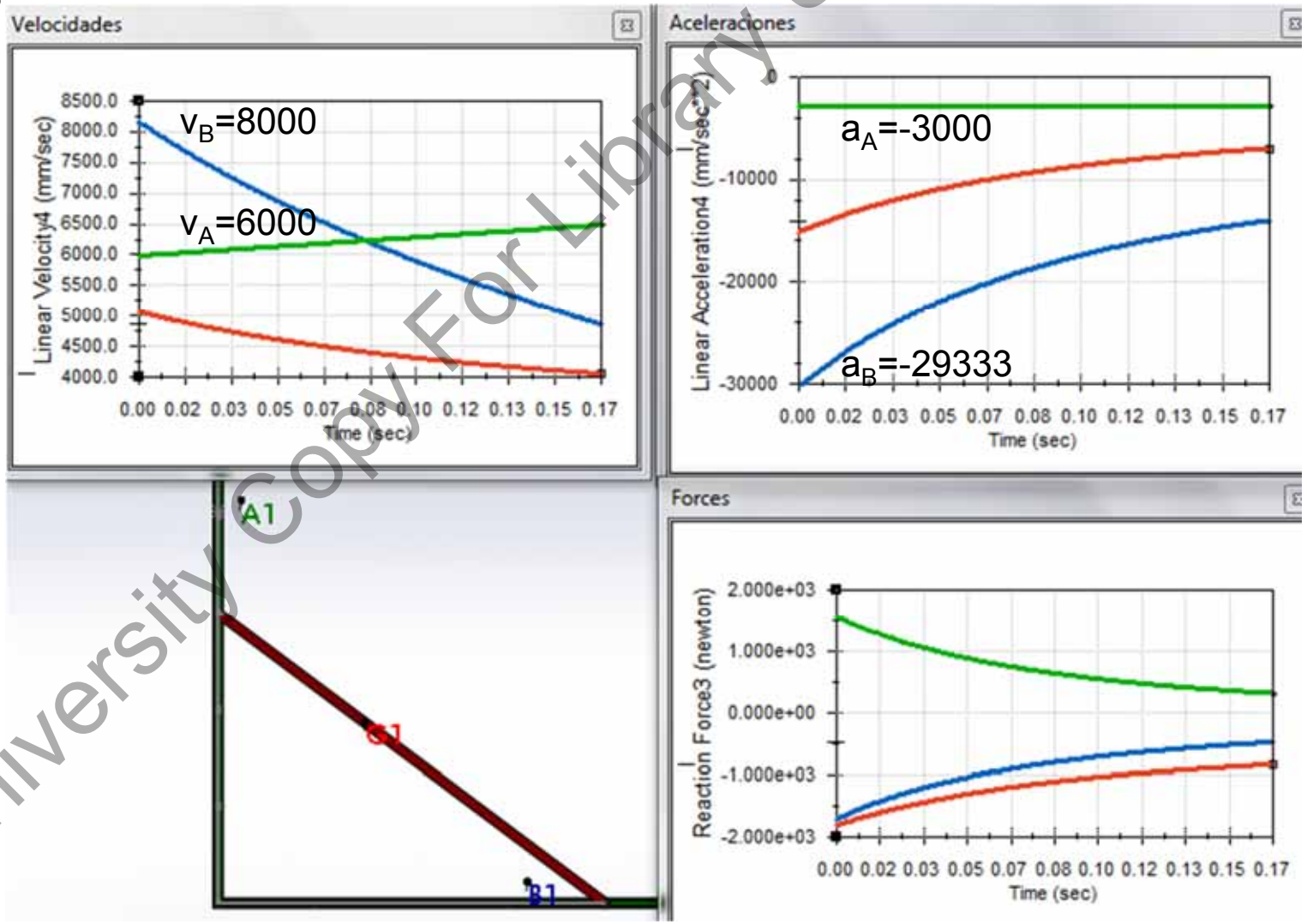
② V_B, a_B

③ V_G, a_G

University Copy For Library Use

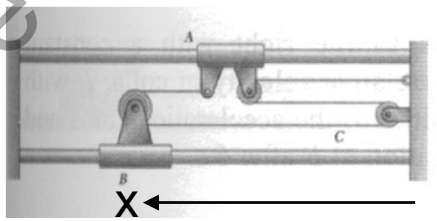
- Ejercicio básico con poleas.

Soluciones SolidWorks para t=0.01[s]



University Copy For Library Use

- Beer 11_051.



Si B se mueve hacia la izquierda con v_b=3[m/s]. (a)Determinar velocidad de A. (c) La velocidad del punto C. (c)La velocidad de C respecto a B.

(a) Si consideramos que la longitud del cable es constante de A a fijación:
$x_a+x_a+x_b+(x_b-x_a)$=cte. ⇨$v_a+2v_b=0$ ⇨ $v_a=-2v_b$= -6[m/s] hacia la derecha.

(b) Si consideramos que la longitud del cable es constante de C a fijación:
$x_a+x_a+x_c$=cte. ⇨$2v_a+v_c=0$ ⇨ $v_c=-2v_a$= +12[m/s] hacia la izquierda.

(c) La relativa se halla a partir de las absolutas:
$v_{cb}=v_c-v_b$=12-3=9[m/s] hacia la izquierda.

University Copy For Library Use

- Beer 11_065.

El paracaidista en caída libre alcanza una velocidad de 180[m/s] y abre el paracaídas a 1900[m] de altitud. Suponiendo que frena con aceleración constante a 1800[m] su velocidad ha bajado a 44[m/s] que se estabiliza hasta llegar a los 100[m] del suelo en que se opera el paracaídas para conseguir una aceleración constante que consigue que la velocidad al llegar al suelo sea 0[m/s]. Calcular (a) tiempos de cada intervalo y (b) deceleraciones necesarias.

Primer tramo de $x_1-x_0[m]=v_0*t_{10}+1/2*a_{10}*t_{10}^2$;

$v_1-v_0[m/s]=a_{10}*t_{10}$. ⇨ $x_1-x_0[m]=v_0*t_{10}+1/2*(v_1-v_0)*t_{10} = 1/2\ *(v_1+v_0)*t_{10}$.

⇨$1800-1900=0.5*(-44+(-180))*t_{10}$ ⇨ $t_{10}=0.893[s]$

Segundo tramo de $x_2-x_1[m]=v_1*t_{21}+1/2*0*t_{21}^2$;

⇨$100-1800=-44*t_{21}$ ⇨ $t_{21}=38.64[s]$

Tercer tramo de $x_3-x_2[m]=v_2*t_{32}+1/2*a_{32}*t_{32}^2$;

$v_3-v_2[m/s]=a_{32}*t_{32}$. ⇨ $x_3-x_0[m]=v_2*t_{32}+1/2*(v_3-v_2)*t_{32} = 1/2\ *(v_3+v_2)*t_{10}$.

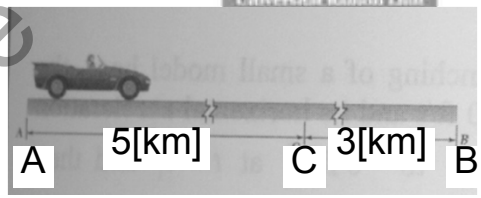
⇨$0-100=0.5*(0+(-44))*t_{32}$ ⇨ $t_{32}=4.55[s]$

(a) tiempo total= $t_{10}+ t_{21}+ t_{32}= 44.1[s]$

(b) aceleraciones: $a_{10}=(v_1-v_0)/t_{10}= 152.3\ [m/s^2]$; $a_{32}=(v_3-v_2)/t_{32}= 9.67\ [m/s^2]$;

University Copy For Library Use

• Beer 11_069 (1/2).



Dos puntos de control de un rally A y B se colocan a 8[km] de distancia. Se sabe que en el tramo AC la velocidad máxima es de 60[km/h] y en el CB de 35[km/h]. El tiempo utilizado es 10min. 20s. El coche empieza y acaba a velocidad cero. Cada aceleración y frenada se considera a la misma aceleración constante "a". Calcular dicha aceleración.

$$t_{\min} = \frac{5000}{60/3.6} + \frac{3000}{35/3.6} = 608.5[s]$$

De A a C se consideran tres tramos: acelerar, v constante y frenar hasta v_{cb}.

Primer tramo: $x_1-x_0[m]=v_0*t_{10}+1/2*a_{10}*t_{10}^2 = 1/2*(v_1+v_0)*t_{10}$. ; $t_{10}=(v_1-v_0)/a_{10}$;

Segundo tramo: $x_2-x_1[m]=v_1*t_{21}$; $t_{21}=(x_2-x_1)/v_1$;

Tercer tramo: $x_3-x_2[m]=v_2*t_{32}+1/2*a_{32}*t_{32}^2 = 1/2*(v_3+v_2)*t_{32}$. ; $t_{32}=(v_3-v_2)/a_{32}$;

De C a B se consideran dos tramos: v constante y frenar hasta parar.

Cuarto tramo: $x_4-x_3[m]=v_4*t_{43}$; $t_{43}=(x_4-x_3)/v_4$;

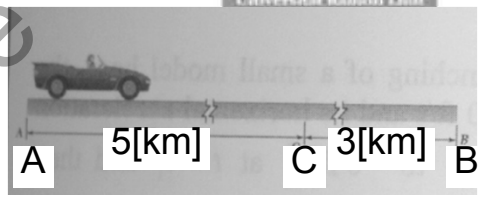
Quinto tramo: $x_5-x_4[m]=v_4*t_{54}+1/2*a_{54}*t_{54}^2 = 1/2*(v_5+v_4)*t_{54}$. ; $t_{54}=(v_5-v_4)/a_{54}$;

$$\left\{\begin{array}{l} x_3-x_0=\frac{1}{2}\frac{v_1^2-v_0^2}{a}+v_1t_{21}+\frac{1}{2}\frac{v_3^2-v_2^2}{a} \\ x_5-x_3=v_4t_{43}+\frac{1}{2}\frac{v_5^2-v_4^2}{a} \\ t_{05}=\frac{v_1-v_0}{a}+t_{21}+\frac{v_3-v_2}{a}+t_{43}+\frac{v_5-v_4}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5=\frac{1}{2}\frac{60^2-0^2}{a}+60t_{21}-\frac{1}{2}\frac{35^2-60^2}{a} \\ 3=35t_{43}-\frac{1}{2}\frac{0^2-35^2}{a} \\ \frac{10}{60}+\frac{20}{3600}=\frac{60-0}{a}+t_{21}-\frac{35-60}{a}+t_{43}-\frac{0-35}{a} \end{array}\right\}$$

University Copy For Library Use

- Beer 11_069 (2/2).

Solución de sistema matricial.



Beer_11_069.

Search t21, t43 and a .

```
> restart;eq0:=({5000=(0.5/a)*(60/3.6)^2+(60/3.6)*t21-(0.5/a)*((
  35/3.6)^2-(60/3.6)^2),3000=(35/3.6)*t43-(0.5/a)*((0/3.6)^2-(35
  /3.6)^2),10*60+20=(60/3.6)/a+t21-((35-60)/3.6)/a+t43-((0-35)/3
  .6)/a});
```

$$eq0 := \{5000 = 230.5169755\,\frac{1}{a} + 16.66666667\,t21,\ 3000 = 9.722222222\,t43 + \frac{47.26080246}{a},\ 620 = 33.33333333\,\frac{1}{a} + t21 + t43\}$$

```
> solut:=solve(eq0,{a,t21,t43});
```

$$solut := \{a = 1.281105317,\ t43 = 304.7769622,\ t21 = 289.2038395\}$$

```
> t30:=subs(solut,(60/3.6)/a+t21-((35-60)/3.6)/a);
```

$$t30 := 307.6341050$$

```
> t53:=subs(solut,t43-((0-35)/3.6)/a);
```

$$t53 := 312.3658950$$

```
> t10:=subs(solut,((60-0)/3.6)/a);
```

$$t10 := 13.00959917$$

```
> t32:=subs(solut,(-(35-60)/3.6)/a);
```

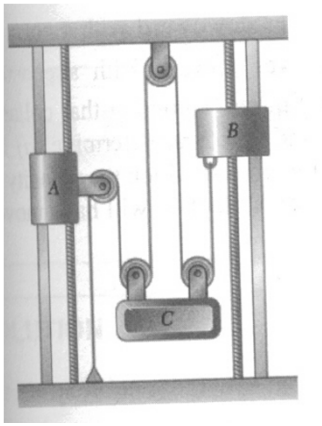
$$t32 := 5.420666320$$

```
> t54:=subs(solut,(-(0-35)/3.6)/a);
```

$$t54 := 7.588932848$$

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 11_055.



A se mueve desde reposo hacia arriba con aceleración de $3t^2[m/s^2]$. B se mueve hacia abajo con aceleración constante y su velocidad es de 200[m/s] al bajar 800[m]. Hallar aceleración de C y la distancia que se ha movido C para t=3[s].

Sol.: $a_c=6.25-1.5t^2$ $[m/s^2]$ descendiendo. $x_c=18.00[m/s]$ descenso.

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios con movimiento relativo usando poleas.

➢ Ejercicios de movimiento rectilíneo a tramos.

University Copy For Library Use

S21t.- Ejercicios de cinemática del sólido rígido (RB)

Rodadura.

Mejora 1415 ...

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.
  - Ejercicios poleas.

University Copy For Library Use

- Objetivos sesión.

➢ Comprender las ecuaciones de movimiento en caso de una rodadura

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Rodadura.

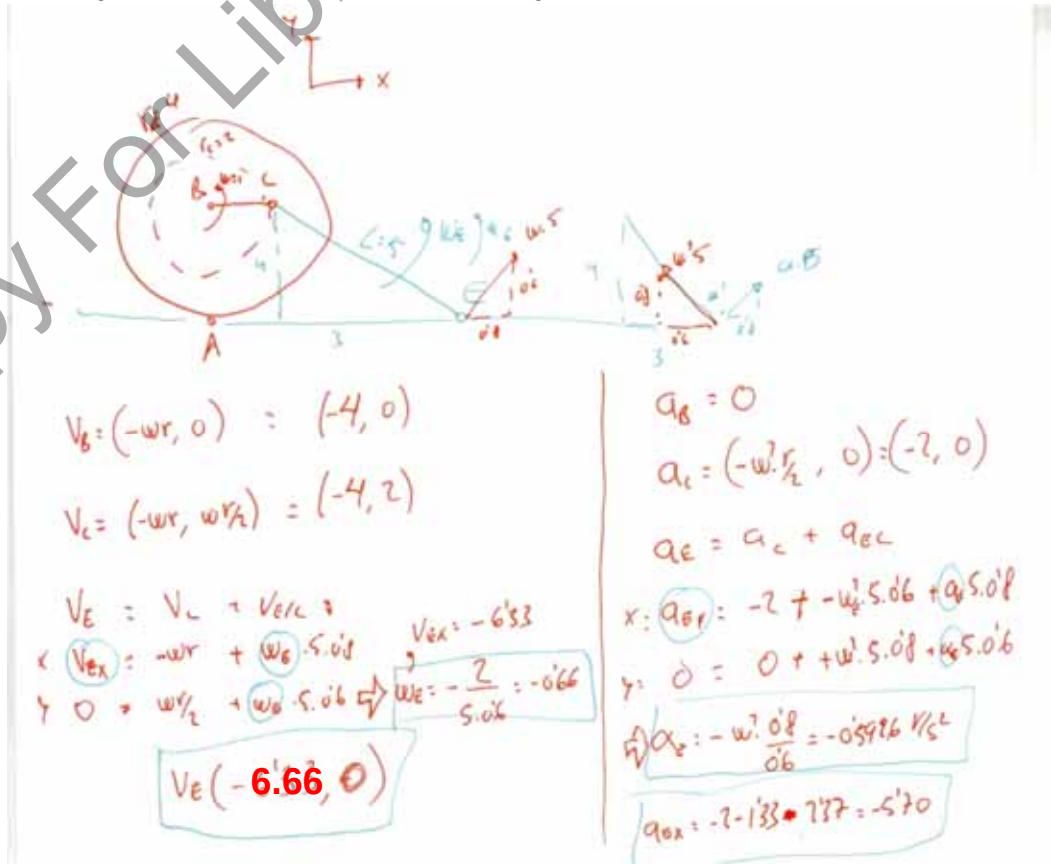
Para la asignatura de mecánica vamos a simplificar los ejercicios de rodadura al considerar que no hay deslizamiento en el punto de apoyo.

Para velocidades calcular suponiendo punto apoyo tiene velocidad 0 y calcular la velocidad centro rueda.

Para aceleraciones partir del centro de la rueda. El punto de apoyo tiene una aceleración vertical $\omega^2 r$.

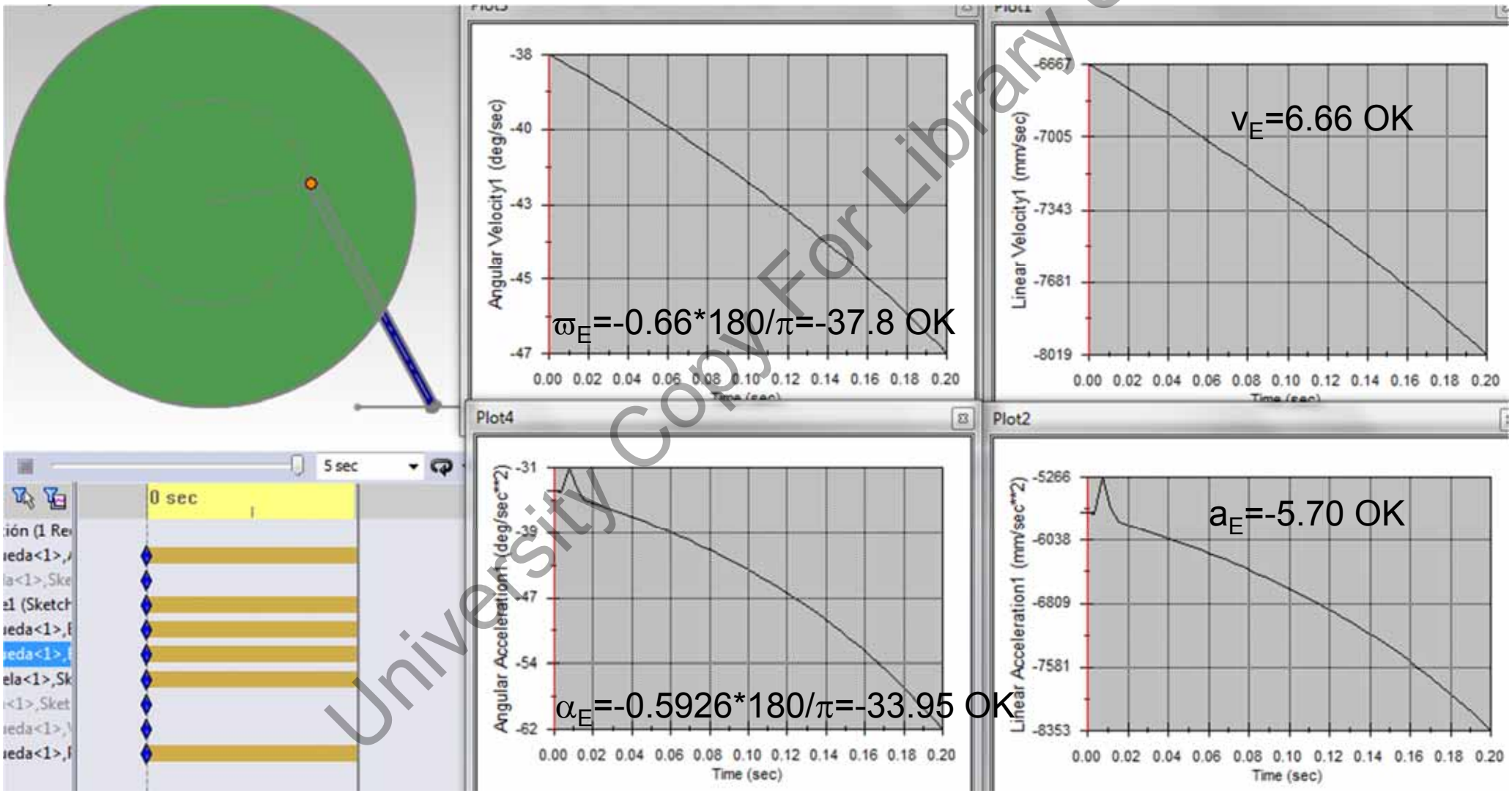
Ejemplo: Calcular velocidad y aceleración de punto E que se mueve horizontalmente por la carretera.

$a_b = \alpha . r$ en x negativo como punto de partida que en este caso es cero.



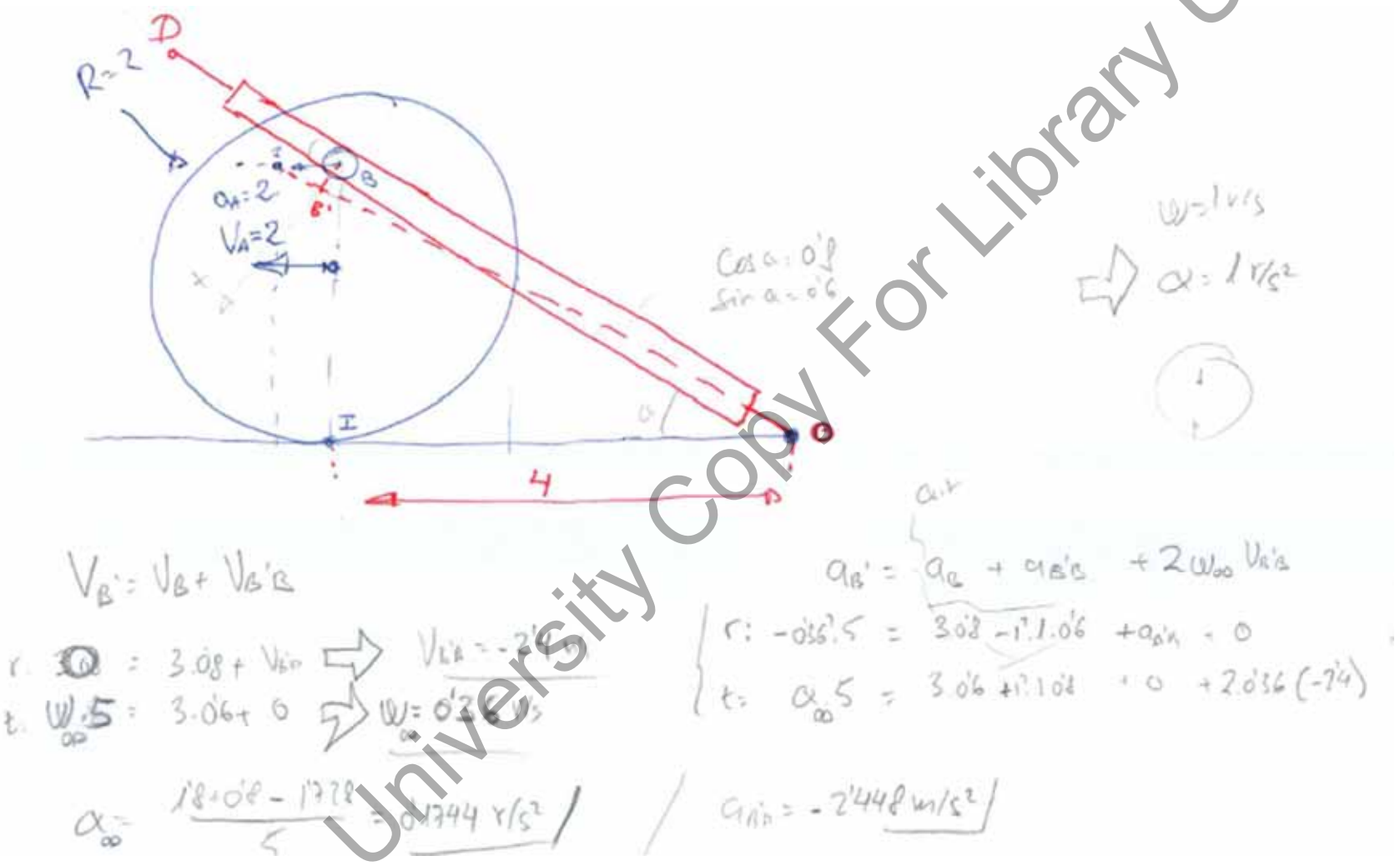
University Copy For Library Use

- Rodadura.

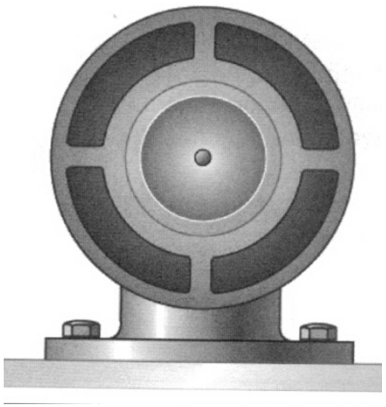


University Copy For Library Use

- Rodadura y coriolis.



University Copy For Library Use



- Beer 15_006.

Un motor eléctrico al encenderse necesita 4[s] para alcanzar 2400[rpm] y al apagarse el motor tarda 40[s] en pararse. Si la aceleración es constante calcular el número de vueltas para (a) llegar a régimen y (b) para parase.

Primero calculamos las aceleraciones angulares de encendido y apagado:

$\alpha_1=\omega_1/t_1=(2400[rpm]*2\pi[rad/vuelta]*1[min]/60[s])/4[s] = 20\pi[rad/s^2]$

$\alpha_2=-\omega_2/t_2=(-2400[rpm]*2\pi[rad/vuelta]*1[min]/60[s])/40[s] = -2\pi[rad/s^2]$

Calculamos las vueltas:

$\theta_1=\omega_1*t_1+0.5*\alpha_1*t_1^2=0*4 +0.5 * 20\pi * 4^2= 160\pi$ [rad] = 80[vueltas]

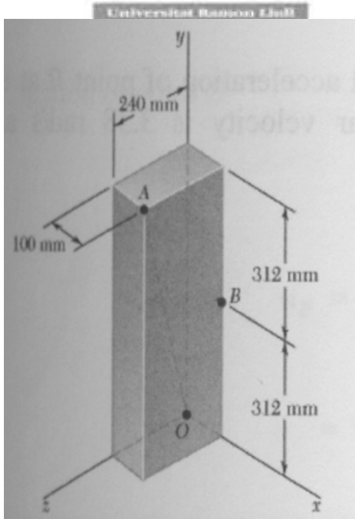
$\theta_2=\omega_2*t_2+0.5*\alpha_2*t_2^2=80\pi *40 -0.5 * 2\pi * 40^2= 1600\pi$ [rad] = 800[vueltas]

Sol:

(a) θ_1=80[vueltas] (b) θ_2=800[vueltas]

University Copy For Library Use

- Beer 15_011.



Un bloque rectangular rota entorno a la diagonal OA con ω=6.76[rad/s] antihorario visto desde A. Determinar (a) velocidad y (b) aceleración del punto B.

Primero calculamos la posición de A y B:

r_A=(0.100, 0.624, 0.240) [m] $|r_A|$=0.676[m]

r_B=(0.100, 0.312, 0.000) [m]

Colocamos la velocidad angular en componentes respecto eje OA:

ω=6.76*(0.100, 0.624, 0.240)/0.676 = (1, 6.24, 2.4) [rad/s]

Calculamos la velocidad como producto vectorial:

$v_B=v_o+ \omega \times r_B$= (1, 6.24, 2.4) x (0.100, 0.312, 0.000) = (-0.749, 0.240, -0.312) [m/s]

Calculamos la aceleración normal pues la tangencial es cero:

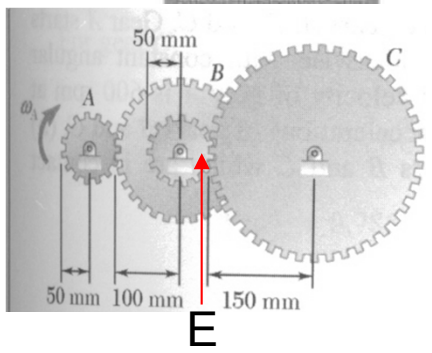
$a_B= \alpha \times r_B + \omega \times v_B$= (1, 6.24, 2.4) x (-0.749, 0.240, -0.312) = (-2.52, -1.485, 4.91) [m/s^2]

Sol:

(a) v_b= (-0.749,0.240,-0.312) [m/s] (b) a_b= (-2.52,-1.485,4.91) [m/s^2]

University Copy For Library Use

• Ejercicio casa Beer 15_023.



Un sistema de engranajes parte de ω_a=600[rpm]. Determinar (a) las velocidades angulares de B y C, (b) las aceleraciones del punto E sobre ruedas B y en C que estén en contacto.

Primero calculamos la velocidad de A=B:

v_A=600[rpm]*2π[rad/vuelta]*1[min]/60[s] * 50[mm]= 20π [rad/s] * 50[mm] = 1000π [mm/s]

Calculamos la velocidad angular de B:

v_B= 1000π [mm/s] = ω_B * 100[mm] ⇨ ω_B=10π[rad/s] =300[rpm] antih.

Calculamos la velocidad angular del disco que gira como B en E:

v_E= ω_B * 50[mm] = 500π [mm/s]

Calculamos la velocidad angular del disco que gira como B en E:

v_C= 500π [mm/s]= ω_C * 150[mm] ⇨ ω_C=3.33π[rad/s] =100[rpm] horario.

Calculamos las aceleraciones como componente normal pues la tangencial es cero:

a_{EenB}= v_E^2/r_E= (500π)^2/50 = 49300 [mm/s^2]. ←

a_{EenC}= v_E^2/r_C= (500π)^2/150 = 16450 [mm/s^2]. →

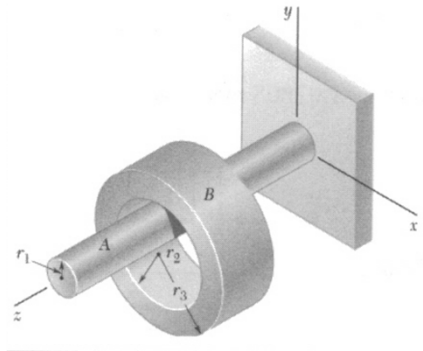
Sol: (a) ω_b=300[rmp] antih., ω_c=100[rpm] horario

(b) a_b=49.3[m/s^2] a izquierdas, a_c=16.45[m/s^2] a derechas.

University Copy For Library Use

- Beer 15_025.

El anillo B tiene un radio interior r_2 y exterior r_3 y su centro no se mueve. El eje A de radio r_1 rota con velocidad constante ω_a. El anillo no desliza y por tanto rota con ω_b. Poner (a) ω_b en función de ω_a, r_1, r_2 y (b) aceleración de los puntos en contacto entre eje y anillo.



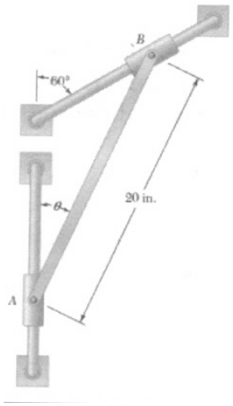
r del

Sol:

(a) $w_b=r_1\omega_a/r_2$; (b) $a_a=r_1\omega_a^2$, $a_b=r_2\omega_b^2=r_1^2\omega_a^2/r_2$

University Copy For Library Use

- Beer 15_039.



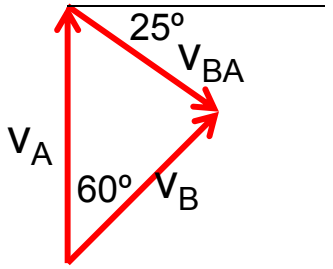
Un collar A sube con v_A=3.6[ft/s]. En el instante en que θ=25º determinar (a) la velocidad angular de la barra y (b) la velocidad de B.

Usamos la relación de velocidades relativas:

$v_B=v_A+v_{BA}$ considerando que la velocidad relativa es perpendicular de la barra.

Usando regla de los senos resolvemos las velocidades:

(b) $v_B=v_A$*sin(90-25)/sin(180-60-(90-25))=3.98[ft/s]



$v_{BA}=v_A$*sin(60)/sin(90-25)=3.806[ft/s]= 45.47[in/s]

Calculamos la velocidad angular:

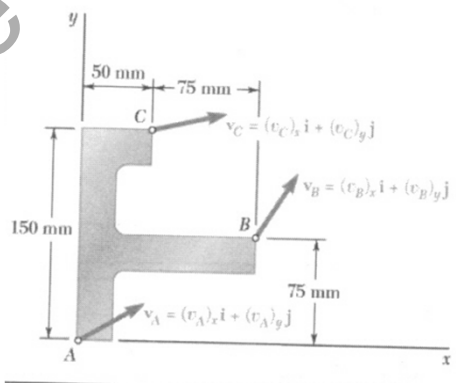
(a) $\omega_{BA}=v_{BA}/r_{BA}$= 45.47/20 = 2.28 [rad/s] ↻

Sol:

(a) ω_{ab}=2.28[rad/s] (b) v_b=3.98[ft/s] subiendo con pendiente de 30º.

University Copy For Library Use

- Beer 15_045.



Conocemos la velocidad de tres puntos de un cuerpo pero el sistema tan sólo nos da alguna componente de la velocidad v_{ax}=100[mm/s], v_{by}=-75[mm/s] y v_{cx}=400[mm/s]. Calcular (a) la velocidad angular del cuerpo y (b) la velocidad del punto A.

Sabemos que $v_{BA} = (0,0,\omega)x\ r_{BA}= (0,0,\omega)x(125,75,0) = (-75\omega, 125\omega,0)$ y $v_{CA} = (0,0,\omega)x\ r_{CA}= (-150\omega, 50\omega,0)$

Como $v_B=v_A + v_{BA}$ ⇨ $(v_{bx},-75)=(100,v_{ay})+ (-75\omega, 125\omega)$

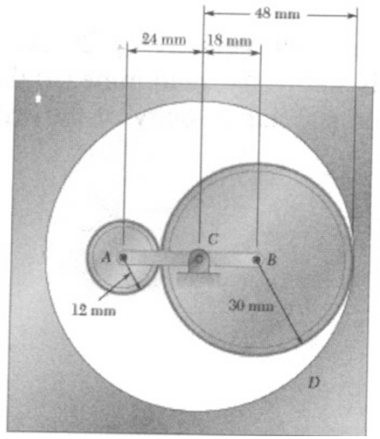
Como $v_C=v_A + v_{CA}$ ⇨ $(400,v_{cy})=(100,v_{ay})+ (-150\omega, 50\omega)$ de la componente x se despeja la velocidad angular y a partir de ahí el resto de velocidades.

Sol:

(a) ω=-2[rad/s] ó 2↻ (b) v_a=(100,175), v_b=(250,-75), v_c=(400,75)

University Copy For Library Use

- Beer 15_051.



El brazo ABC rota respecto a C con ω=40[rad/s] antihorario↺. Si no hay deslizamiento calcular (a) ω_a y (b) ω_b.

$v_A=r_{AC}\omega_{ACB}$=24*40=940[mm/s] hacia abajo (0,-940)

$v_B=r_{BC}\omega_{ACB}$=18*40=720[mm/s] hacia arriba (0,720)

Punto de contacto D entre disco B y exterior con velocidad 0:

$0=v_B-v_{DB}=720-30\omega_B$ ⇨ (b) ω_B=24[rad/s] horario.

Punto de contacto E entre disco B y disco A con la misma velocidad:

$v_E=v_B-v_{EB}=720+30\omega_B$ ⇨ v_E=1440[mm/s] hacia arriba.

$v_E=v_A-v_{EA}=-940+12\omega_A$ ⇨ (a) ω_A=200[rad/s] antih.

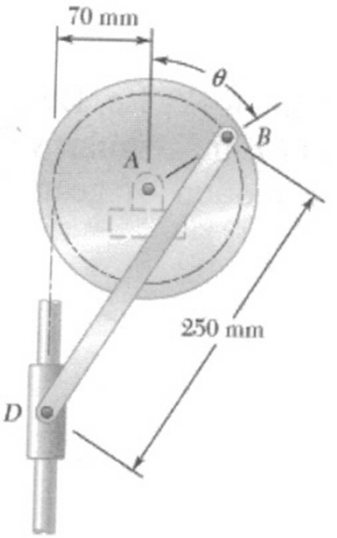
Sol:

(a) ω_a=200[rad/s] antih. (b) ω_b=24[rad/s] horario.

University Copy For Library Use

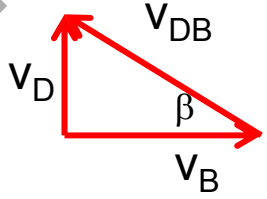
- Beer 15_055.

Si el disco gira a ω=15[rad/s] constante horario determinar ω_{bd} y v_d para (a) θ=0º, (b) θ=90º y (c) θ=180º.



Para θ=0º:

v_B=15*0.07=1.05[m/s] hacia la derecha (1.05,0)



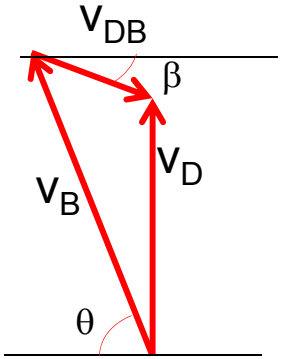
Ángulo entre biela y vertical:

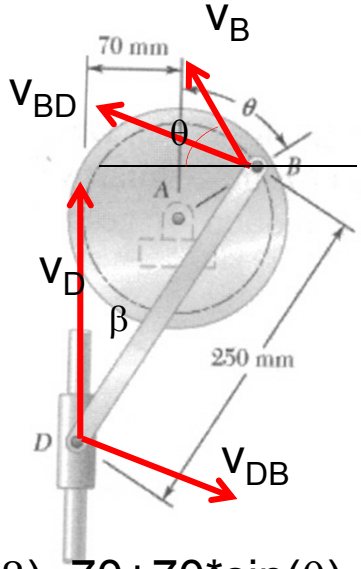
sin(β)=70/250 ⇨ β=16.26º

$v_{DB}/\sin(90º)=v_B/(\sin(90-\beta)$ ⇨ v_{DB}=1.094[m/s]

$\omega_{DB}=v_{DB}/0.25$ = 4.38[rad/s] horario

$v_D/\sin(\beta)=v_B/(\sin(90-\beta)$ ⇨ v_D=0.306[m/s]





Sol:

(a) θ=0º, ω_{bd}=4.38 [rad/s] hor. y v_d =0.306[m/s] arriba.

(b) θ=90º, ω_{bd}=0 [rad/s] y v_d =1.050[m/s] abajo.

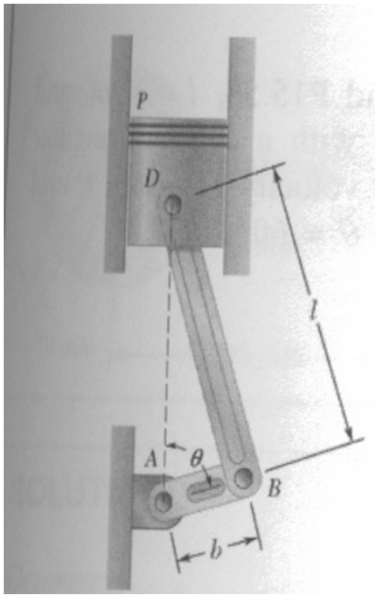
(c) θ=180º, ω_{bd}=4.38 [rad/s] antih. y v_d =0.306[m/s] abajo.

250+sin(β)=70+70*sin(θ)

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 15_057.

Un motor de L=8[in] y b=3[in] gira a 1000[rpm] en sentido horario. Determinar la velocidad del pistón v_p y la velocidad angular de la biela ω_{bd} para (a) θ=0º y (b) θ=90º.



Sol:

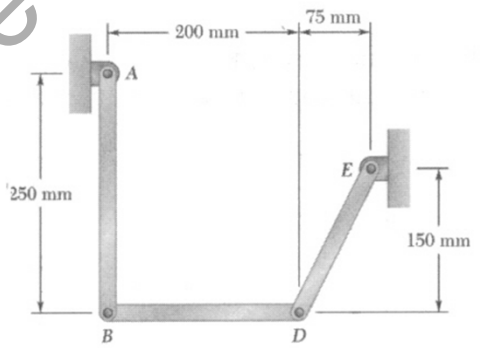
(a) θ=0º, ω_{bd}=39.3 [rad/s] antihor. y v_p =0[in/s] (punto muerto).

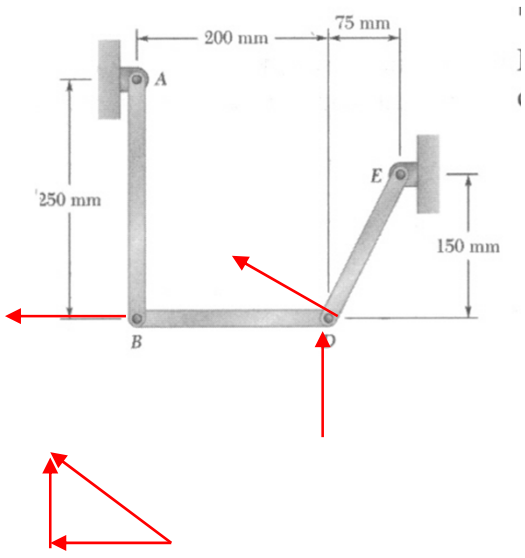
(b) θ=90º, ω_{bd}=0 [rad/s] y v_d =314.2[in/s] abajo.

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 15_064.

El sistema de barras tiene en el instante de la figura una velocidad de ω_{ab}=4[rad/s] en sentido horario. Calcular las velocidades angulares e las otras barras.



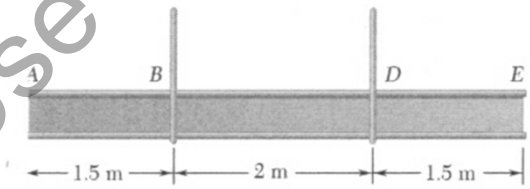


Sol:

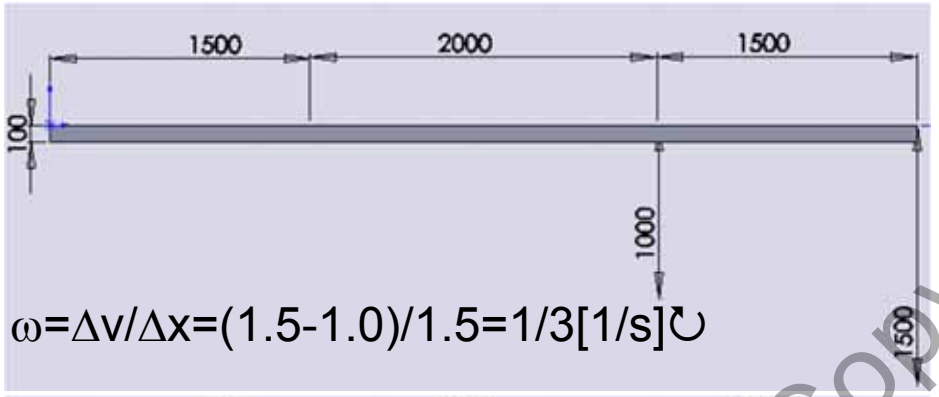
(a) ω_{de}=6.67[rad/s] horario y ω_{bd}=2.50[rad/s] antih.

University Copy For Library Use

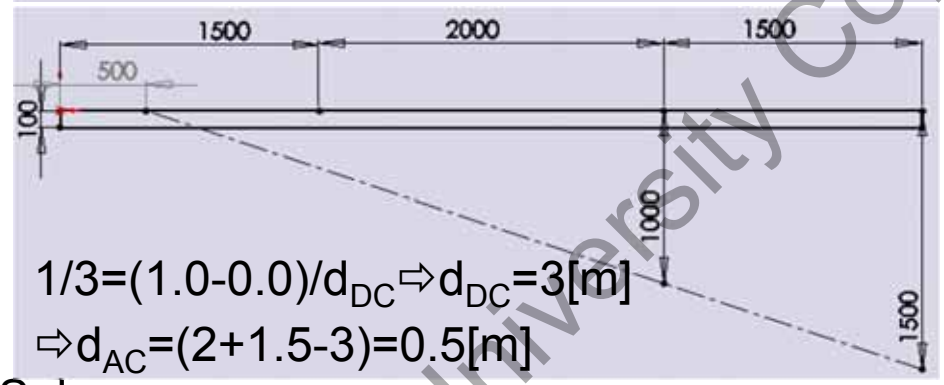
- Beer 15_071.



Una viga de 5[m] está siendo bajada por dos operarios. En D la velocidad de bajada es de 1[m/s] y en E de 1.5[m/s]. Calcular (a) el centro instantáneo de rotación y (b) la velocidad de A.

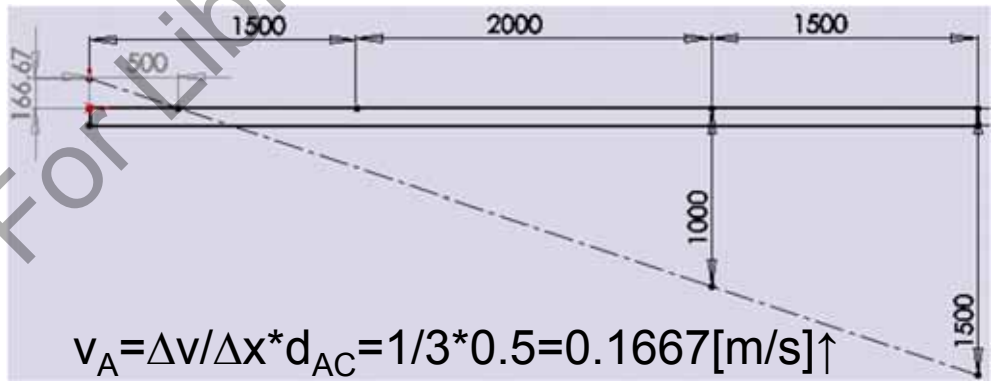


$\omega=\Delta v/\Delta x=(1.5-1.0)/1.5=1/3[1/s]\circlearrowleft$



$1/3=(1.0-0.0)/d_{DC}\Rightarrow d_{DC}=3[m]$

$\Rightarrow d_{AC}=(2+1.5-3)=0.5[m]$



$v_A=\Delta v/\Delta x*d_{AC}=1/3*0.5=0.1667[m/s]\uparrow$

Sol:

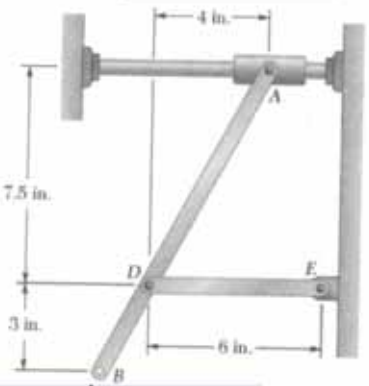
(a) $d_{a\_cir}=0.5[m]$ a la derecha de A.

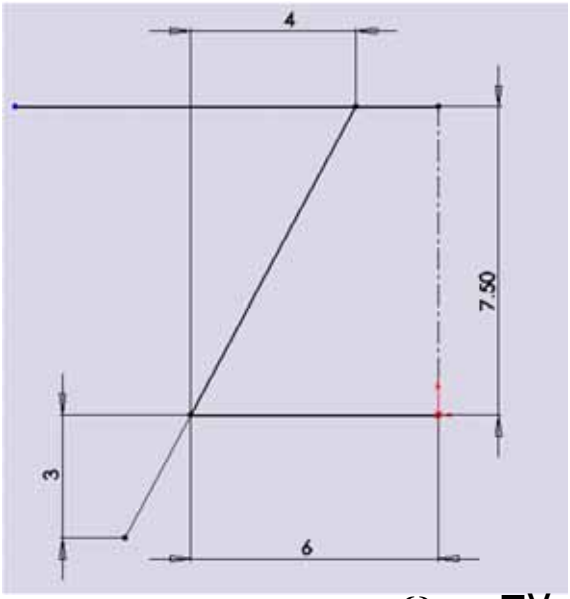
(b) $v_a=0.1667[m/s]$ hacia arriba.

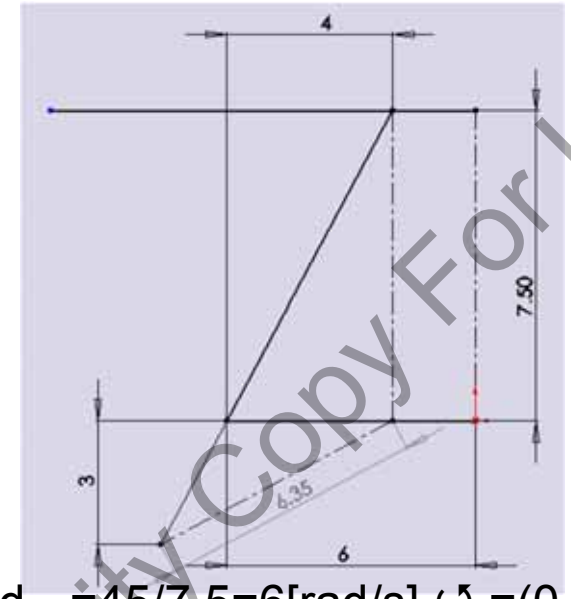
University Copy For Library Use

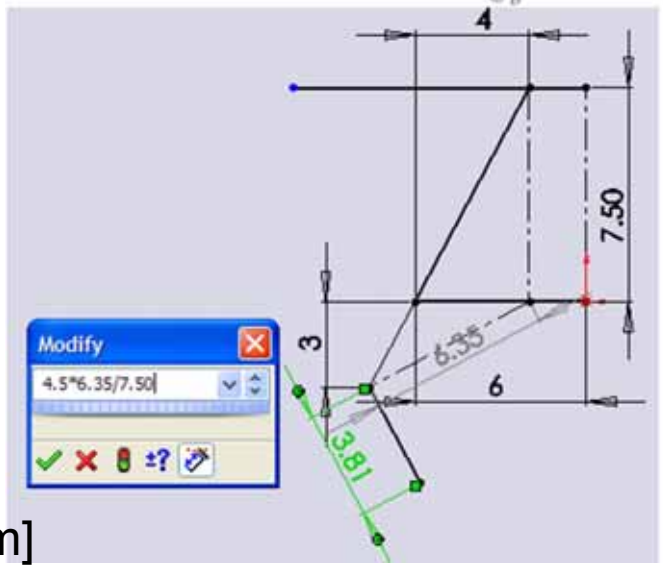
- Beer 15_081.

Sabiendo que la velocidad de A es 45[m/s] hacia la izquierda hallar (a) velocidad angular de ADB y (b) velocidad de punto B.









$\omega_{ADB}=v_A/d_{AC}=45/7.5=6[rad/s]\circlearrowleft=(0,0,6)$

$d_{BC}=\sqrt{((4+3*4/7.5)^2+3^2)}=6.35[m]$, $d_{BCx}=-5.6[m]$, $d_{BCy}=-3[m]$

$v_B=\omega_{ADB}*d_{BC}=6*6.35=38.1[m/s]$, $v_{Bx}=6*3=18[m/s]\rightarrow$, $v_{By}=6*5.6=33.6[m/s]\downarrow$

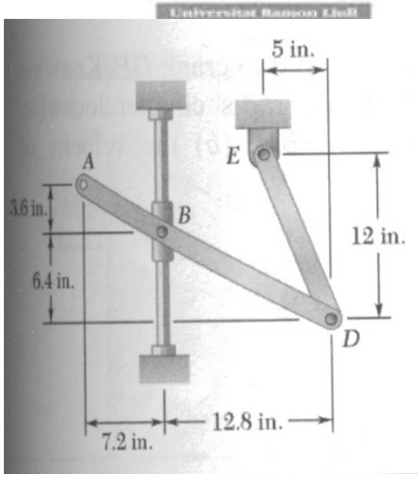
Sol:

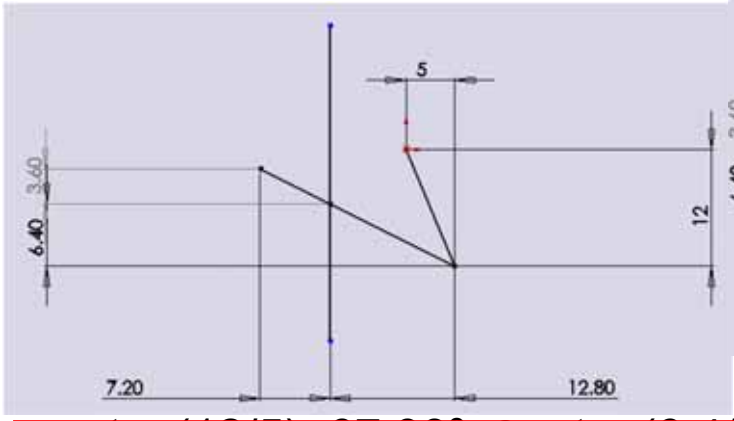
(a) $\omega_{ADB}=6[rad/s]$ antih. (b) $v_b=38.1[m/s]$ a derecha de la barra.

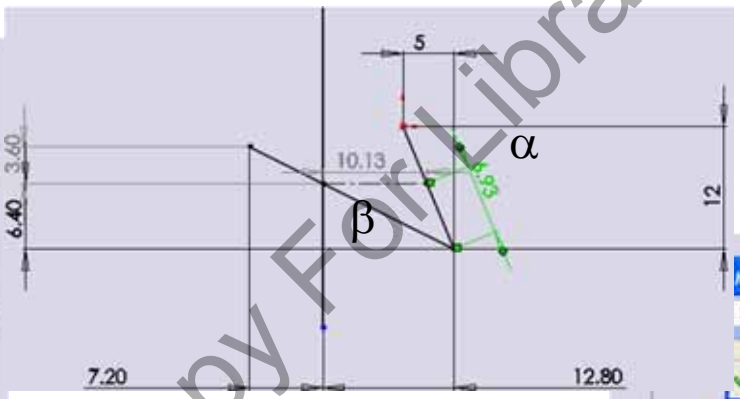
University Copy For Library Use

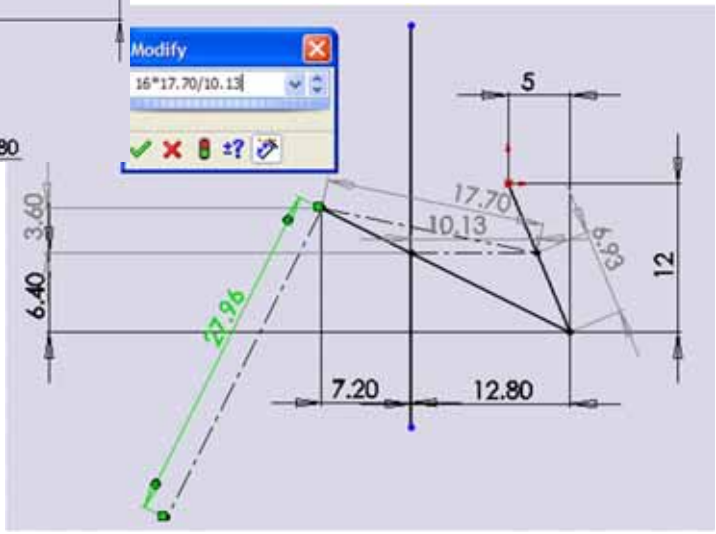
- Ejercicio casa Beer 15_087.

El brazo ABD está conectado por pins al collar AB. El collar B sube con v_b=16[m/s]. Determinar (a) velocidad angular del brazo ABD y (b) la velocidad de A.







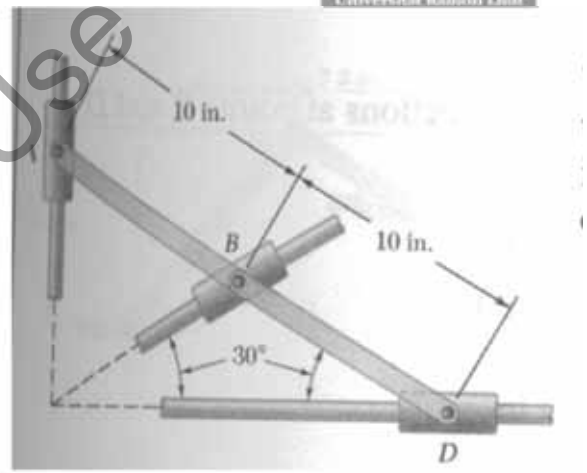


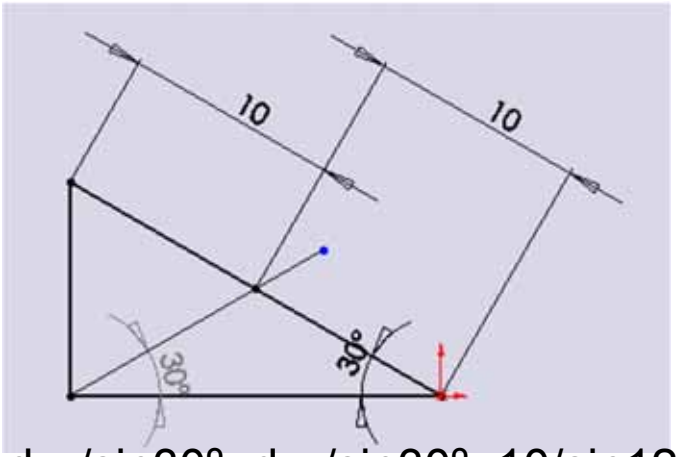
Sol: (a) ω_{ABD}=1.579[rad/s] (b) v_A=28[m/s] a la derecha de la barra.

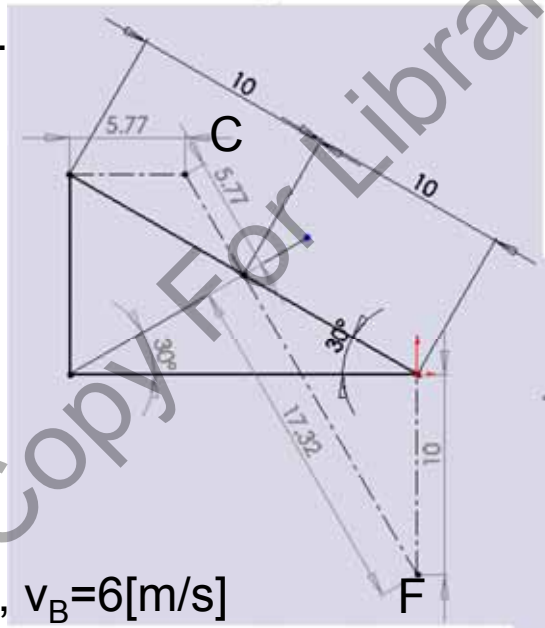
University Copy For Library Use

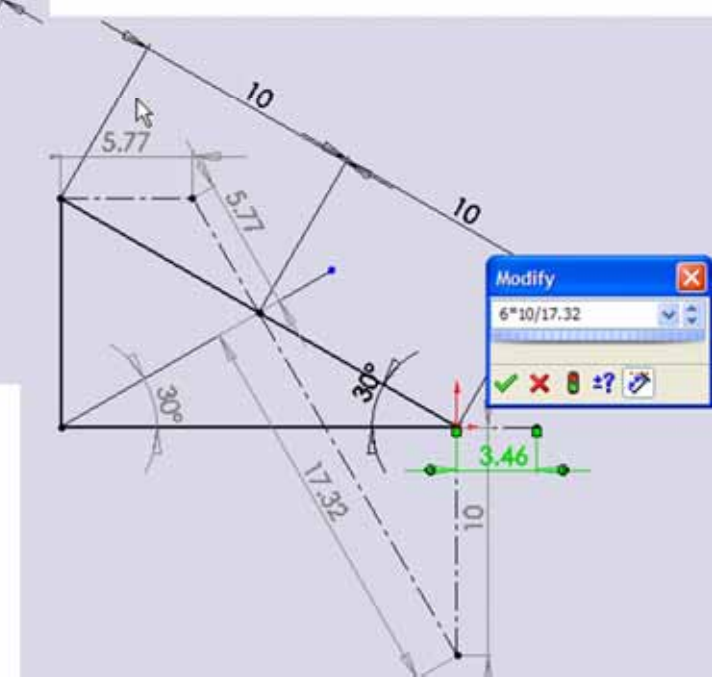
- Beer 15_091.

El collar A se mueve hacia abajo con velocidad 6[m/s]. En el instante de la figura determinar (a) la velocidad angular de barras AB y BD y (b) la velocidad del collar D.









$d_{AC}/\sin 30º = d_{BC}/\sin 30º = 10/\sin 120º \Rightarrow$

$d_{AC} = d_{BC} = 5.77[m] \Rightarrow \omega_{AB} = 6/5.77 = 1.039$, $v_B = 6[m/s]$

$d_{BF}/\sin 120º = d_{DF}/\sin 30º = 10/\sin 30º \Rightarrow$

$d_{BF} = 17.32[m]$, $d_{DF} = 10[m] \Rightarrow \omega_{BC} = 6/17.32 = 0.346$, $v_D = 3.46[m/s]$

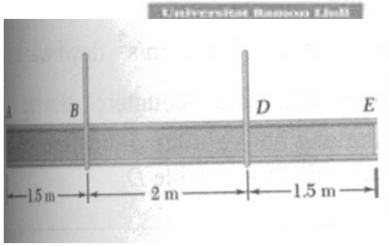
Sol:

(a) $\omega_{AB} = 1.039[rad/s]$ antih. y $\omega_{BD} = 0.346[rad/s]$ horario.

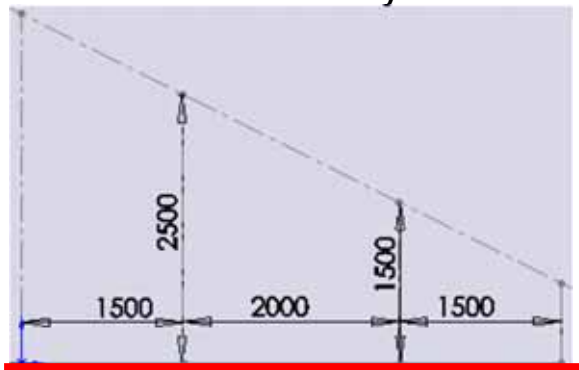
(b) $v_B = 6[m/s]$ hacia arriba y $v_D = 3.46[m/s]$ a la derecha.

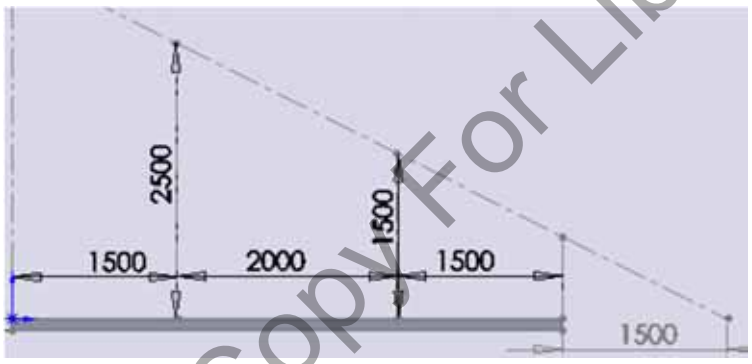
University Copy For Library Use

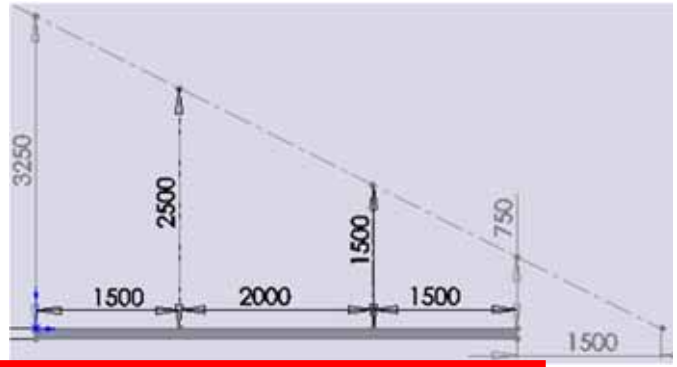
- Ejercicio casa Beer 15_105.



Una viga de 5[m] baja por medio de dos cables a velocidad constante e idéntica en B y D. Antes de llegar al suelo los cables frenan en B 2.5[m/s^2] y en D 1.5[m/s^2]. Determinar (a) aceleración angular de la viga y (b) aceleración de A y E.







Sol:

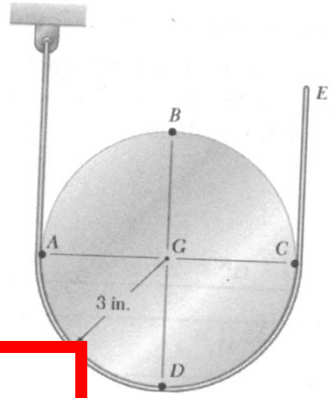
(a) α=0.5[rad/s^2].

(b) a_A=3.25[m/s^2] frenando y a_E=0.75[m/s^2] frenando.

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 15_110.

La cuerda tiene una velocidad en E de 12[m/s] y una aceleración de 19.2[m/s^2] ambas hacia arriba. Determinar la aceleración de (a) punto A y (b) punto B.



Para el punto A tan sólo hay aceleración normal:

cial 19.2↑ y

+24←

d/s^2]↺

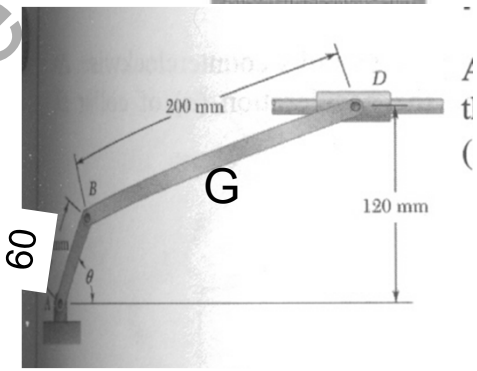
Sol:

(a) a_A=12[m/s^2] a la derecha

(b) a_B=9.9[m/s^2] a la izquierda y abajo con 14º (-9.6,-2.4).

University Copy For Library Use

- Beer 15_117.



El brazo AB tiene velocidad angular constante de 16[rad/s] antihorario.
Determinar para θ=0º (a) la aceleración de D y (b) la aceleración de G.

Primero calculamos la velocidad de B y luego la de D por CIR:
v_B=960[mm/s]↑, ω_{BD}=6[rad/s]↻,v_D=6*120=720[mm/s]→
Calculamos la aceleración de B que tiene componente normal únicamente al rotar con ω cons.
a_B=15360[mm/s^2]←

Sabemos que D se mueve en la horizontal y por tanto tan sólo tiene acel. tangencial:
$a_D=a_B+a_{DB}$= 15360← +120α_{BD}← +160α_{BD}↑ +120ω_{BD}^2↓ +160ω_{BD}^2←⇨
las verticales: 0= +160α_{BD}↑ +120ω_{BD}^2↓ = +160α_{BD}↑ +120*6^2↓ ⇨ α_{BD}=27[rad/s^2]↻
las horizontales: a_{Dn}=15360← +120α_{BD}← +160ω_{BD}^2←= 24360 [mm/s^2]←

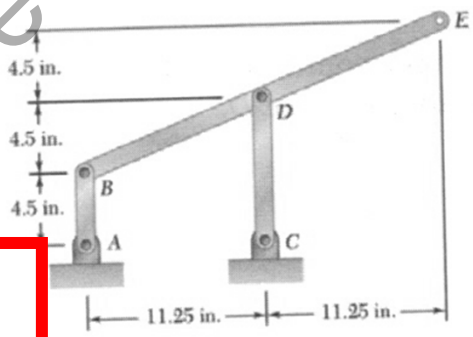
Como ya tenemos la aceleración angular es directo calcular la aceleración de G:
$a_G=a_B+a_{GB}$= 15360← +60α_{BD}← +80α_{BD}↑ +60ω_{BD}^2↓ +80ω_{BD}^2← = 19860← 0↑

Sol:
(a) a_D=(-24.4,0) [m/s^2].
(b) a_G=(-19.86,0) [m/s^2].

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 15_128.

Si AB vel. angular constante 6[rad/s] horario determinar (a) aceleración angular de BDE y (b) aceleración de E.



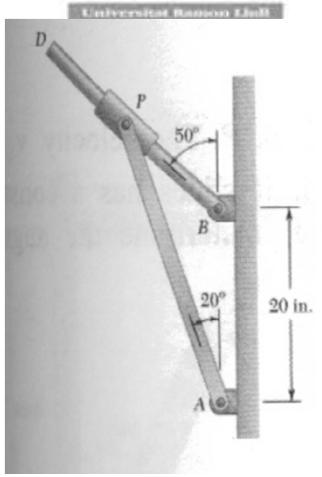
11.25↑
ad/s²]↺

(a) α_{BDE}=7.20[rad/s²] antih.

(b) a_E=(-64.8,0) [m/s²]

University Copy For Library Use

• Beer 15_150.

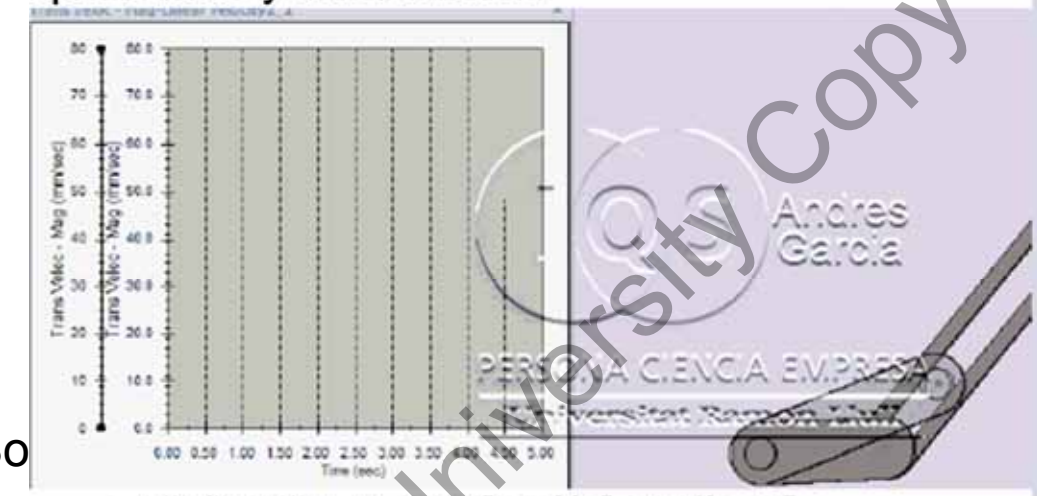


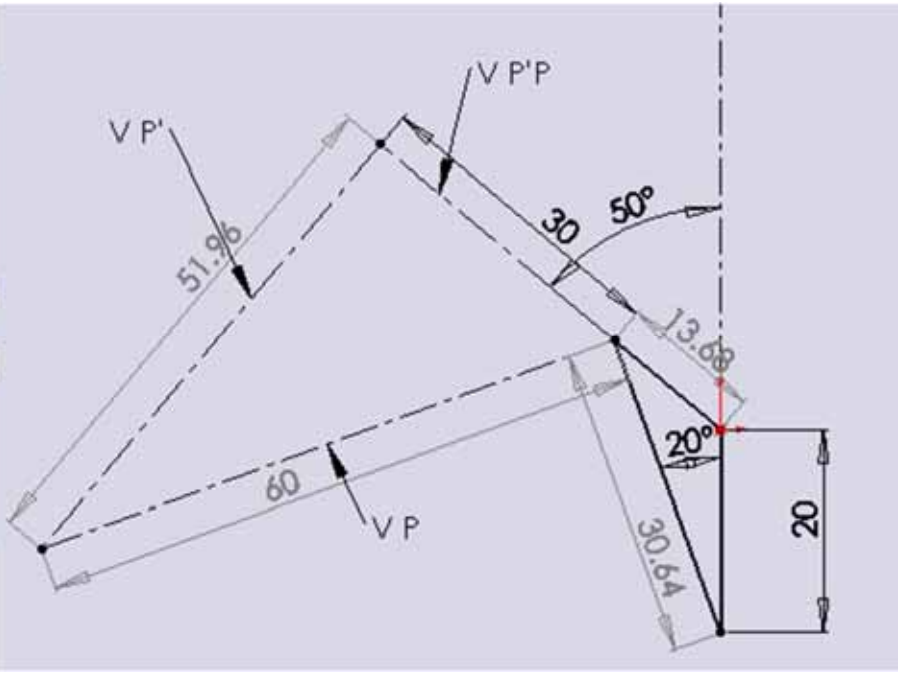
El collar se mueve con v_o=30[m/s] hacia fuera. Determinar la velocidad angular de cada barra.

Si P pertenece a barra AP y P' es el equivalente en la barra BD. Entonces el dato que nos dan es la velocidad de P respecto P' y además:

$v_P = v_{P'} + v_{PP'} \Rightarrow \omega_{PA} d_{PA} = \omega_{P'B} d_{P'B} + v_o$.

Una vez planteada la ecuación se resuelve matemáticamente o gráficamente sin olvidar las componentes y direcciones.





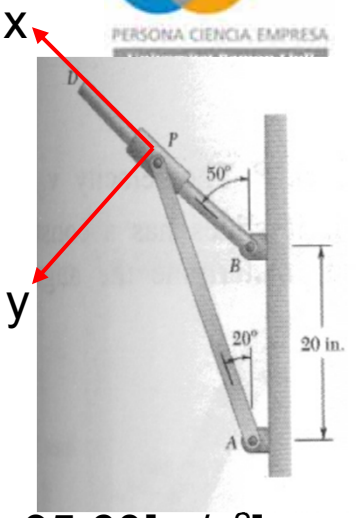
So

(a) ω_{AP}=60/30.64=1.958[rad/s] antih. ↺

y ω_{BD}=51.96/13.68=3.798[rad/s] antih. ↺

University Copy For Library Use

• Beer 15_150 modificado.



Si la barra A gira con velocidad constante ω_{AP}=1.958[rad/s] ↺ tal y como se ha calculado anteriormente ω_{BD}=3.798[rad/s] ↺ y $v_{PP'}$=30[m/s]. Dar aceleración relativa PP' y aceleración angular de la barra B.

Para las aceleraciones hay que tener en cuenta Coriolis:

$a_P=a_{P'}+a_{PP'}+2\omega_B \times v_{PP'}=$

x: $-\omega_A^2 d_{AP}\cos(30º)=-\omega_B^2 d_{BP'}+a_{PP'}+0 \Rightarrow a_{PP'}=-1.958^2*30.64*0.866+3.798^2*13.68=95.60[m/s^2]$

y: $\omega_A^2 d_{AP}\sin(30º)=\alpha_B d_{BP'}+0+2\omega_B v_{PP'} \Rightarrow \alpha_B=(1.958^2*30.64*0.5-2*3.798*30)/13.68=-12.36[r/s^2]$

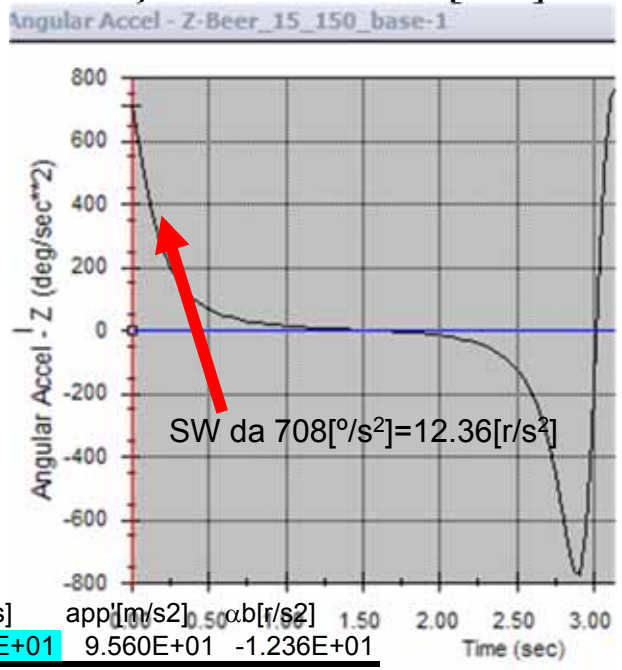
Comprobamos que la velocidad de P'

baja y por tanto frena

Trans Accel - X-Linear Acceleration1_16
Time (sec),"Trans Accel - X (mm/sec**2)","
0,2.72719373314103,-110.389411738694

Trans Accel - Y-Linear Acceleration3_14
Time (sec),"Trans Accel - Y (mm/sec**2)","
0,-40.1742724063713,-259.925634634027

SW no da gráfico para comparar

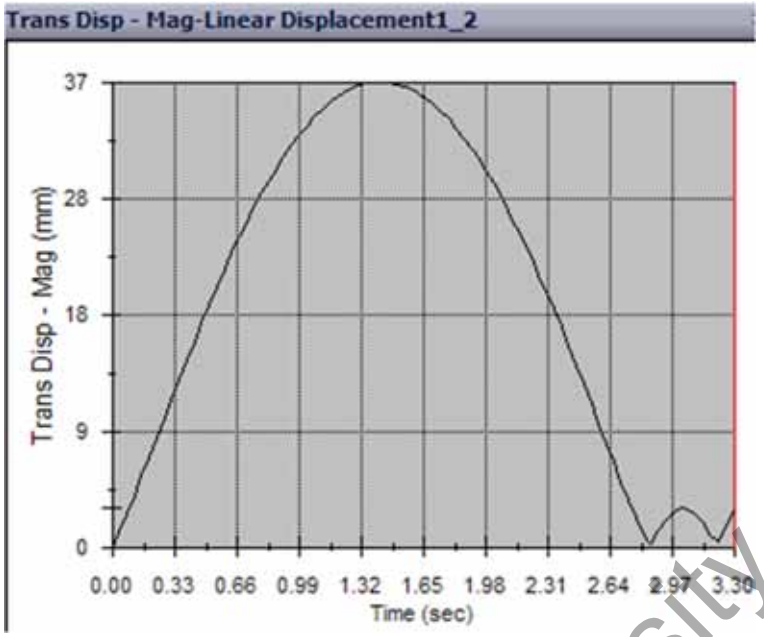


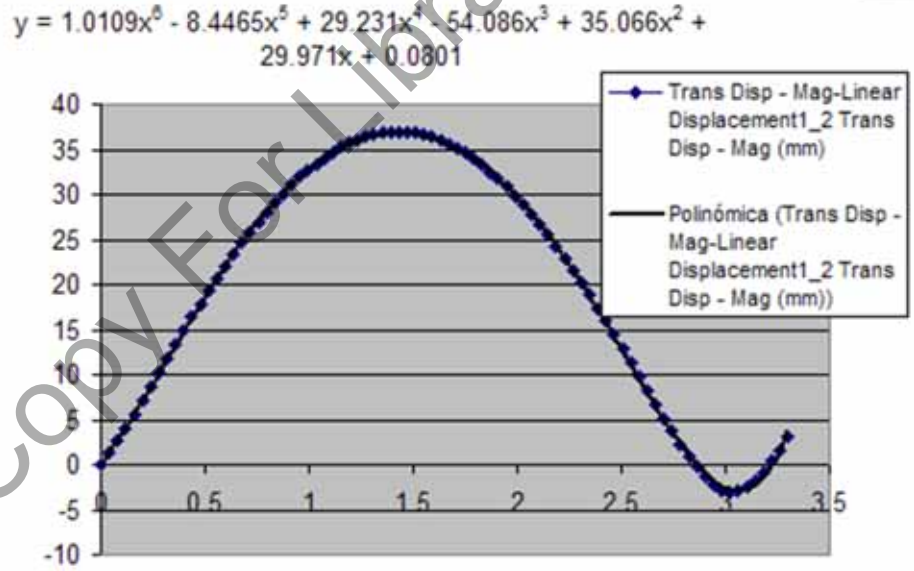
	dab[m]	dap[m]	aap[º]	wa[rad/s]	dbp[m]	wb[rad/s]	vpp'[m/s]	app'[m/s2]	αb[r/s2]
ej.-Bee	2.000E+01	3.064E+01	2.000E+01	1.958E+00	1.368E+01	3.798E+00	3.000E+01	9.560E+01	-1.236E+01

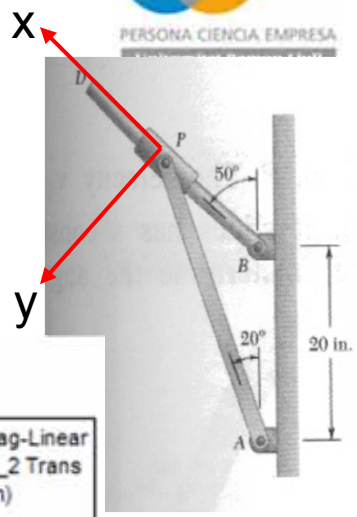
University Copy For Library Use

- Beer 15_150 modificado.

Para comprobar la aceleración de PP' usamos los desplazamientos en EXCEL y ver si da $a_{PP'}$=95.60[m/s^2]





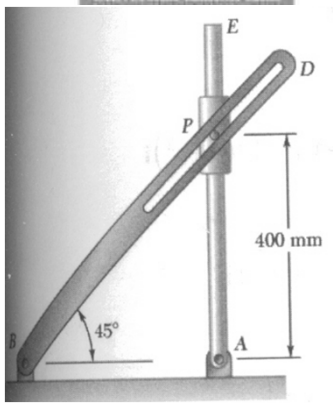


Podemos calcular la velocidad v_{PP}' según el ajuste en tiempo cero: 29.97 cuando el resultado exacto es 30 ligeramente diferente debido al ajuste polinomial.

Podemos calcular la aceleración a_{PP}' según el ajuste en tiempo cero: 2*35.07=70.14 cuando el resultado calculado es 95.6 debido al error en el ajuste.

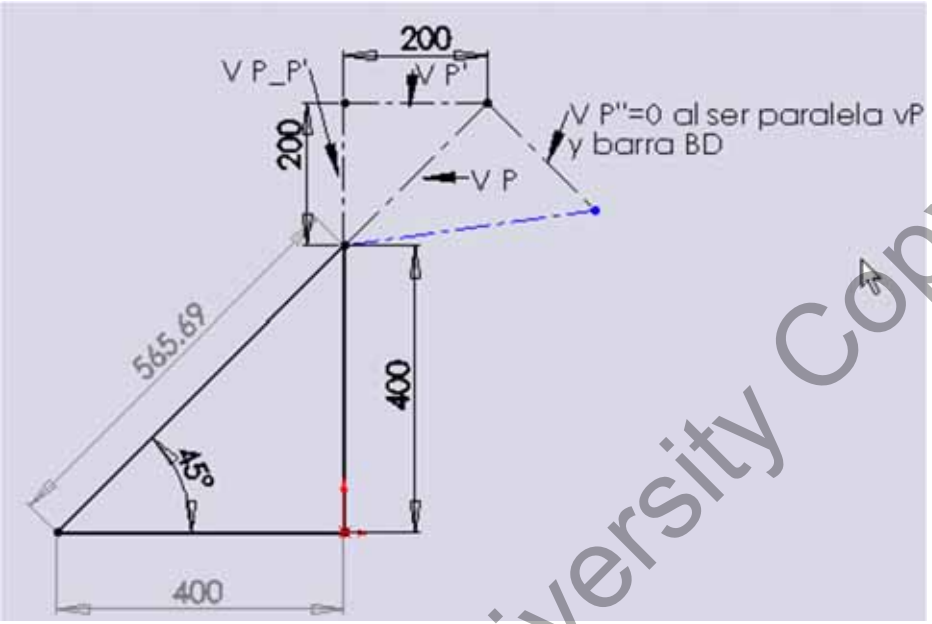
University Copy For Library Use

• Beer 15_158.



La barra AE rota a 5[rad/s] horario constante. La distancia AP aumenta a un ritmo de 2[m/s]. Determinar (a) la aceleración angular de la barra BD y (b) la aceleración relativa de P con respecto a la barra BD.

Para este ejercicio hay que considerar P' en barra AE y P'' en barra BD.



Sol:

(a) α_{BD}=-37.5[rad/s^2]

(b) $a_{PP''}$=(5,5,0) $|a_{PP''}|=a_r$=7.07[m/s^2]

Se van colocando las velocidades y se comprueba que ω_{BD}=0 pues $v_{P''}$=0.

La aceleración se calcula:

$a_{P'}=d_{AP}\alpha_{AE}\rightarrow + d_{AP}\omega_{AE}^2\downarrow=0+10\downarrow=(0,-10,0)$.

$a_{PP'}$=0 por dato de enunciado.

coriolis: $2\omega_{AE}$ x $v_{PP'}=2(0,0,-5)x(0,2,0)=(20,0,0)$

$a_P=a_{P'}+a_{PP'}+2\omega_{AE}$ x $v_{PP'}=(20,-10,0)$

$a_{P''}=d_{BP}\alpha_{BD}$ + $d_{BP}\omega_{BD}^2=(-0.4\alpha_{BD},0.4\alpha_{BD},0)$.

$a_{PP''}=(\cos45^o a_r,\sin45^o a_r,0)$

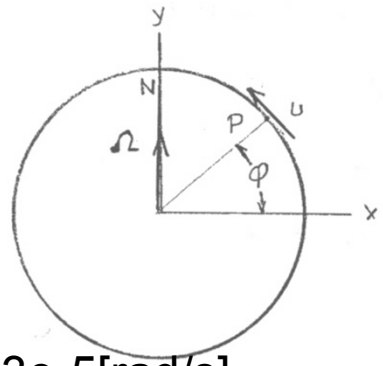
coriolis: $2\omega_{BD}$ x $v_{PP''}$=0

$a_P=a_{P''}+a_{PP''}+2\omega_{BD}$ x $v_{PP''}$=

$(-0.4\alpha_{BD}+0.707a_r,0.4\alpha_{BD}+0.707a_r,0)$= (20,-10,0)

University Copy For Library Use

- Beer 15_163.



Un cohete se ensaya en una trayectoria a lo largo de un meridiano comenzando a una latitud de 40º norte con velocidad norte de 800[m/s]. Determinar la aceleración de coriolis en este instante si sabemos que una vuelta de la tierra necesita 23.933[horas].

Primero se calcula la velocidad de giro de la tierra $\omega=2\pi/(23.933*3600)=7.293e\text{-}5[rad/s]$

Calcular la velocidad relativa a la tierra: $800(-\sin\theta,\cos\theta,0)$

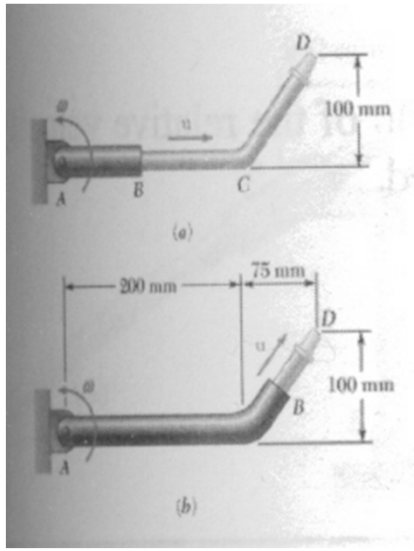
Se calcula coriolis: $2(0,7.293e\text{-}5,0) \times 800(-\sin\theta,\cos\theta,0) = (0,0,0.1283\sin\theta)$

Sol:

(a) $a_c=2\omega \times v = 0.1283 \sin\theta = 0.0825\ [m/s^2]$

University Copy For Library Use

- Beer 15_164.



El brazo AB gira a w=2.4[rad/s] y el trozo BD se extiende a 250[mm/s]. Determinar la aceleración de D para la configuración de la foto (a) y (b).

La aceleración del punto

$a_{D'}$=0-2.4^2*(275,100) a_{D_AB}=0 d_{CD}=raiz(75^2+100^2)=125

La velocidad del punto:

(a) v_{D_AB}=(250,0,0)

(b) v_{D_AB}=250/125 (75,100,0) = (150,200,0)

Coriolis:

(a) 2(0,0,2.4) x (250,0,0) = (0,1200, 0)

(b) 2(0,0,2.4) x (150,200,0) = (-960,720, 0)

Total: a_D=$a_{D'}$+a_{D_AB}+coriolis

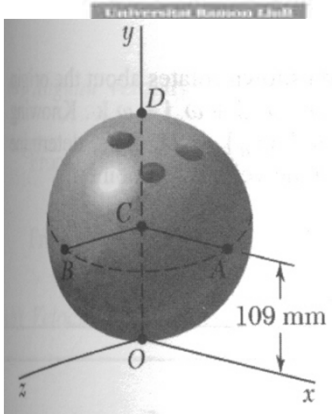
Sol:

(a) a_D=(-1584,624), $|a_D|$=1702 [mm/s^2]

(b) a_D=(-2544,144), $|a_D|$=2548 [mm/s^2]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 15_182.



La bola de billar gira sobre el plano xz sin deslizar en O con (ω_x, ω_y, ω_z). Sabemos que v_B=(3.6,-4.8,4.8) y v_D=(7.2,0,9.6). Determinar (a) ω y (b) v_C.

Sol:

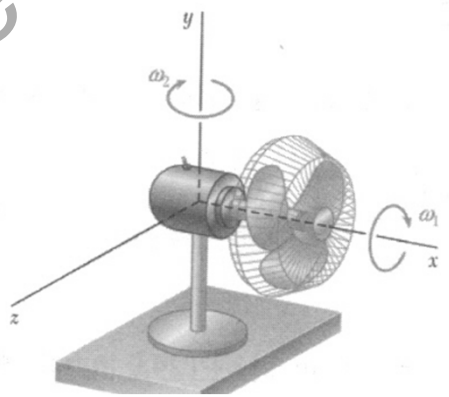
(a) ω=(44,0,-33) [rad/s]

(b) v_C=(3.6,0,4.8) [m/s]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 15_184.

Un ventilador gira las aspa a ω_1=(-450,0,0) [rpm] constante y que la caja del ventilador gira con ω_2=(0,-3,0)[rpm] y α_2=(0,0,0). Determinar la aceleración angular de las aspas.



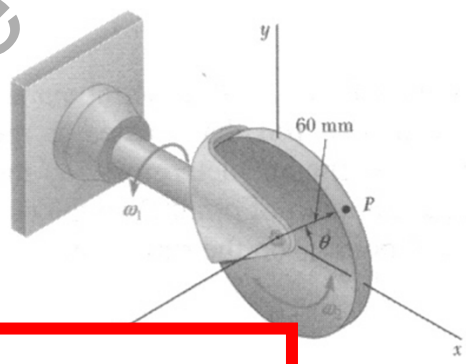
Sol:

(a) $\alpha=\omega_1'+\omega_2'=(0,0,-1.5\pi^2)$ [rad/s^2]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 15_190.

Una rueda de radio 60[mm] gira a ω_2=4[rad/s] constante sobre un eje que gira a ω_1=5[rad/s] constante. Determinar (a) la aceleración angular del disco (b) la aceleración del punto P para θ=0º y (c) para θ=90º.

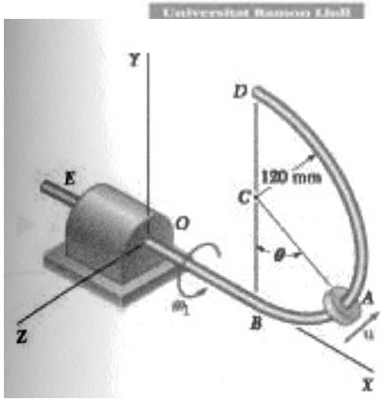


Sol:

(a) α=(0,-20,0) [rad/s^2] (b) a_P=(-0.96,0,2.40) [m/s^2] (c) a_P=(0,-2.46,0) [m/s^2]

University Copy For Library Use

- Beer 15_216.



El alambre EBD rota con ω_1=8[rad/s] constante. Si sabemos que el collar A sube con velocidad constante u=600[mm/s] para θ=60º, determinar (a) la velocidad de A y (b) su aceleración.

El sistema de referencia rota con $\Omega=\omega_1$=(8,0,0) y el punto B no se mueve.

$r_{AB}=r*(\sin\theta, 1-\cos\theta,0)=120*(\sin60º, 1-\cos60º,0) = (103.9,60,0)$ [mm]

$v_{A'}=\omega \times r_{AB}= (8,0,0) \times (103.9, 60,0) = (0,0,480)$ [mm/s]

$v_{AA'}= u(\cos\theta,\sin\theta,0)=600(\cos60º,\sin60º,0)=(300,519.6,0)$ [mm/s]

$v_A=v_{A'}+v_{AA'}=(300,519.6,480)$ [mm/s]

$a_{A'}= \alpha \times r_{AB} + \omega \times v_{A'}= (8,0,0) \times (0,0,480) = (0,-3840,0)$ [mm/s^2]

$a_{AA'}= (u^2/r)*(-\sin\theta,\cos\theta,0)= (600^2/120)(-\sin60º,\cos60º,0) = (-2598,1500,0)$ [mm/s^2]

Coriolis: $a_c= 2\Omega \times v_{AA'} = 2(8,0,0) \times (300,519.6,0) = (0, 0, 8314)$ [mm/s^2]

$a_A=a_{A'}+a_{AA'}+a_c= (-2598, -2340, 8314)$ [mm/s^2]

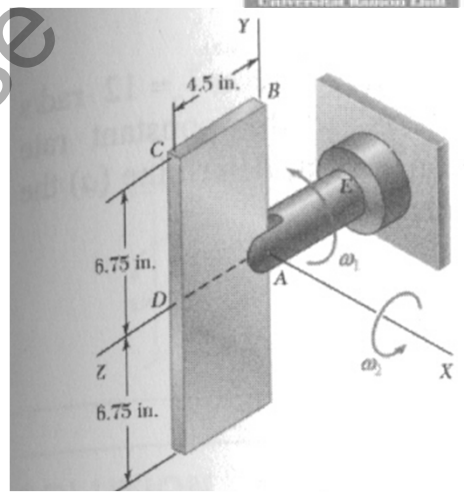
Sol:

(a) v_A= (300,519.6,480) [mm/s]

(b) a_A= (-2.6, -2.34, 8.31) [m/s^2]

University Copy For Library Use

- Beer 15_220.



La placa rota con ω_2=12[rad/s] constante respecto a AE que rota con ω_1=9[rad/s]. Determinar (a) velocidad de B y (b) aceleración de B.

El sistema de referencia rota con $\Omega=\omega_1$=(0,0,9)

r_{BA}= (0,6.75,0) [mm]

$v_{B'}=\omega_1 \times r_{BA}$= (0,0,9) x (0,6.75,0) = (-60.75,0,0) [mm/s]

$v_{BB'}= \omega_2 \times r_{BA}$= (12,0,0) x (0,6.75,0) = (0,0,81) [mm/s]

$v_B=v_{B'}+v_{BB'}$=(-60.75,0,81) [mm/s]

$a_{B'}= \alpha_1 \times r_{BA} + \omega_1 \times v_{B'}$= (0,0,9) x (-60.75,0,0) = (0,-546.7,0) [mm/s^2]

$a_{BB'}= \alpha_2 \times r_{BA} + \omega_2 \times v_{BB'}$= = (12,0,0) x (0,0,81) = (0,-972,0) [mm/s^2]

Coriolis: $a_c= 2\Omega \times v_{BB'}$ = 2(0,0,9) x (0,0,81) = (0,0,0) [mm/s^2]

$a_B=a_{B'}+a_{BB'}+a_c$= (0,-1519,0) [mm/s^2]

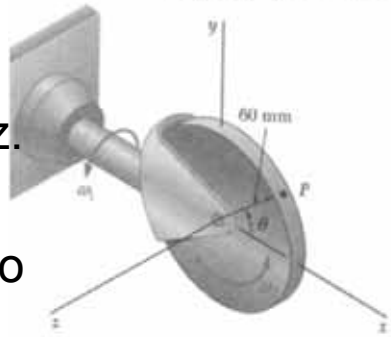
Sol:

(a) v_B=(-60.75, 0, 81.0) [mm/s]

(b) a_B=(0,-1519,0) [mm/s^2]

University Copy For Library Use

- Beer 15_225.



Resolver 15_190 de sesión anterior usando sistema de coordenadas Oxyz.
Una rueda de radio 60[mm] gira a ω_2=4[rad/s] constante sobre un eje que gira a ω_1=5[rad/s] constante. Determinar (a) la aceleración angular del disco (b) la aceleración del punto P para θ=0º y (c) para θ=90º.

El sistema de coordenadas gira con $\Omega=\omega_1$=(5,0,0) y el P gira en este sistema con ω_2=(0,0,4)

La aceleración angular es: $\alpha=\omega'=\omega_1' + \Omega \times \omega_2 = 0 + (5,0,0) \times (0,0,4) = (0,-20,0)$ [rad/s^2]

Para θ=0º se calcula r_P=(0.06, 0, 0), $v_{P'}=\omega_1 \times r$ =(0, 0, 0), $v_{PP'}=\omega_2 \times r$ =(0,0.24,0), v_P=(0,0.24,0)
$a_{P'}=\alpha_1 \times r_P + \omega_1 \times v_{P'}$ = (0,0,0), $a_{PP'}= \alpha_2 \times r_P + \omega_2 \times v_{PP'}$=(-0.96,0,0), $a_c=2\Omega \times v_{PP'}$=(0,0,2.4) ⇨
$a_P=a_{P'} + a_{PP'} + a_c$= (-0.96,0,2.4)

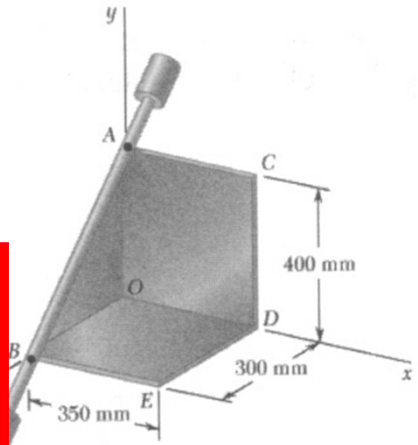
Para θ=90º se calcula r_P=(0, 0.06, 0), $v_{P'}=\omega_1 x r$=(0,0,0.3), $v_{PP'}=\omega_2 x r$=(-0.24,0,0), v_P=(-0.24,0,0.3)
$a_{P'}=\alpha_1 \times r_P + \omega_1 \times v_{P'}$ = (0,-1.5,0), $a_{PP'}= \alpha_2 \times r_P + \omega_2 \times v_{PP'}$=(0,-0.96,0), $a_c=2\Omega \times v_{PP'}$=(0,0,0) ⇨
$a_P=a_{P'} + a_{PP'} + a_c$= (0,-2.46,0)

Sol:
(a) α=(0,-20,0) [rad/s^2] (b) a_P=(-0.96,0,2.40) [m/s^2] (c) a_P=(0,-2.46,0) [m/s^2]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 15_243.

El giro respecto AB se produce a 5[rad/s]. Calcular (a) la velocidad de E, (b) la velocidad de D y (c) aceleración de D.



) [mm/s^2]

Sol:

(a) v_E=(0, -1.05, -1.4) [m/s] (b) v_D=(-1.2, -1.05, -1.4) [m/s]

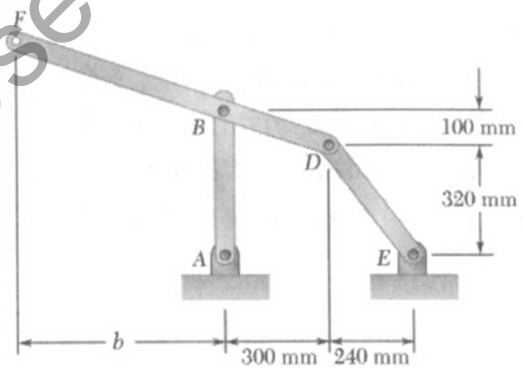
(c) a_D=(-8.75, 3.6, 4.8) [m/s^2]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 15_246.

La barra DE rota con 15[rad/s]. Determinar (a) la distancia "b" para que la velocidad de F sea vertical, (b) la velocidad de F en este caso

La distancia b se resuelve para tener el CIR alineado con AB y DE tal y como se ve en la figura de CAD.



Sol:

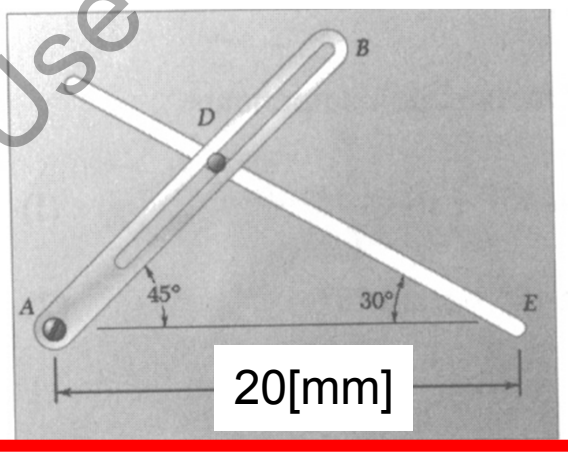
(a) b=0.90 [m]

(b) v_F=(0, -10.8, 0) [m/s]

University Copy For Library Use

- Beer 15_252.

La barra AB rota con ω=3[rad/s] y α=5[rad/s^2] ambos horarios.
Determinar (a) la velocidad y (b) la aceleración de D.
Primero calculamos longitudes por regla de senos. Las longitudes las podemos comprobar con imagen CAD.
Si AB es el sistema de referencia que gira con ω y α:



(a) v_D=32.15 [mm/s]

(b) a_D=105.3[mm/s^2]

University Copy For Library Use

- Resumen.
  - Ejercicio de rodadura
  - Ejercicios CIR
  - Ejercicios de movimiento de partículas respecto a sistemas de ejes rotativos.
  - Ejercicios con Coriolis.
  - Ejercicios de movimiento general.

University Copy For Library Use

S22t.- Ejercicios de Coriolis y Satélites y trayectorias 3D.

Mejora 1415 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios con velocidades relativas y trayectorias curvilíneas.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

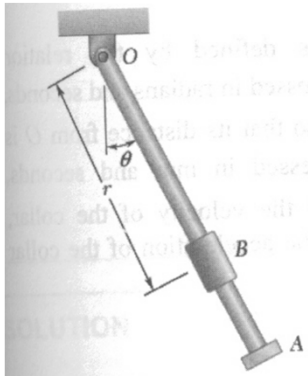
- Objetivos sesión.

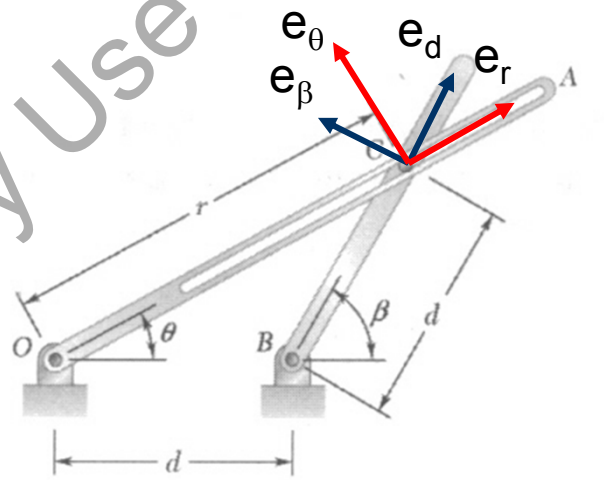
➢ Comprender la problemática de coriolis desde el punto de vista matemático y usando ejes simples que permitan la descomposición en movimiento radial y tangencial que minimice las matemáticas.

➢ Realización de cuatro ejercicios básicos que demuestren la aceleración con coriolis.

University Copy For Library Use

- Coriolis comparativa.





$$v = \dot{r}_{P/O} = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta;$$
$$a = \left(\ddot{r} - r\left(\dot{\theta}\right)^2\right)e_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)e_\theta$$

$$v_{C'} = v_C + v_{C'C}$$
$$a_{C'} = a_C + a_{C'C} + 2\omega_{guiaOC'} \times v_{C'C}$$

$$v_C = v_{C'} + v_{CC'}$$
$$a_C = a_{C'} + a_{CC'} + 2\omega_{guiaOC'} \times v_{CC'}$$

University Copy For Library Use

• Ejercicio básico Coriolis.

$$v_{C'} = v_C + v_{C'C}$$

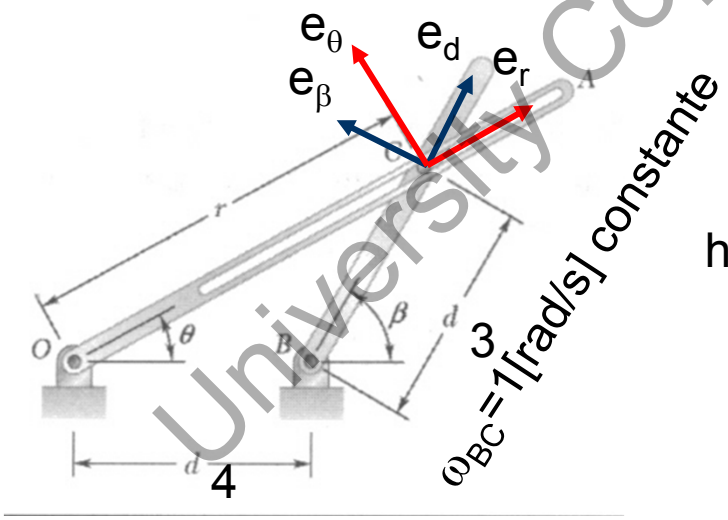
$$a_{C'} = a_C + a_{C'C} + 2\omega_{guiaOC'} \times v_{C'C}$$

Realizar el ejercicio para d_{BC}=3[mm], d_{BO}=4[mm], ω_{BC}=1[rad/s] constante.

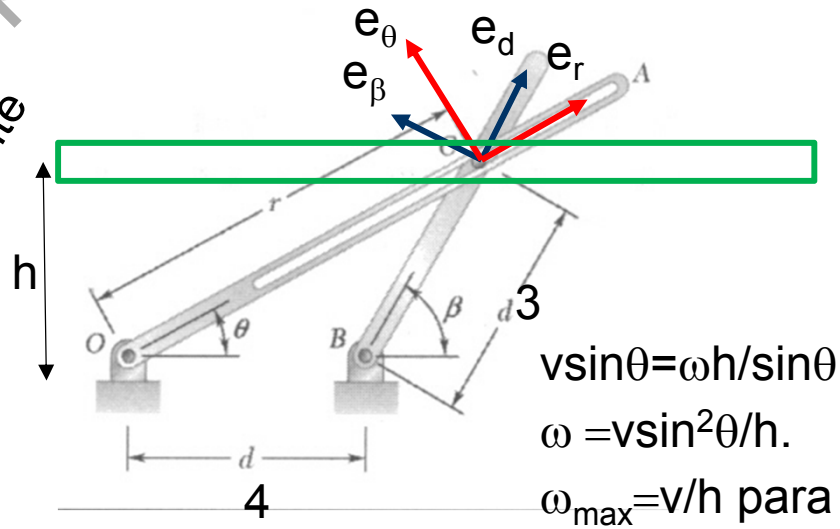
Determinar $\omega_{OC'}$ y $\alpha_{OC'}$ Para el instante en que β=90º.

Repetir el ejercicio si el punto C'' se desplaza en horizontal hacia la izquierda con velocidad 3[mm/s] permitiendo que C se desplace por barra BC cuya velocidad no será constante.

$\omega_{OC'}$=0.36[r/s], $\alpha_{OC'}$=-0.1344[r/s^2]
$v_{CC'}$=2.4[mm/s], $a_{CC'}$=1.152[m/s^2]

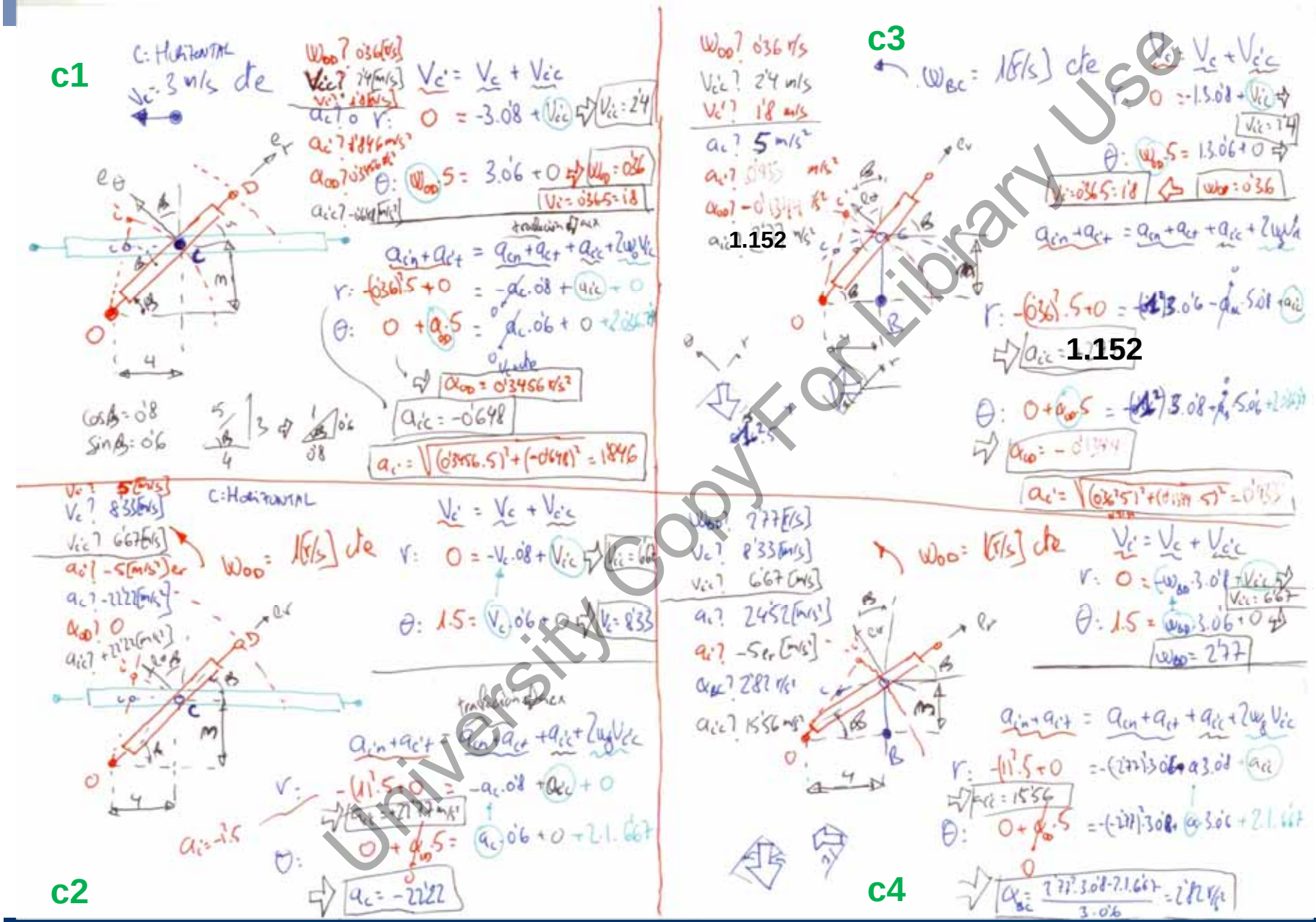


$\omega_{OC'}$=0.36[r/s] $\alpha_{OC'}$=0.3456[r/s^2]
$v_{CC'}$=2.4[mm/s], $a_{CC'}$=-0.6486[m/s^2]

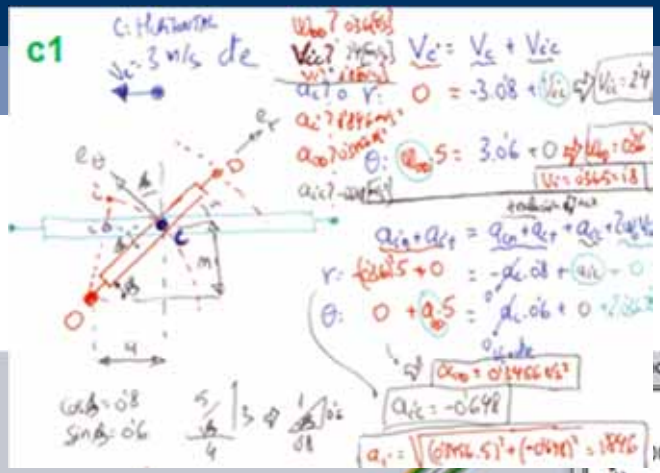


$v\sin\theta = \omega h/\sin\theta \Rightarrow$
$\omega = v\sin^2\theta/h.$
$\omega_{max} = v/h$ para θ=90º

University Copy For Library Use



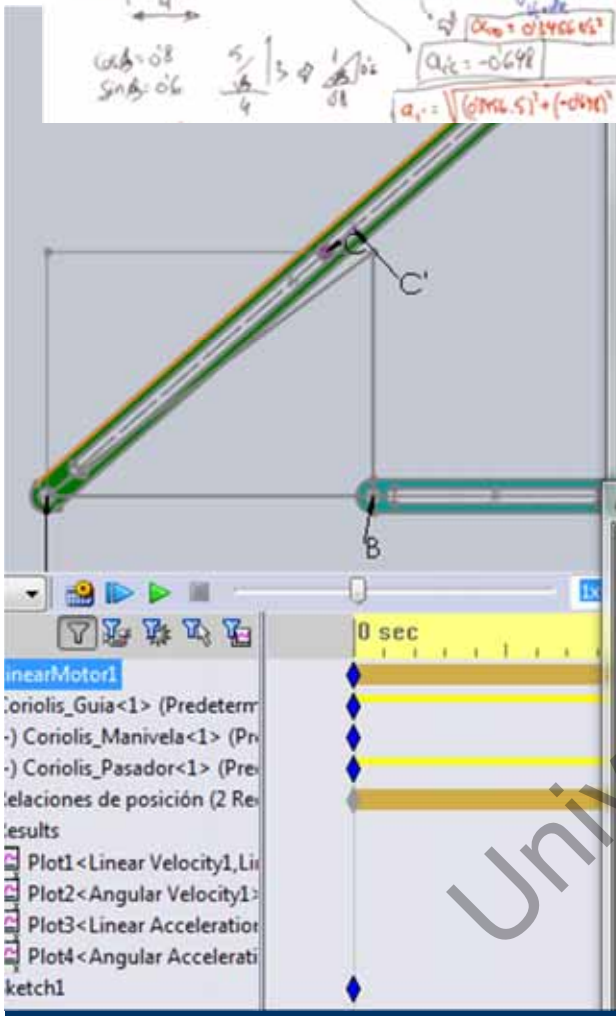
University Copy For Library Use

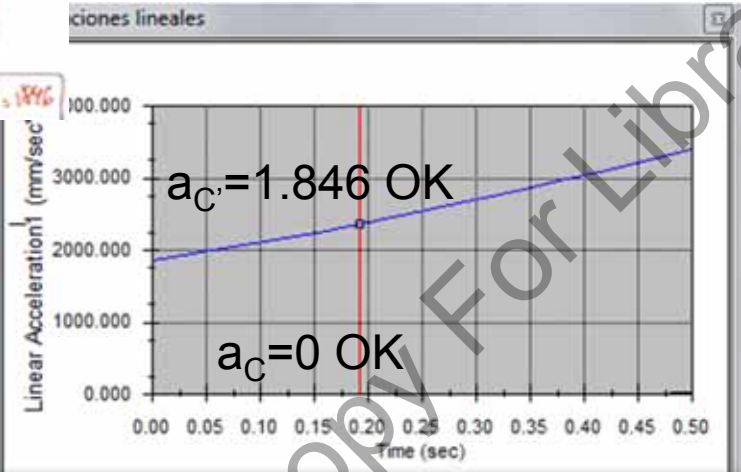


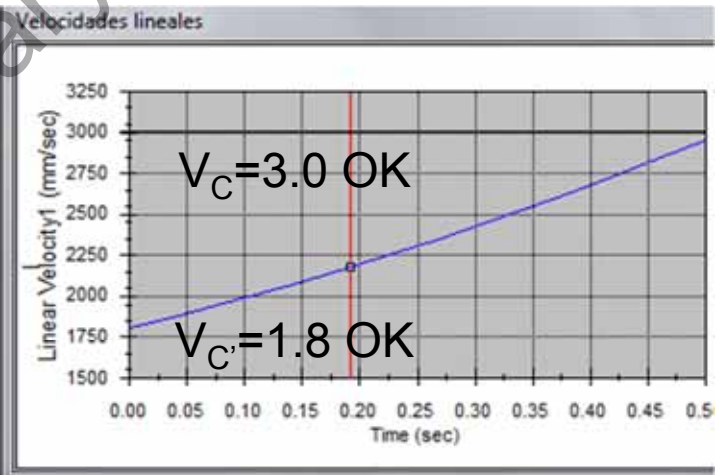
Calcular también cuando está vertical:

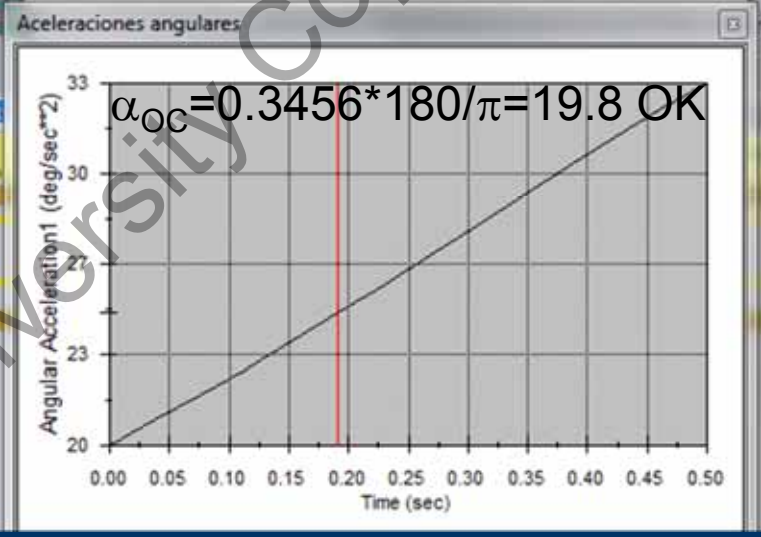
ω=1[r/s]↺, $V_{C'}$=3[m/s] ←, $V_{C'C}$=0[m/s];

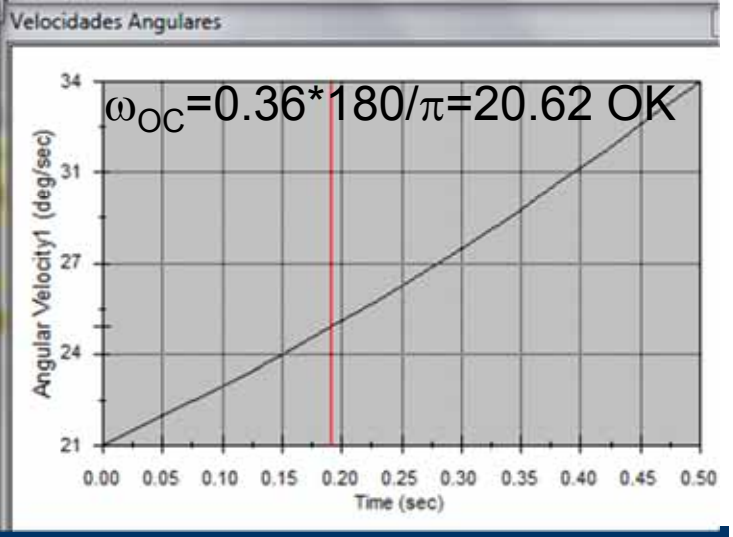
$a_{C'}$=3[m/s^2]↓, $a_{C'C}$=3[m/s^2]↑



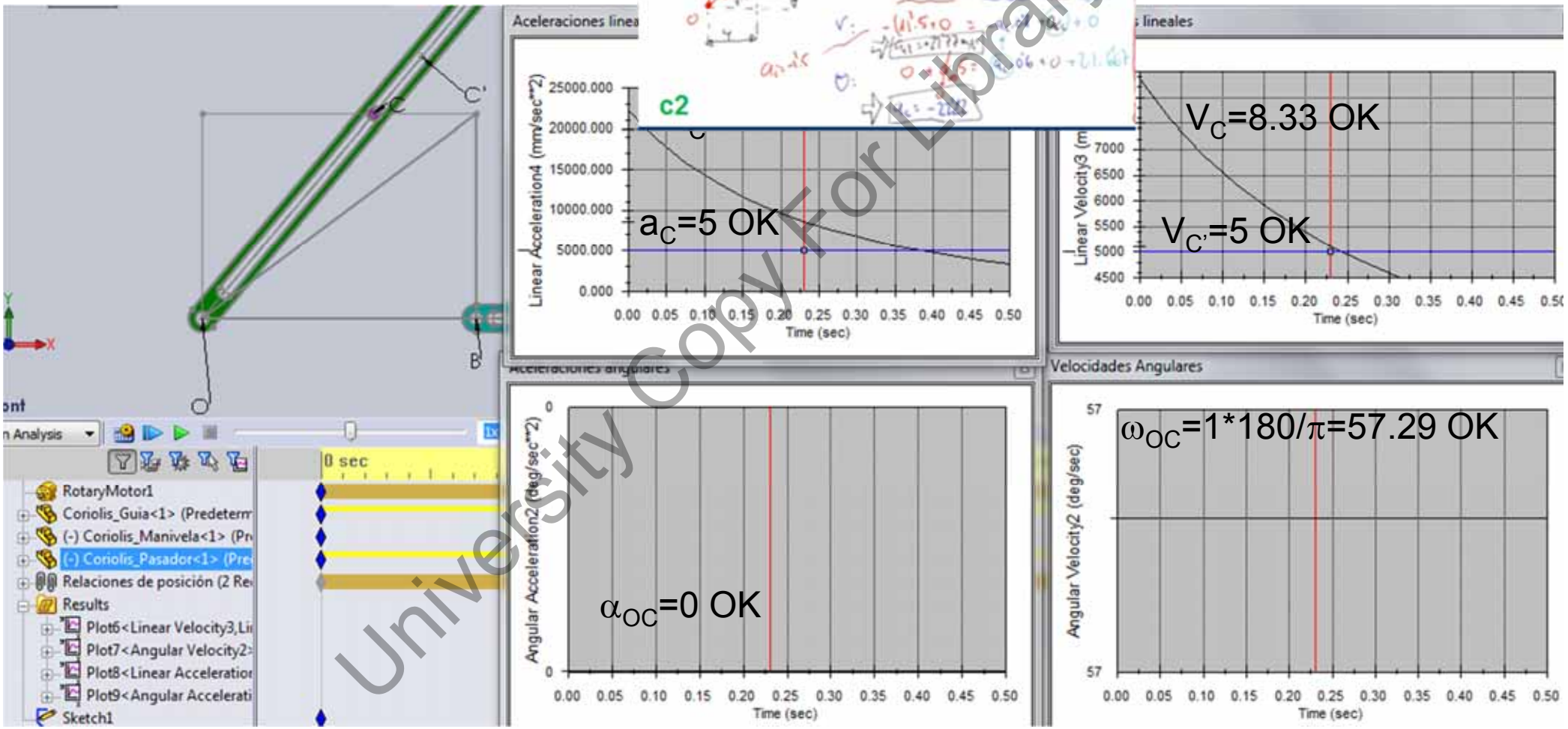




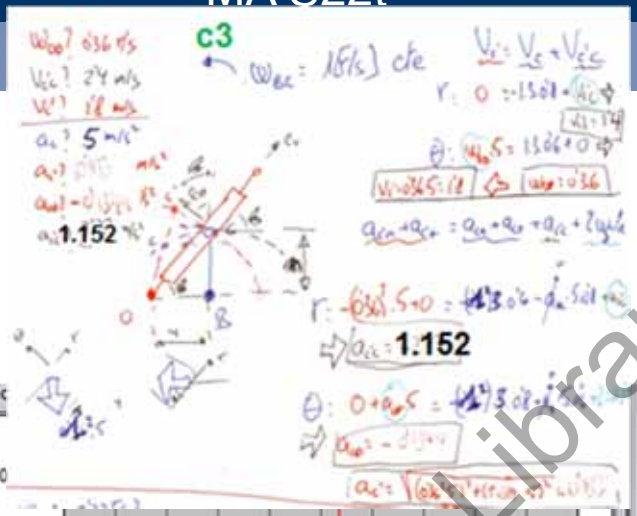


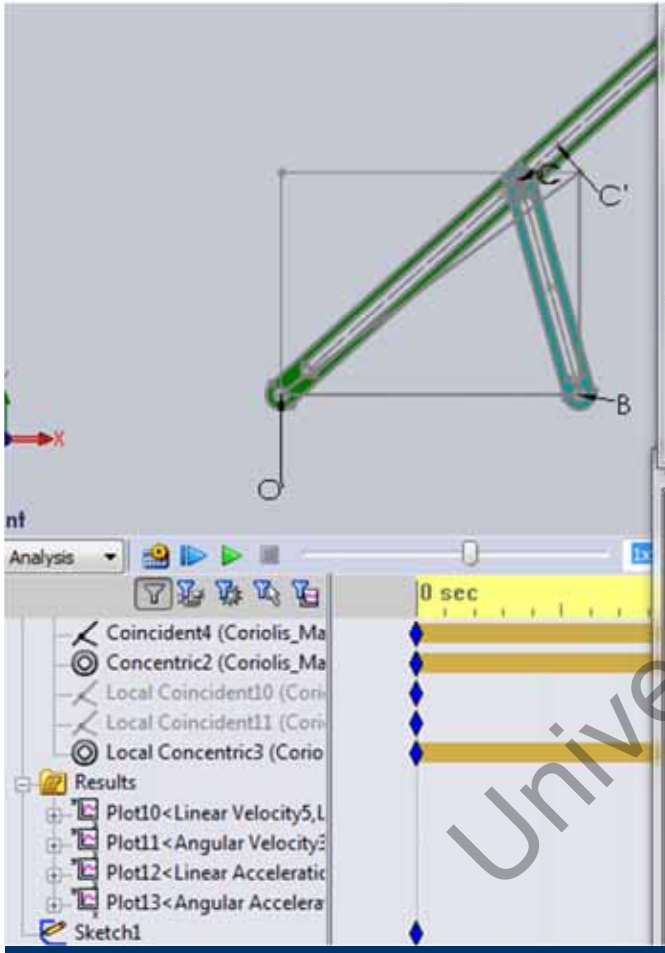


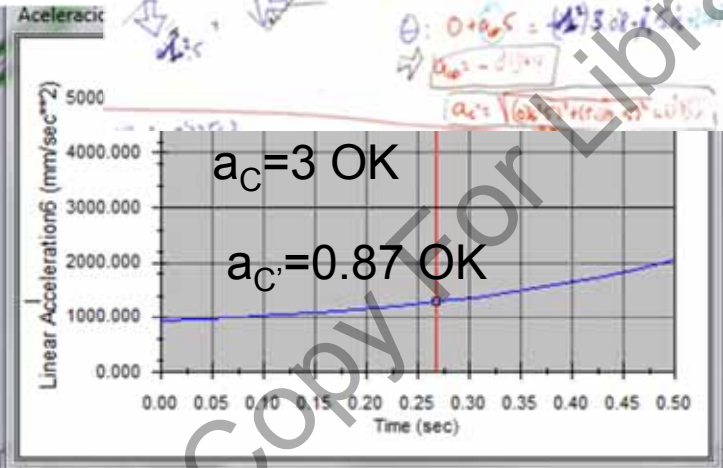
University Copy For Library Use

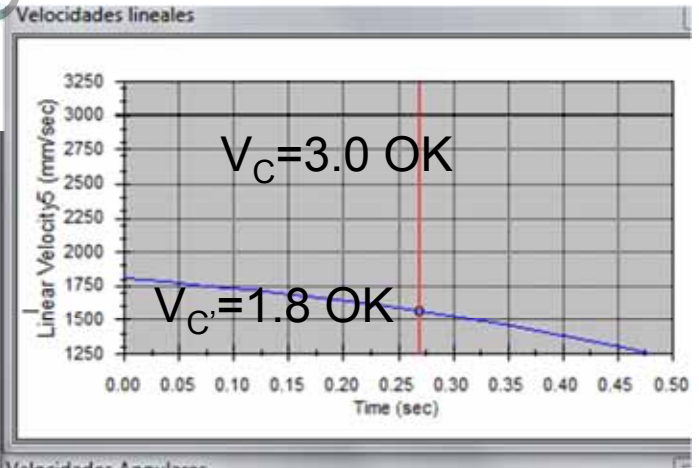


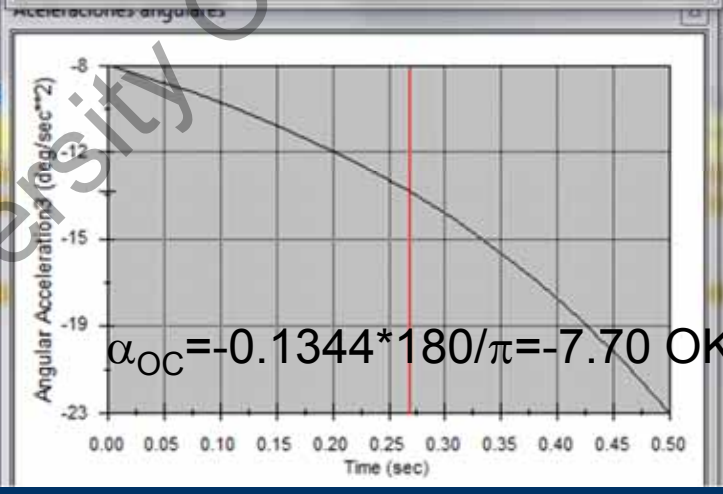
University Copy For Library Use

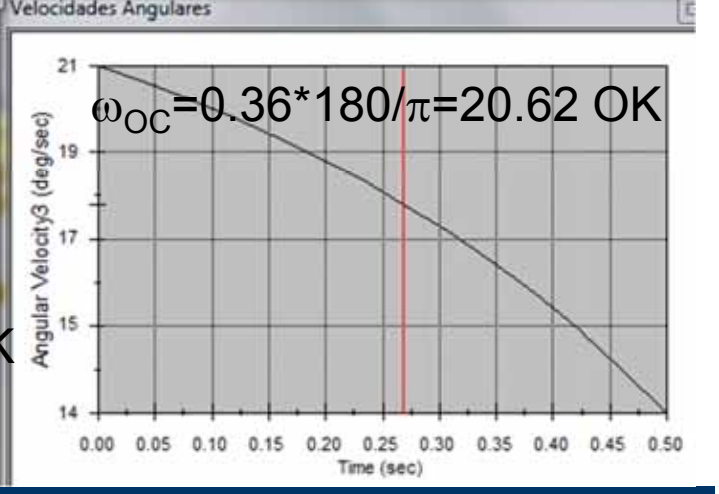




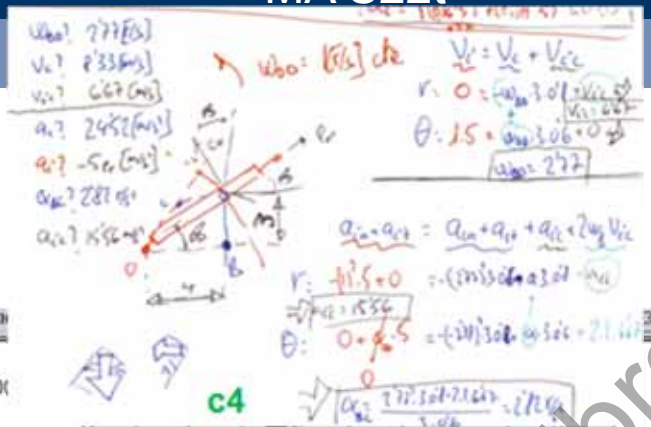


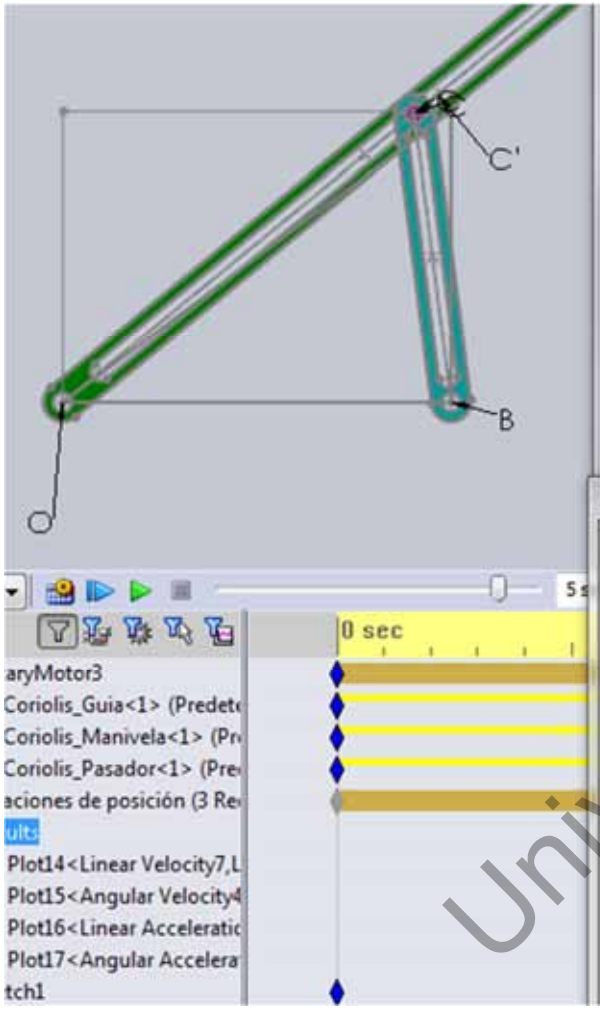


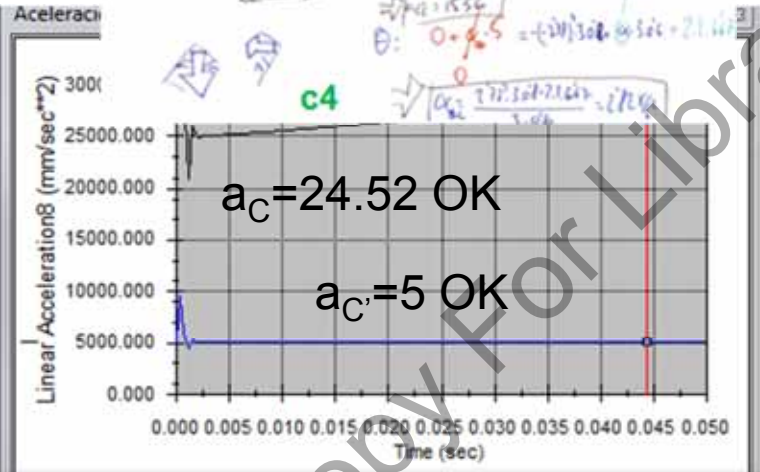


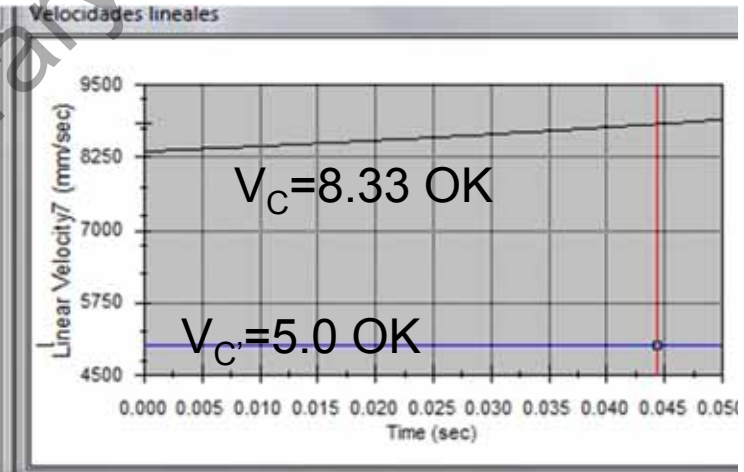


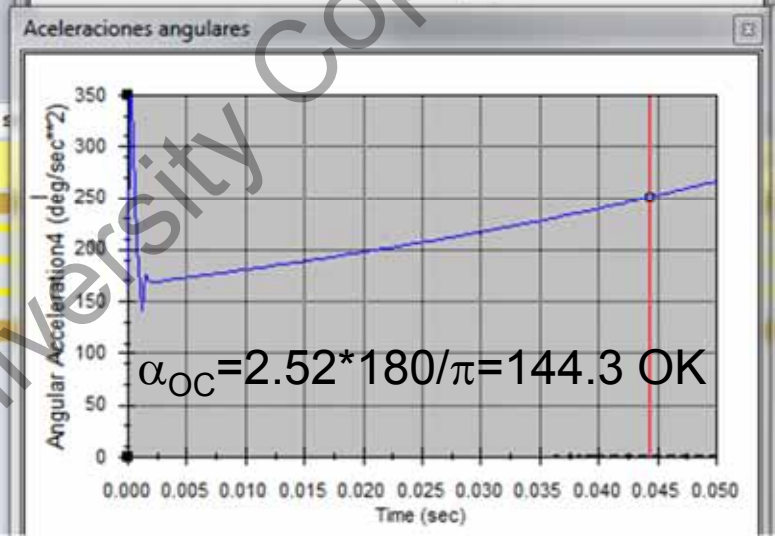
University Copy For Library Use

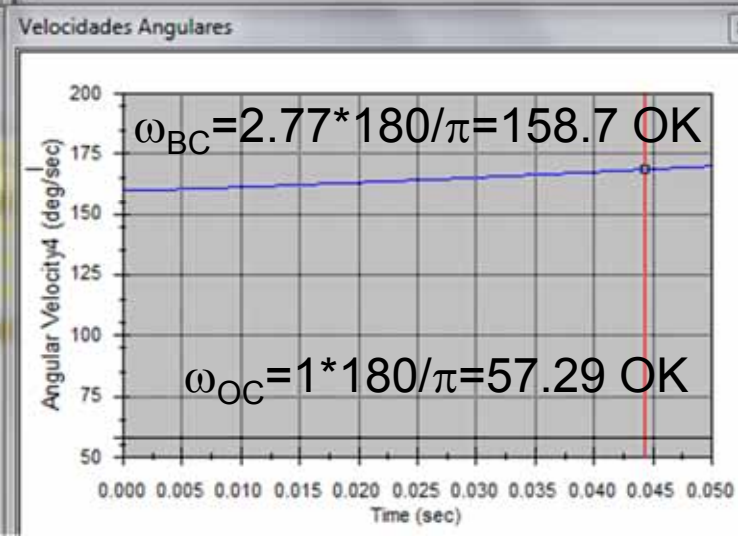






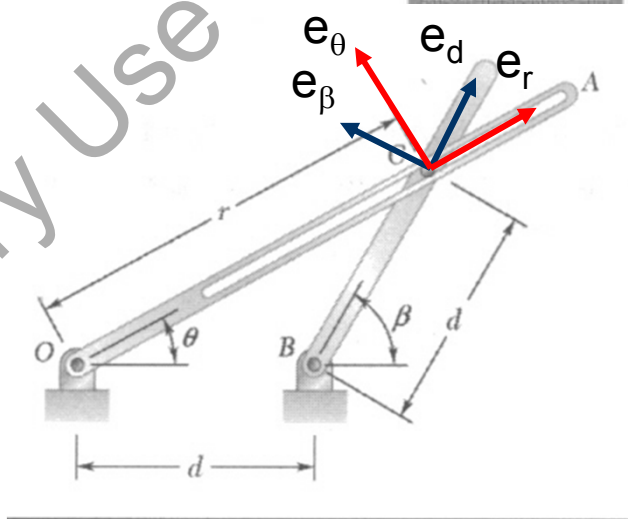






University Copy For Library Use

- Beer 11_170.



El punto C de barra B desliza por barra OA. Barra B está rotando con velocidad angular constante $\omega=\beta'$. Determinar para $\beta=60º$ (a) r' y θ', (b) r'' y θ''.

Primero ponemos la velocidad de C en función de la barra B en que "d" es constante con tangencial-β, normal-d

$v_\beta=d\beta'=d\omega$ $\quad$ $v_d=d'=0$

$a_\beta=d\beta''+2d'\beta'=0$ $\quad$ $a_d=d''-d\beta'^2=-d\omega^2$.

Calculamos la velocidad de C en función de barra A tangencial-θ y normal-r:

$v_\theta=r\theta'=d\omega\sin(90+\beta-\theta)$; $\quad$ $v_r=r'=d\omega\cos(90+\beta-\theta)$

$a_\theta=r\theta''+2r'\theta'=-d\omega^2\sin(\beta-\theta)$; $\quad$ $a_r=r''-r\theta'^2=-d\omega^2\cos(\beta-\theta)$

$$v=\dot{r}_{P/O}=\dot{r}e_r+r\dot{\theta}e_\theta;$$

$$a=\left(\ddot{r}-r\left(\dot{\theta}\right)^2\right)e_r+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)e_\theta$$

Relacionamos r y d para el ángulo $\beta=60º$

$d\sin\beta=r\sin\theta$; $\quad$ $d+d\cos\beta=r\cos\theta$; ⇨ $\quad$ si $\beta=60º$ ⇨ $r=d\sqrt{3}$ y $\theta=30º$

(a) de v_r: $r'=d\omega\cos(90+\beta-\theta)=d\omega\cos(90+60-30)=-0.5d\omega$.

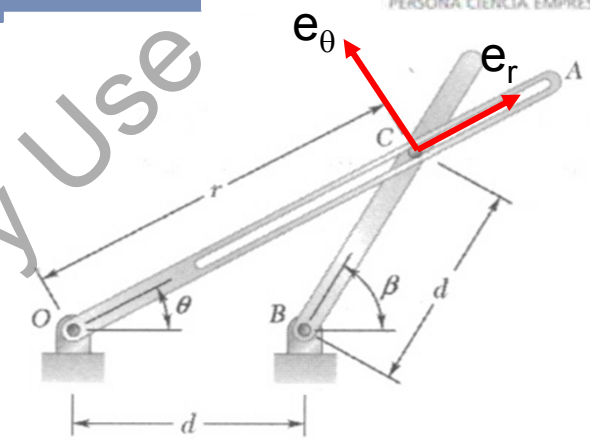
de v_θ: $\theta'=d\omega\sin(90+\beta-\theta)/r=d\omega\sin(90+60-30)/(d\sqrt{3})=0.5\omega$.

(b) de a_r: $r''=r\theta'^2-d\omega^2\cos(\beta-\theta)=d\sqrt{3}(0.5\omega)^2-d\omega^2\cos(60-30)=-0.25\sqrt{3}d\omega^2$.

de a_θ: $\theta''=(-d\omega^2\sin(\beta-\theta)-2r'\theta')/r=(-d\omega^2\sin(30º)+0.5d\omega^2)/(d\sqrt{3})=0$.

University Copy For Library Use

- Beer 11_170.



Si repetimos con ecuaciones de Coriolis con θ=β/2

$$v_{C'} = v_C + v_{C'C}$$

$$a_{C'} = a_C + a_{C'C} + 2\omega_{guiaOC'} \times v_{C'C}$$

$$r: 0 = -d\dot{\beta}\sin(\beta-\theta) + v_{C'C}$$

$$\theta: r\dot{\theta} = d\dot{\beta}\cos(\beta-\theta) + 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_{C'C} = d\dot{\beta}\sin(\beta-\theta) = d\dot{\beta}\sin(\beta/2) \\ \dot{\theta} = d\dot{\beta}\cos(\beta-\theta)/r = d\dot{\beta}\cos(\beta/2)/r \end{bmatrix}$$

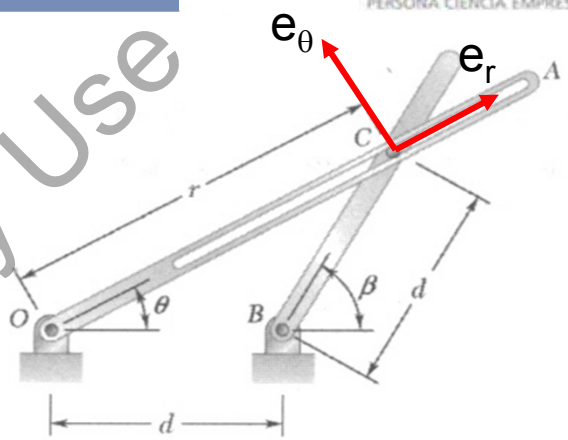
Para β=60º ⇨ r=d√3 y θ=30º

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_{C'C} = -\dot{r} = d\dot{\beta}0.5 \\ \dot{\theta} = \dot{\beta}\left(\sqrt{3}/2\right)/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

r'=-0.5dω.
θ'=0.5ω. OK

University Copy For Library Use

- Beer 11_170.



Si repetimos con ecuaciones de Coriolis con θ=β/2

$$v_{C'} = v_C + v_{C'C}$$

$$a_{C'} = a_C + a_{C'C} + 2\omega_{guiaOC'} \times v_{C'C}$$

$$r: -r\dot{\theta}^2 = -d\dot{\beta}^2\cos(\beta-\theta) - d\ddot{\beta}\sin(\beta-\theta) + a_{C'C} + 0$$

$$\theta: r\ddot{\theta} = -d\dot{\beta}^2\sin(\beta-\theta) + d\ddot{\beta}\cos(\beta-\theta) + 0 + 2\dot{\theta}v_{C'C}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_{C'C} = -\ddot{r} = -r\dot{\theta}^2 + d\dot{\beta}^2\cos(\beta-\theta) + d\ddot{\beta}\sin(\beta-\theta) \\ \ddot{\theta} = \left(-d\dot{\beta}^2\sin(\beta-\theta) + d\ddot{\beta}\cos(\beta-\theta) + \dot{\beta}d\dot{\beta}\sin(\beta-\theta)\right)/r \end{array}\right]$$

Para β=60º ⇨ r=d√3 y θ=30º

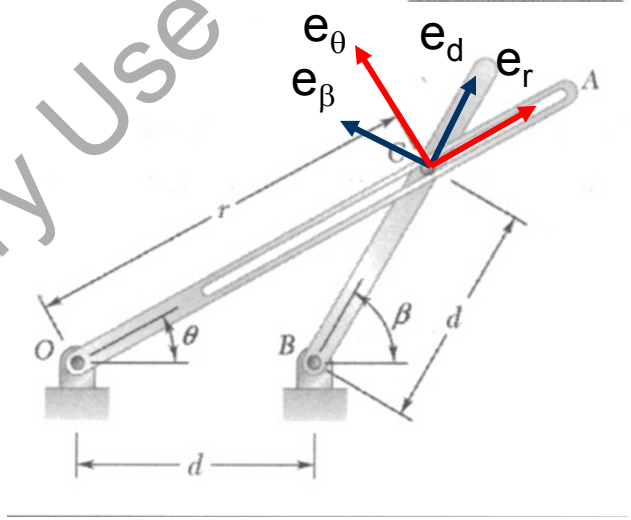
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_{C'C} = -\ddot{r} = -\dfrac{d\sqrt{3}\dot{\beta}^2}{4} + d\dot{\beta}^2\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \dfrac{d\sqrt{3}\dot{\beta}^2}{4} \\ \ddot{\theta} = \left(-\dfrac{d\dot{\beta}^2}{2} + \dfrac{\dot{\beta}d\dot{\beta}}{2}\right)/\left(d/\sqrt{3}\right) = 0 \end{array}\right]$$

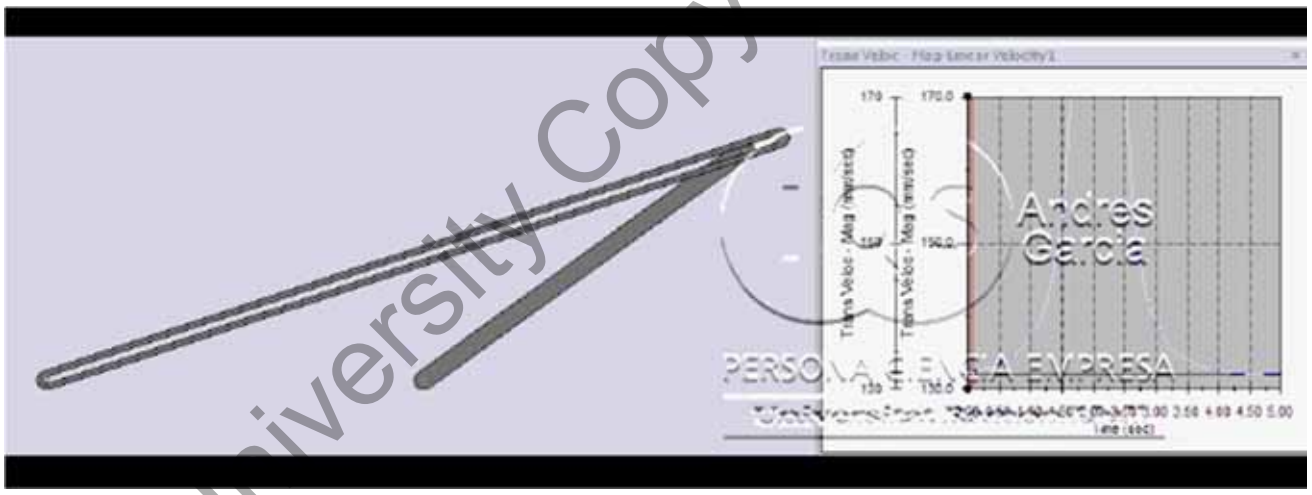
r''=-0.25√3dω².
θ''=0.

OK

University Copy For Library Use

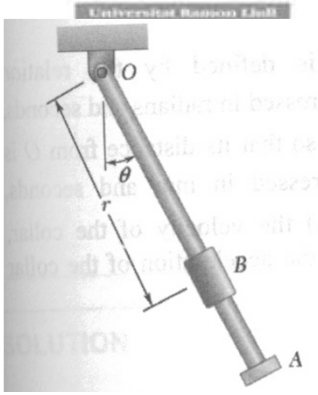
- Beer 11_170.





University Copy For Library Use

- Beer 11_161.



La barra OA rota un ángulo $\theta=0.5e^{-0.8t}\sin 3\pi t$ [rad] para t[s]. El collar B se desliza $r=0.2+1.92t-6.72t^2+6.4t^3$ [m].Determinar para t=0.5[s] la velocidad y aceleración de B (a) absolutas y (b) relativas a la barra.

Primero calculamos cada derivada:

$r=0.2+1.92t-6.72t^2+6.4t^3$ $r'=1.92-13.44t+19.2t^2$ $r''=-13.44+38.4t$

$\theta=0.5e^{-0.8t}\sin 3\pi t$ $\theta'=-0.4e^{-0.8t}\sin 3\pi t+1.5\pi e^{-0.8t}\cos 3\pi t$ $\theta''=0.32e^{-0.8t}\sin 3\pi t$ ...

...$-2.4\pi e^{-0.8t}\cos 3\pi t -4.5\pi^2 e^{-0.8t}\sin 3\pi t$

Sustituimos en t=0.5:

$r=0.28$ $r'=0$ $r''=5.76$

$\theta=-0.3351$ $\theta'=0.2681$ $\theta''=29.56$

(a) Calculamos velocidad y aceleración:

$v=r'e_r + r\theta'e_\theta = 0e_r + 0.0751e_\theta$ [m/s]

$a=(r''-r\theta'^2)e_r + (r\theta''+2r'\theta')e_\theta = 5.74e_r + 8.28e_\theta$ [m/s^2]

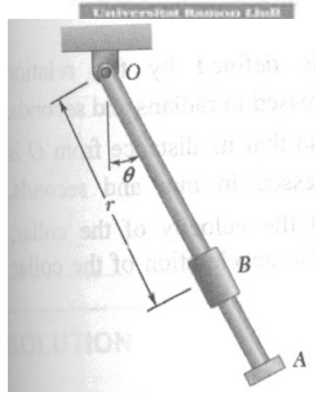
(b) Calculamos velocidad y aceleración respecto a la barra:

$v=r'e_r = 0e_r$ [m/s]

$a=(r'')e_r = 5.76e_r$ [m/s^2]

University Copy For Library Use

- Beer 11_161 (2/2).



Beer_11_161

Derive r,q .

```
> restart;
> r0:=0.2+1.92*t-6.72*t^2+6.4*t^3;r1:=diff(r0,t);r2:=diff(r1,t);
```

$$r0 := .2 + 1.92\,t - 6.72\,t^2 + 6.4\,t^3$$

$$r1 := 1.92 - 13.44\,t + 19.2\,t^2$$

$$r2 := -13.44 + 38.4\,t$$

```
> q0:=0.5*exp(-0.8*t)*sin(3*Pi*t);q1:=diff(q0,t);q2:=simplify(diff(q1,t),log);
```

$$q0 := .5\,e^{(-.8\,t)}\sin(3\,\pi\,t)$$

$$q1 := -.40\,e^{(-.8\,t)}\sin(3\,\pi\,t) + 1.5\,e^{(-.8\,t)}\cos(3\,\pi\,t)\,\pi$$

$$q2 := .320\,e^{(-.8\,t)}\sin(3\,\pi\,t) - 2.40\,e^{(-.8\,t)}\cos(3\,\pi\,t)\,\pi - 4.5\,e^{(-.8\,t)}\sin(3\,\pi\,t)\,\pi^2$$

```
> v:=r1*er+r0*q1*eq; a:=(r2-r0*q1^2)*er+(r0*q2+2*r1*q1)*eq;
```

$$v := (1.92 - 13.44\,t + 19.2\,t^2)\,er + (.2 + 1.92\,t - 6.72\,t^2 + 6.4\,t^3)(-.40\,e^{(-.8\,t)}\sin(3\,\pi\,t) + 1.5\,e^{(-.8\,t)}\cos(3\,\pi\,t)\,\pi)\,eq$$

$$a := \left(-13.44 + 38.4\,t - (.2 + 1.92\,t - 6.72\,t^2 + 6.4\,t^3)(-.40\,e^{(-.8\,t)}\sin(3\,\pi\,t) + 1.5\,e^{(-.8\,t)}\cos(3\,\pi\,t)\,\pi)^2\right)er$$
$$+ ((.2 + 1.92\,t - 6.72\,t^2 + 6.4\,t^3)(.320\,e^{(-.8\,t)}\sin(3\,\pi\,t) - 2.40\,e^{(-.8\,t)}\cos(3\,\pi\,t)\,\pi - 4.5\,e^{(-.8\,t)}\sin(3\,\pi\,t)\,\pi^2) + 2(1.92 - 13.44\,t + 19.2\,t^2)(-.40\,e^{(-.8\,t)}\sin(3\,\pi\,t) + 1.5\,e^{(-.8\,t)}\cos(3\,\pi\,t)\,\pi))\,eq$$

```
> r0i:=subs(t=0.5,r0);r1i:=subs(t=0.5,r1);r2i:=subs(t=0.5,r2);
```

$$r0i := .2800$$

$$r1i := 0.$$

$$r2i := 5.76$$

```
> q0i:=evalf(subs(t=0.5,q0));q1i:=evalf(subs(t=0.5,q1));q2i:=evalf(subs(t=0.5,q2));
```

$$q0i := -.3351600230$$

$$q1i := .2681280203$$

$$q2i := 29.55656913$$

```
> vi:=r1i*er+r0i*q1i*eq; ai:=(r2i-r0i*q1i^2)*er+(r0i*q2i+2*r1i*q1i)*eq;
```

$$vi := .07507584568\,eq$$

$$ai := 5.739870062\,er + 8.275839356\,eq$$

```
> vir:=r1i*er;air:=(r2i)*er;
```

$$vir := 0.$$

$$air := 5.76\,er$$

University Copy For Library Use

- Beer 11_160.

Dos satélites orbitan a d_1=190 y d_2=320 [km] de la tierra en el mismo plano. Si coinciden en la dirección radial en t=0 y sabemos que el radio de la tierra es R=6370 [km]: determinar cuando volverán a estar alineados.

En una órbita se ha de cumplir que la fuerza de atracción gravitatoria ha de estar en equilibrio con la fuerza centrífuga: $a_n=g*R^2/(R+d)^2$

La aceleración normal en una órbita circular se calcula: $a_n=v^2/(R+d)$

⇨ $v=R\sqrt{(g/(R+d)}$

$v_1=R\sqrt{(g/(R+d_1)}=7793$[m/s] ⇨$\omega_1=v_1/(R+d_1)=1.188e-3$[rad/s]

$v_2=R\sqrt{(g/(R+d_2)}=7716$[m/s] ⇨$\omega_2=v_2/(R+d_2)=1.153e-3$[rad/s]

v1[m/s]	v2[m/s]	w1[s-1]	w2[s-1]
7.792E+03	7.716E+03	1.188E-03	1.153E-03

Para que vuelvan a coincidir el ángulo ha de diferir de una vuelta:

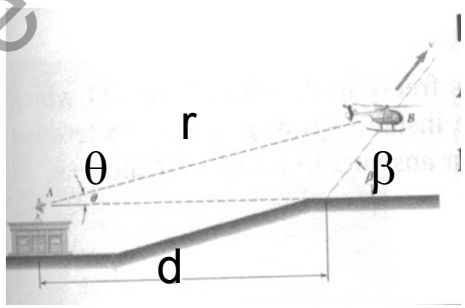
$\theta_1=\theta_2+2\pi$ ⇨ $\omega_1 t=\omega_2 t+2\pi$ ⇨$t=2\pi/(\omega_1-\omega_2)$= 182400[s.].

t[s]	t[h]
1.824E+05	5.066E+01

University Copy For Library Use

- Beer 11_169.

El helicóptero sube con ángulo constante β y es seguido por el radar colocado en punto A. Determinar la velocidad del helicóptero en función de los datos del radar d, β, θ y θ'.



Por regla de los senos:

$r/\sin(180-\beta)=d/\sin(\beta-\theta) \Rightarrow r=d*\sin\beta/\sin(\beta-\theta)$

Poner la velocidad en dirección al radar y tangencial:

$v_r=v*\cos(\beta-\theta)=r'$

$v_\theta=v*\sin(\beta-\theta)=r\theta' = d*\sin\beta/\sin(\beta-\theta)*\theta'$

$\Rightarrow v=d*\sin\beta/\sin^2(\beta-\theta)*\theta'$

University Copy For Library Use

- Beer 11_178.

Tenemos la posición de una partícula en coordenadas cilíndricas: R=A/(t+1), θ=Bt y z=Ct/(t+1). Dar velocidad y aceleración para (a) t=0, (b) t=infinito.

Beer_11_178

Derive r,q .

```
> restart;
> r0:=A/(t+1);r1:=diff(r0,t);r2:=diff(r1,t);
```

$$r0 := \frac{A}{t+1}$$

$$r1 := -\frac{A}{(t+1)^2}$$

$$r2 := 2\frac{A}{(t+1)^3}$$

```
> q0:=B*t;q1:=diff(q0,t);q2:=simplify(diff(q1,t),log);
```

$$q0 := Bt$$

$$q1 := B$$

$$q2 := 0$$

```
> z0:=C*t/(t+1);z1:=diff(z0,t);z2:=simplify(diff(z1,t),log);
```

$$z0 := \frac{Ct}{t+1}$$

$$z1 := \frac{C}{t+1} - \frac{Ct}{(t+1)^2}$$

$$z2 := -2\frac{C}{(t+1)^2} + \frac{2Ct}{(t+1)^3}$$

```
> r0i:=evalf(subs(t=0,r0));r1i:=evalf(subs(t=0,r1));r2i:=evalf(subs(t=0,r2));
```

$$r0i := A$$

$$r1i := -1.A$$

$$r2i := 2.A$$

```
> q0i:=evalf(subs(t=0,q0));q1i:=evalf(subs(t=0,q1));q2i:=evalf(subs(t=0,q2));
```

$$q0i := 0.$$

$$q1i := B$$

$$q2i := 0.$$

```
> z0i:=evalf(subs(t=0,z0));z1i:=evalf(subs(t=0,z1));z2i:=evalf(subs(t=0,z2));
```

$$z0i := 0.$$

$$z1i := C$$

$$z2i := -2.C$$

```
> vi:=r1i*er+r0i*q1i*eq+z1i*ez;
  ai:=(r2i-r0i*q1i^2)*er+(r0i*q2i+2*r1i*q1i)*eq+z2i*ez;
```

$$vi := -1.A\,er + AB\,eq + C\,ez$$

$$ai := (2.A - AB^2)\,er - 2.AB\,eq - 2.C\,ez$$

```
> vim:=simplify((r1i)^2+(r0i*q1i)^2+(z1i)^2)^.5;
  aim:=simplify((r2i-r0i*q1i^2)^2+(r0i*q2i+2*r1i*q1i)^2+(z2i)^2)^.5;
```

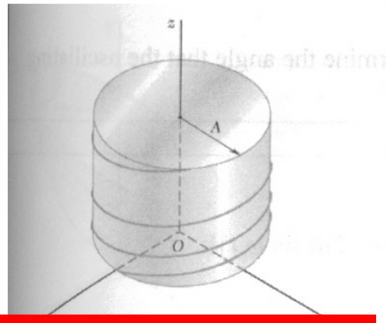
$$vim := (A^2 + A^2B^2 + C^2)^{.5}$$

$$aim := (4.A^2 + A^2B^4 + 4.C^2)^{.5}$$

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 11_179.

La partícula de la figura se mueve con R=A, $\theta=2\pi t$ y $z=At^2/4$. Determinar velocidad y aceleración.



Beer_11_179

Solución:

$v=0.5A\sqrt{(16\pi^2+t^2)}$

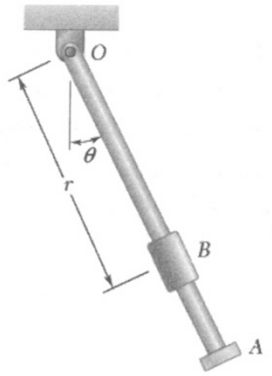
$a=0.5A\sqrt{(64\pi^4+1)}$

```
> vim:=simplify((r1i)^2+(r0i*q1i)^2+(z1i)^2)^.5;
  aim:=simplify((r2i-r0i*q1i^2)^2+(r0i*q2i+2*r1i*q1i)^2+(z2i)^2)^.5;

                    vim := (39.47841761 A^2 + .2500000000 A^2 t^2)^.5

                                  aim := 39.48158377 (A^2)^.5
```

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 11_162.

La barra oscila con $\theta=(4/\pi)\sin\pi t$ y el collar con r=10/(t+6). Hallar para t=1s. aceleración y velocidad del collar (a) absoluta y (b) relativa a la barra.



Beer_11_162

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios de Coriolis.

University Copy For Library Use

S23t.- Cinética de partículas.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ....

- Repaso sesión anterior.
  - Ejercicios de coriolis.

University Copy For Library Use

• Objetivos sesión.

➢ Introducción a la cinética de partículas en que las fuerzas conducen a aceleraciones de las partículas.

➢ Comprender que las fuerzas inerciales realizan momentos que se han de tener en cuenta.

➢ Comprender que podemos hacer dos diagramas para explicar F=ma o unos sólo en que dibujemos F-ma=0.

➢ Realizar un ejercicio básico descomponiendo los cuerpos para calcular reacciones.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Teoría.

Para estudiar la cinética de partículas debemos considerar las ecuaciones de equilibrio considerando las fuerzas inerciales:

$\Sigma F=0=$Fuerzas aplicadas + Fuerzas inerciales + Reacciones en apoyos.

Comúnmente se expresa:

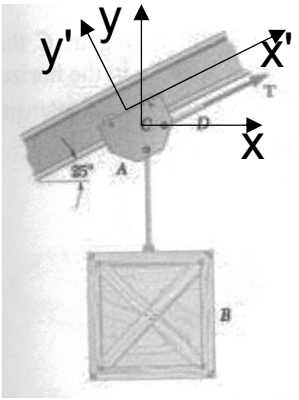
$\Sigma F=m*a$

En realidad la ecuación es:

$\Sigma F=\delta(m*v)/\delta t$. Esta ecuación coincide si la masa es constante.

University Copy For Library Use

• Beer 12_033.

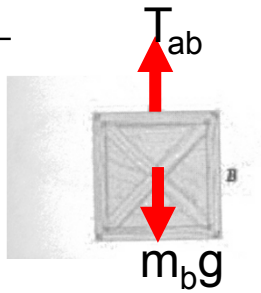


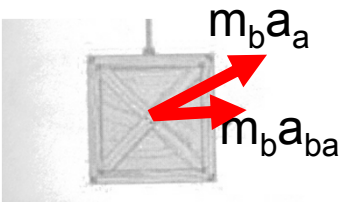
Una masa B de 250[kg] se cuelga de un carro A de 20[kg] en una guía inclinada 25º. Se estira de A con una fuerza T y sabemos que en el instantee de la figura la aceleración es de 0.4[m/s^2]. Determinar (a) la aceleración de B respecto a A y (b) la tensión del cable T.

Equilibrio B:

x: $m_b a_a \cos(25º)+m_b \mathbf{a_{ba}}=0 \Rightarrow a_{ba}=-a_a\cos(25º) = -0.3625$ [m/s^2]←

y: $\mathbf{T_{ab}}-m_b g-m_b a_a \sin(25º)=0 \Rightarrow T_{ab}=m_b(g+a_a\sin(25º)) = 2494$ [N]

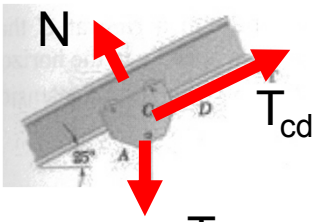


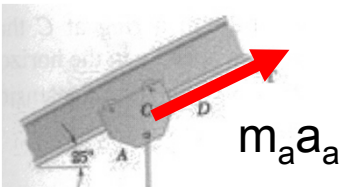


Equilibrio A:

y': $\mathbf{N}-T_{ab}*\cos(25º)-m_a g*\cos(25º)=0 \Rightarrow$

$N=m_b(g+a_a\sin(25º))\cos(25º)+m_a g*\cos(25º)=2438$[N]





x': $-m_a a_a+\mathbf{T_{cd}}-(m_a g+T_{ab})\sin(25º)=0 \Rightarrow$

$T_{cd}=m_a a_a+(m_a g+T_{ab})\sin(25º)=1145$[N]

Sol Beer:

$a_{ba}=-0.362$[m/s^2] ←

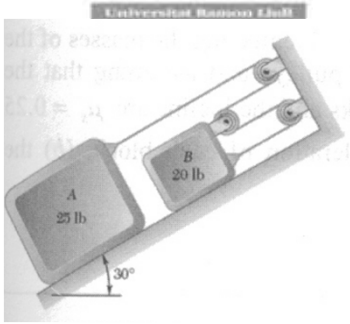
$T_{cd}=1145$[N]

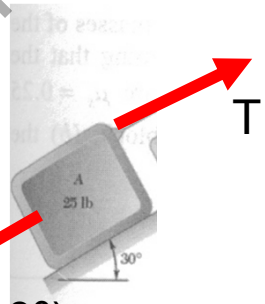
		ma[kg]	mb[kg]	a[º]	aa[m/s2]	aba[m/s2]	Tab[N]	N[N]	Tcd[N]
S34t	ej.-Bee	2.000E+01	2.500E+02	2.500E+01	4.000E-01	3.625E-01	2.494E+03	2.438E+03	1.145E+03

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 12_013.

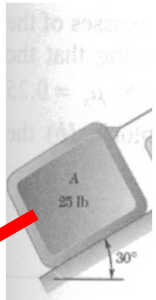
Dos bloques A de 25[kg] y B de 20[kg] en reposo empiezan a deslizar sin fricción. Calcular (a) la aceleración de cada bloque y (b) la tensión en el cable.



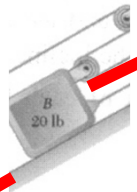


T

$m_A g \sin(30º)$

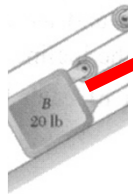


$m_A a_A = m_A 3a_B$



3T

$m_B g \sin(30º)$



$m_B a_B$

Sol:

$a_a = 0.33673 * g \ [m/s^2]$;

$a_b = -a_a/3 \ [m/s^2]$;

$T = 25*(\sin(30º)-0.33673)*g \ [N]$;

University Copy For Library Use

- Beer 12_005.

Un coche frena de 110[km/h] a cero necesitando 51[m] para la frenada con ABS. El coeficiente de fricción dinámico μ_d es 0.8 el estático μ_s. Determinar (a) coeficientes de fricción (b) distancia de frenada sin ABS.

(a) Sin deslizar: $\mu_s mg=-ma \Rightarrow a= -\mu_s g \Rightarrow \mu_s=-a/g$
$a=0.5(v_2^2-v_1^2)/(x_2-x_1)=0.5(0-(110/3.6)^2)/51=-9.153\ [m/s^2]$
$\Rightarrow \mu_s=9.153/9.81=0.933$

(b) Si derrapa: $\mu_d mg=-ma \Rightarrow a= -\mu_d g = -0.8*0.933*9.81= -7.323\ [m/s^2] \Rightarrow$
$(x_2-x_1)=0.5(v_2^2-v_1^2)/a=0.5(0-(110/3.6)^2)/(-7.323)= 63.80\ [m]$

University Copy For Library Use

• Ejercicio frenada con centro masas.

Para el coche anterior que frena de 110[km/h] a cero necesitando 51[m] para la frenada con ABS y con el coeficiente de estático μ_s calculado. Si la distancia entre ruedas es de 2[m] y el centro de gravedad del coche está en el centro a 0.5[m] de altura: Determinar (a) fuerzas en cada rueda para poder calcular frenada usando ABS.

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow ma=\mu R_a+\mu R_p$.

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow mg=R_a+R_p$.

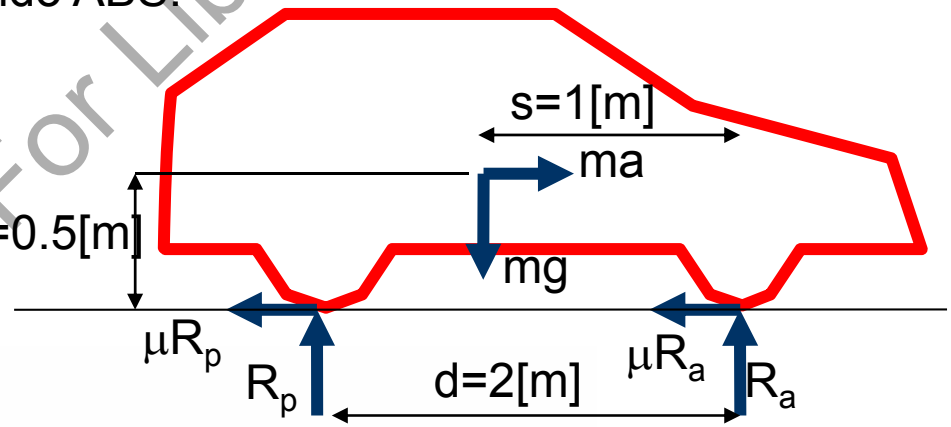
$\Sigma M_{za}=0 \Rightarrow ma*h+R_p*d=mg*s$.

$a=\mu g$.

$R_p=mg(s-\mu h)/d$

$R_a=mg(d-s+\mu h)/d$

.



Breaking distance

Assume m, g, d, h.

```
> restart;
> eq0:={m*a=nu*ra+nu*rp,m*g=ra+rp,m*g*s=rp*d+ma*h};
> sols=solve(eq0,{a,ra,rp});
```

$$eq0 := \{m\,a = \nu\,ra + \nu\,rp,\ m\,g = ra + rp,\ m\,g\,s = rp\,d + ma\,h\}$$

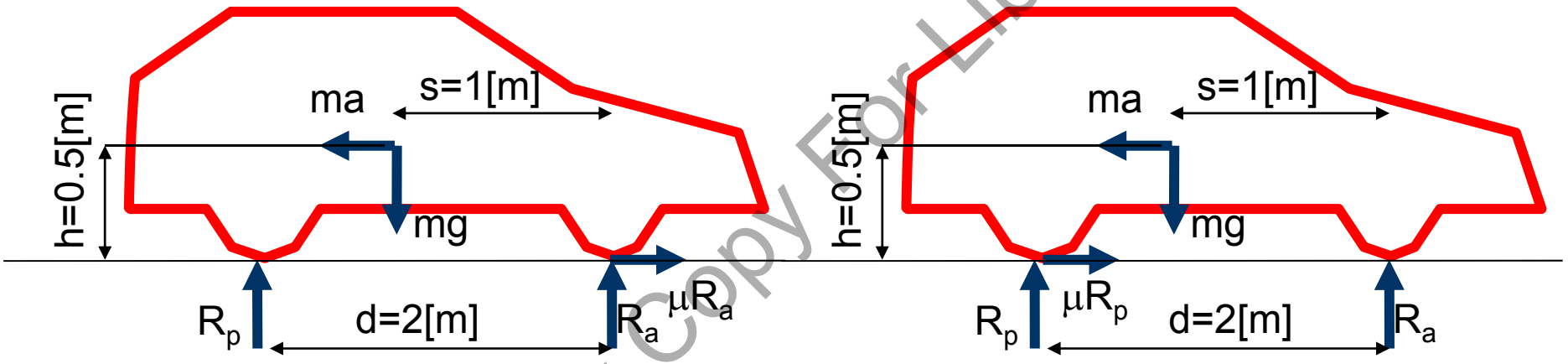
$$sols = \{ra = -\frac{-m\,g\,d + m\,g\,s - ma\,h}{d},\ rp = \frac{m\,g\,s - ma\,h}{d},\ a = \nu\,g\}$$

Como la aceleración es idéntica al caso en que no se considera la altura y distancia entre ejes la distancia recorrida será idéntica. Hay que comprobar que R_p no sea una fuerza negativa. $R_p>0$ si $s>\mu h$. Objetivo diseño tener una altura centro masas muy baja.

University Copy For Library Use

- Ejercicio aceleración con centro masas para casa.

Calcular la aceleración máxima del coche de la figura para no derrapar con tracción delantera y tracción trasera.



University Copy For Library Use

- Agulló F1?.

Un tren de 10000 [kg] de peso y 100 [m] de largo de carga circula a 10[m/s] mientras le va cayendo el trigo en los vagones desde una cinta a un ratio de 100 [kg/m]. Calcular la fuerza que ha de hacer la máquina tractora para mantener la velocidad constante durante el proceso de carga.

$\Sigma F=\delta(m*v)/\delta t$

Por lo tanto como la velocidad es constante la fuerza se calcula se calcula como la derivada de la masa respecto al tiempo multiplicado por la velocidad.

F= (100[kg/m]*10[m/s])*10[m/s]=10000 [N] = 10 [kN]

University Copy For Library Use

- Beer 12_006.

Un cohete prototipo de 100 gramos se lanza verticalmente con una fuerza de 10[N] de 0 a 1 segundos en que un fallo electrónico lo deja sin propulsión. Determinar (a) la altura alcanzada y (b) el tiempo para llegar a dicha altura.

Fase inicial: $a=F/m-g= 90.19[m/s^2]$

Para t=1[s] $v=a*t=90.19[m/s]$; $y=0.5*a*t^2=45.095[m]$;

Resto vuelo: $a=-g=-9.81[m/s^2]$

Punto más alto v=0 $0=90.19-9.81*(t-1)$ ⇨

(b) t=10.19 [s]

(a) $y=45.095-(0^2-90.19^2)/2g= 45.095+414.595= 460[m]$

Sol:

h=460[m]

t=10.19[s.]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 12_009.

Un paquete de 40[kg] descansa en un plano inclinado 20º y recibe el impulso de una fuerza P inclinada -30º. Calcular la fuerza P (a) para que no caiga y (b) si sabemos que el paquete a los 4 segundos a subido 10 metros por la rampa. Los coeficientes de fricción son: estático 0.30 y dinámico 0.25.

Sol:

P_s=593[N];

P_d=612[N];

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 12_011.

Un camión viaja a 90[km/h] y frena de la siguiente forma: tractora de 6800[kg] con 16[kN] y remolque de 7900[kg] con 60[kN]. Calcular (a) distancia de frenado y (b) fuerza en el anclaje entre tractora y remolque.

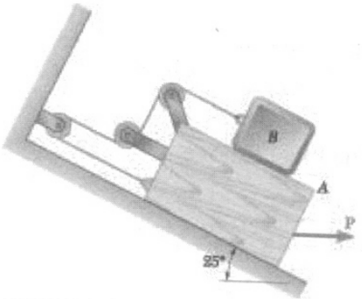
Sol:

distancia=60.4[m];

F_a=19.16[kN];

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 12_016.



Los bloques A de 80[N] y B de 16[N] con coeficientes de fricción estático 0.2 y dinámico 0.15 reciben una fuerza en A de P=10[N]. Calcular (a) la aceleración del bloque B y (b) la tensión de la cuerda.

Sol:

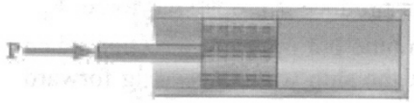
a_a=0.20149*g [m/s^2];

a_b=-a_a [m/s^2];

T=16*(sin(25º)+0.15*cos(25º)+0.20149)*g [N];

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 12_025.



Un pistón recibe una fuerza constante P. El pistón se mueve y desplaza el aceite que sale por orificios provocando una fuerza en el pistón F=kv en que v es la velocidad del pistón. Calcular la ecuación de posición, velocidad y aceleración respecto al tiempo empezando en t=, x=0 y v=0.

Sol:

$v=P/k*(1-e^{-(kt/m)});$

$x=Pt/k-P/m*(1-e^{-(kt/m)});$

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Primeros ejercicios de cinética de punto material.

University Copy For Library Use

S24t.- Ejercicios de cinética de partículas con rotaciones.

Mejora 1415 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.

➢ Introducción a la cinética de partículas en movimientos rectilíneos.

University Copy For Library Use

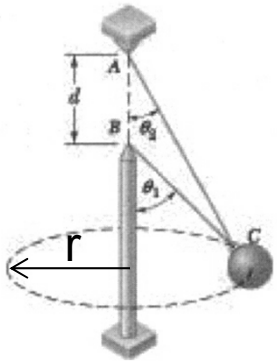
Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Objetivos sesión.

➢ Realización de ejercicios de cinética de partículas para comprender las implicaciones de movimiento relativo en 2D y en 3D en la resolución de posiciones de equilibrio centrífugo/centrípeto.

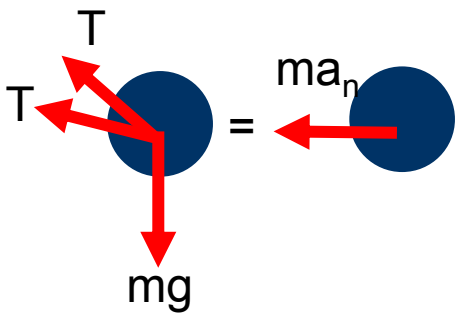
University Copy For Library Use

- Beer 12_034.



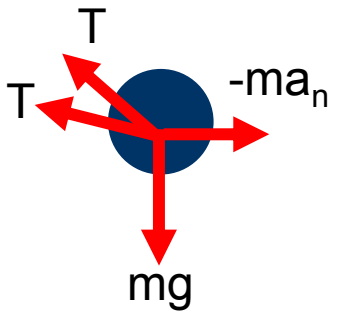
Una esfera de 5 [kg] se cuelga de un anillo que pasa por un cable ABC de 2 metros. Se le hace girar con una velocidad v y se comprueba que los ángulos θ_1=60º y θ_2=30º. Dar distancia "d" y velocidad "v" si el cable tiene la misma tensión "T" en todos sus puntos.

Por geometría teniendo un radio "r" la longitud del cable es:
$L=r/\sin\theta_1+r/\sin\theta_2$.
Por lo tanto $r=L\sin\theta_1\sin\theta_2/(\sin\theta_1+\sin\theta_2)$



Equilibrio:
ΣF_y: $T\cos\theta_1+T\cos\theta_2-mg=0 \Rightarrow T=mg/(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$
ΣF_x: $T\sin\theta_1+T\sin\theta_2-ma_n=0$
$a_n=v^2/r \Rightarrow v=\sqrt{(Lg\sin\theta_1\sin\theta_2/(\cos\theta_1+\cos\theta_2))}$

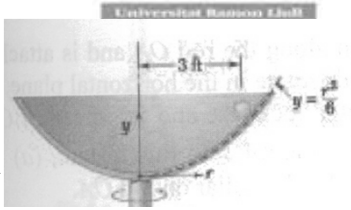
ó



Sol:
v=2.49 [m/s].

University Copy For Library Use

- Beer 12_038.



Una esfera de 2[N] se apoya en plataforma rotatoria de ecuación $y=r^2/6$ y está estable en un radio de 3[m]. Determinar (a) v y (b) fuerza normal sobre la esfera.

Encontramos la pendiente para r=3:

$y'=r/3 \Rightarrow y'_{r=3}=1$ y por tanto ángulo:

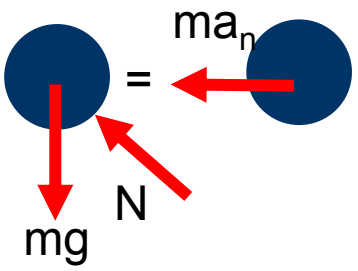
$\theta=\text{atan}(y')=45^o$

Equilibrio:

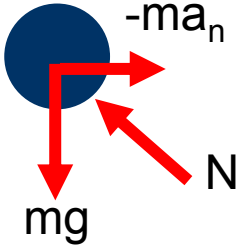
ΣF_y: $N\cos\theta-mg=0 \Rightarrow N=mg/(\cos\theta)$

ΣF_x: $N\sin\theta-ma_n=0$

$a_n=v^2/r \Rightarrow v=\sqrt{(rg\tan\theta)}$



ó



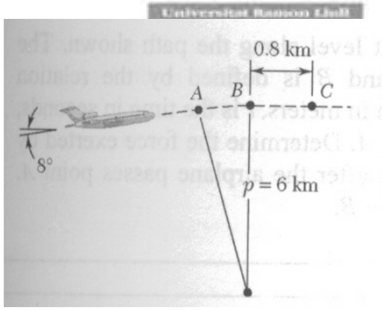
Sol:

(a) v= 5.42 [m/s]

(b) $N=2*\sqrt{2}=2.83$ [N]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 12_042.



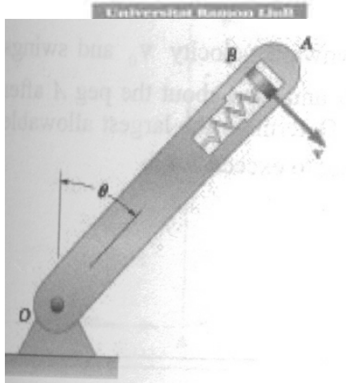
Un avión cambia de altitud con cambio de velocidad constate de punto A en que v=180[m/s] a C en que v=160[m/s]. Determinar las fuerzas que soporta un pasajero de 90[kg] al pasar por B.

Sol:

F_x=-186.8[N], F_y=882.9-449.1[N], Total: 434 [N]

University Copy For Library Use

- Beer 12_047.



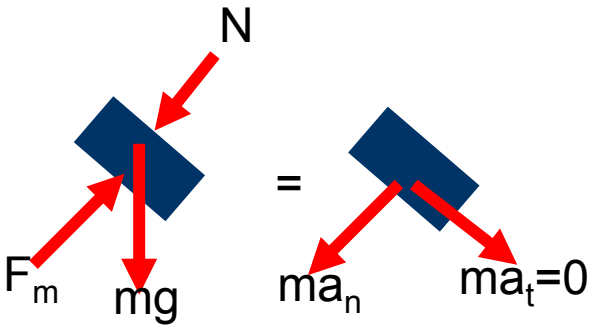
Un bloque de 0.220[kg] desliza en la barra que rota a velocidad constante. Cuando θ=180º el muelle se alarga al máximo y el bloque toca en A ejerciendo una fuerza de 3.5N sobre esta cara. Calcular los ángulos en que empieza y acaba el contacto entre bloque y cara A.

Posición θ:

ΣFy: $F_m - N - mg\cos\theta = ma_n = mv^2/r$.

Posición baja θ=180º, N=3.5:

$F_m - N + mg = mv^2/r \Rightarrow F_m = 3.5 - mg + mv^2/r$



Fuerza muelle constante F_m hasta que se despega en que N=0:

$F_m - 0 - mg\cos\theta = mv^2/r$. ⇨ $3.5 - mg - mg\cos\theta = 0$

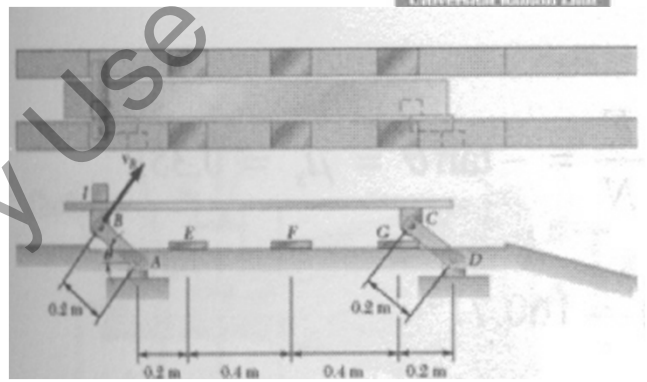
⇨ θ=acos(3.5/mg - 1) = 51.6º

Sol:

Contacto entre θ_1=51.6º y θ_2=360-51.6º

University Copy For Library Use

- Beer 12_061.



Si el coeficiente de fricción entre bloque I y mesa BC es μ_s=0.35 y μ_d=0.25. Hallar (a) la velocidad máxima de B para que no deslice el bloque y (b) los valores de los ángulos en que no habrá deslizamiento.

ΣF_x: $F_r = mv^2/r \cos\theta$.

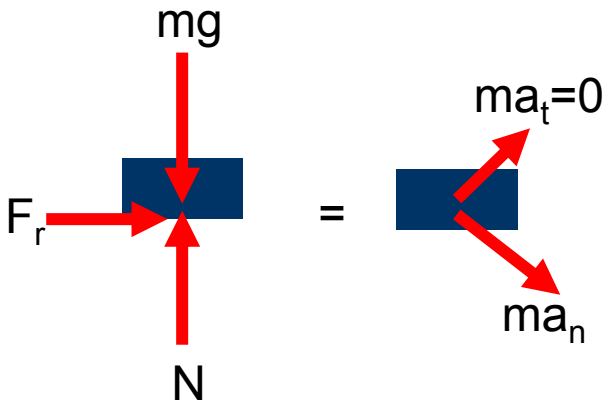
ΣF_y: $N - mg = -mv^2/r \sin\theta$.

$F_r/N = mv^2/r \cos\theta/(mg - mv^2/r \sin\theta) = \cos\theta/(gr/v^2 - \sin\theta)$

si $u = gr/v^2$ entonces:

$F_r/N = \cos\theta/(u - \sin\theta)$ que será máxima cuando:

$F_r/N = \pm\tan\theta$.



Además el deslizamiento comienza si $F_r/N = \mu_s$

θ=atan(0.35)= ±19.3º

Para este ángulo calculamos v:

$\tan(19.3º) = \cos(19.3º)/(gr/v^2 - \sin(19.3º)) \Rightarrow v = \sqrt{(gr\sin(19.3º))}$

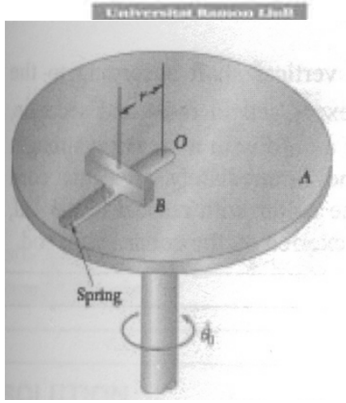
Sol:

(a) v_b=0.805[m/s]

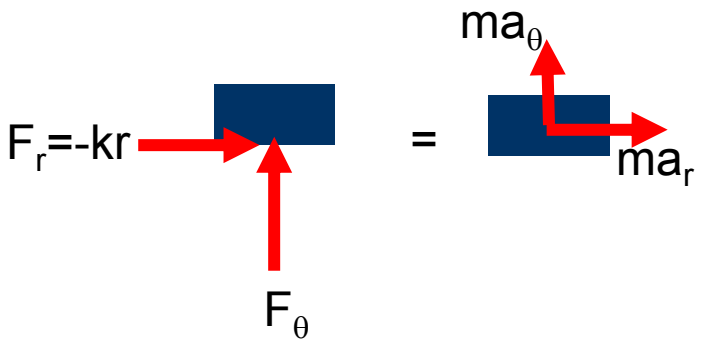
(b) no desliza entre θ_1=19.3 y θ_2=180-19.3=160.7º

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 12_070.



Un disco A rota a velocidad angular constante de 15[rad/s]. La deslizadera B de 0.230[kg] está sujeta por un muelle de constante k=60[N/m] en reposo para r=0. Sabeos que un instante la aceleración de la deslizadera respecto al disco es r''=-12[m/s^2] y la fuerza horizontal que ejerce el disco sobre la deslizadera es de 9[N]. Determinar en este instante (a) r y (b) r'.



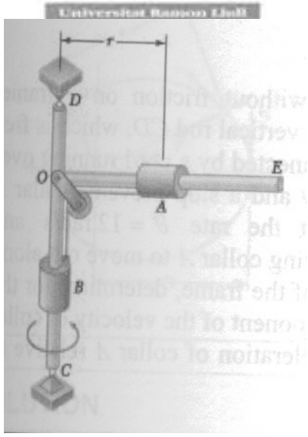
Sol:

(a) r=0.335[m];

(b) r'=1.304[m/s^2]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 12_092.



Dos collares A y B de 1.2[kg] cada uno deslizan sobre sus barras y están conectados por cable. El conjunto rota a 10[rad/s] y se deja libre A desde r=0.2[m] para que empiece a deslizar. Determinar (a) la tensión en el cable y (b) la velocidad del collar en r=0.3[m] usando conservación de momento angular: $(mrv)_1=(mrv)_2$

Sol:

(a) $T=m_b(r''+g)=-m_a(r''-r\theta'^2)=17.89[N]$

(b) $v_{\theta 2}=(m_a rr\theta')_1/(m_a r)_2=1.333[m/s]$

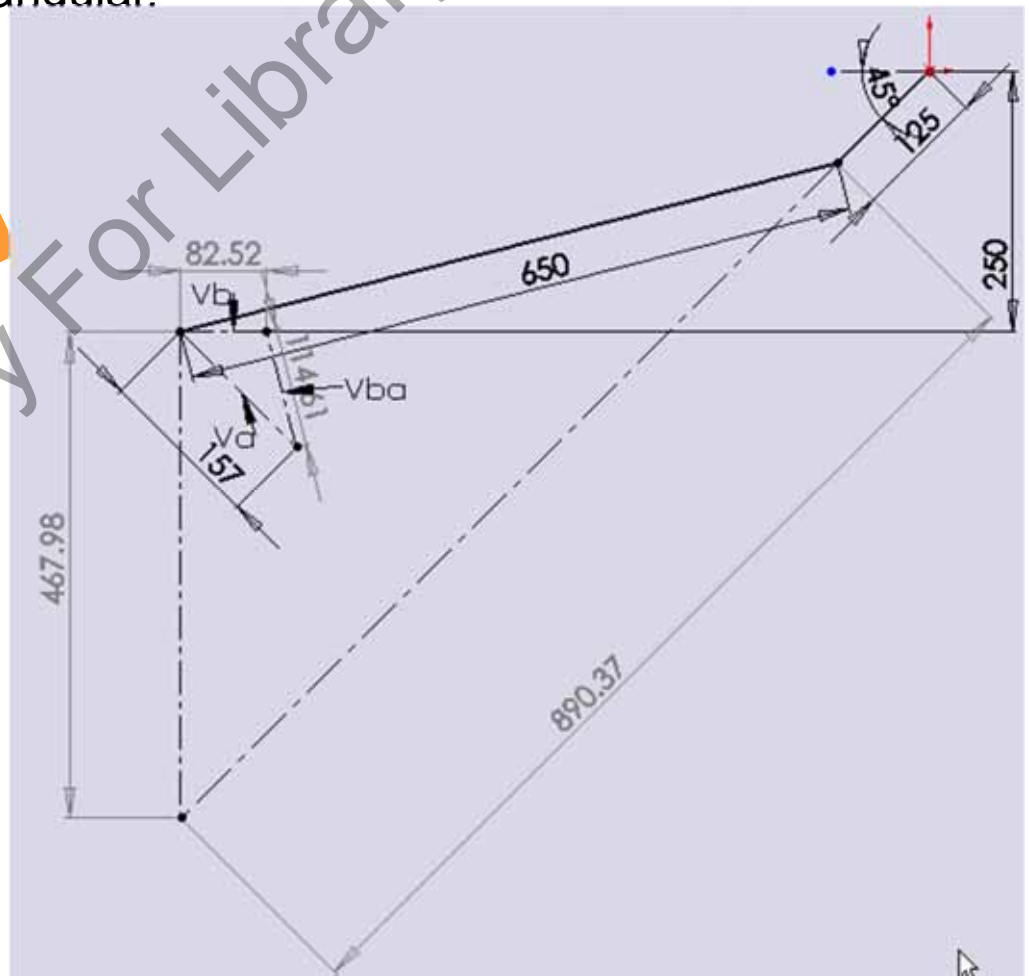
University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios de cinética con curvatura.

➢ Introducción a conservación de momento angular.

Petición clase 0809:
Revisar Riley 14.48



University Copy For Library Use

S25t.- Ejercicios usando métodos de conservación de energía.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ....

- Repaso sesión anterior.
  - Ejercicios de cinética con curvatura.
  - Introducción a conservación de momento angular.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Objetivos sesión.

➢ Comprender la conservación de energía en la dirección del desplazamiento.

➢ Comprender la problemática de las fuerzas no conservativas y la influencia con la trayectoria.

➢ Comprender el concepto de trabajo y potencia y su rendimiento.

$$Ep_e = \frac{1}{2} k\delta^2$$

$$Ep_g = mgh$$

$$Ec = \frac{1}{2} mv^2$$

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

$$Ec_1 + Ep_1 + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2 + Ep_2$$

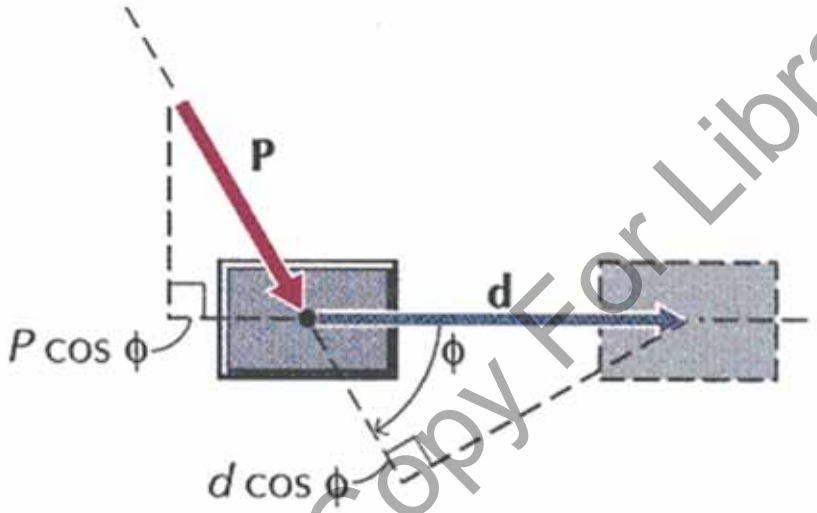
$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F}d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

$$\eta_{mec} = \frac{\text{Trabajo útil}}{\text{Trabajo consumido}} = \frac{\text{Potencia útil}}{\text{Potencia consumida}}$$

University Copy For Library Use

- Trabajo de fuerza rectilínea.

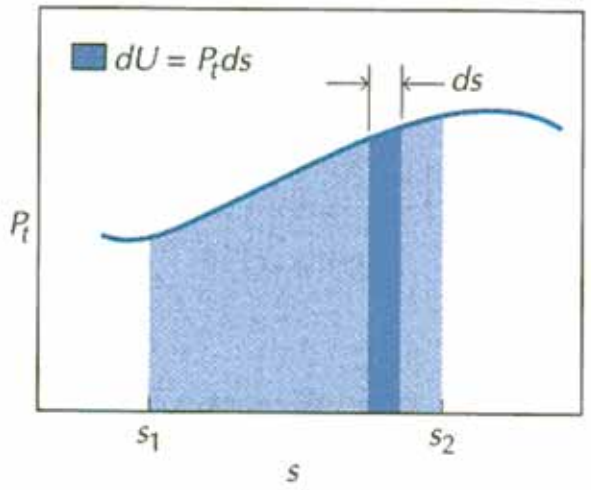
Trabajo en la dirección de desplazamiento



$$U = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d} = Pd\cos\phi = P_x d_x + P_y d_y + P_z d_z$$

University Copy For Library Use

- Trabajo trayectoria rectilínea.

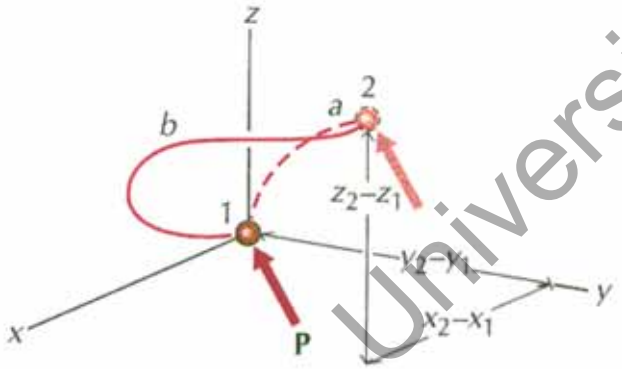


$$dU = \mathbf{P}\cdot d\mathbf{r} = Pds\cos\phi = P_t ds = P_x d_x + P_y d_y + P_z d_z$$

$$U_{1\to 2} = \int_1^2 dU = \int_{S_1}^{S_2} P_t ds$$

Con **P** ctte :

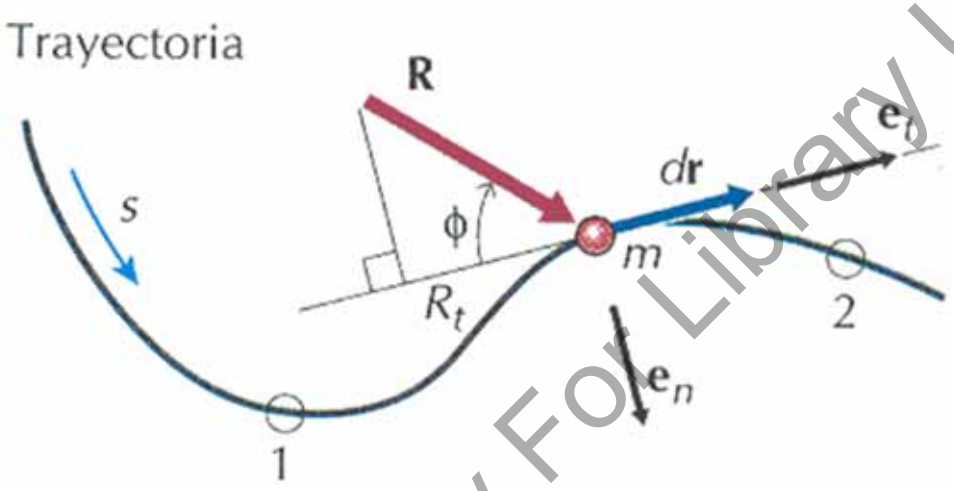
$$U_{1\to 2} = \int_1^2 dU = P_t \int_{S_1}^{S_2} ds = P_x(x_2 - x_1) + P_y(y_2 - y_1) + P_z(z_2 - z_1)$$



U sólo depende de los puntos extremos y no de la forma del camino (**Fuerza conservativa**). Hay el mismo trabajo por el camino a que por el b.

University Copy For Library Use

- Teorema fuerzas vivas.



$$R_t = ma_t = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds};$$

$$\int_{S_1}^{S_2} R_t ds = m\int_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2;$$

$$Ec_2 - Ec_1 = U_{1\to 2}$$

$$Ec_i + U_{i\to f} = Ec_f$$

University Copy For Library Use

- Conservación de la energía.

Las fuerzas conservativas efectúan trabajo sobre un punto en función de la energía potencial (Ep) que sólo depende de la posición del punto. La conservación de la energía garantiza que se conserva la energía total si no hay fuerzas no conservativas como fricción.

$$Ep_e = \frac{1}{2} k\delta^2$$

$$Ep_g = mgh$$

$$Ec = \frac{1}{2} mv^2$$

University Copy For Library Use

- Trabajo y Energía conservativo.

El trabajo para provocar un desplazamiento de un sitio a otro se compone del trabajo de las fuerzas conservativas (no dependen de la trayectoria) y de las no conservativas que si dependen de la trayectoria.

$$U_{1\to 2} = U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2}$$

Por tanto:

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

$$Ec_1 + Ep_1 + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2 + Ep_2$$

University Copy For Library Use

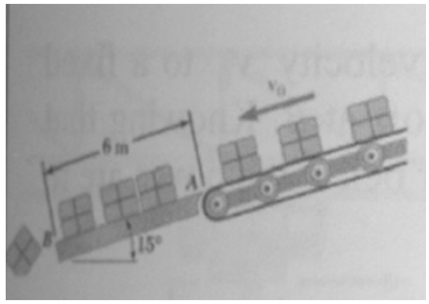
- Potencia y rendimiento.

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F}d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

$$\eta_{mec} = \frac{\text{Trabajo útil}}{\text{Trabajo consumido}} = \frac{\text{Potencia útil}}{\text{Potencia consumida}}$$

University Copy For Library Use

- Beer 13_011.



Un cinta lleva cajas a velocidad v_o y caen en una rampa por A y deslizan hasta que saltan por el extremo B con fricción 0.4. Se sabe que al saltar por B la velocidad es de 2 [m/s]. Determinar v_o.

E_{c1}=Energía cinética inicial: $1/2mv_o^2$.

E_{c2}=Energía cinética en B: $1/2m2^2=2m$ [J].

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

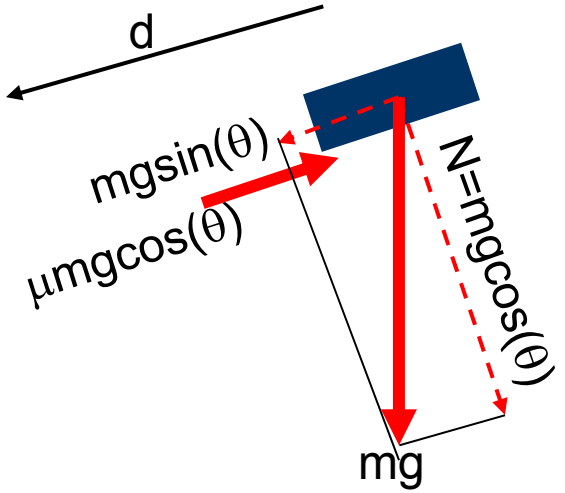
Energía no conservativa de fricción más potencial en B:

$U_{12}=mg(\sin 15^o-\mu\cos 15^o)*6= -0.76531*mg$ [J].

Total:

$1/2mv_o^2 - 0.76531*mg = 2m$

⇨ $v_o= \sqrt{(4+2g*0.76531)}$



Sol:

(a) $v_o=4.36$ [ft/s^2]

University Copy For Library Use

- Beer 13_004.

Una piedra de 2[kg] es lanzada desde una altura h alcanzando el suelo con una velocidad de 24[m/s]. Encontrar (a) la energía cinética al impactar en el suelo, (b) la altura desde que se lanzó.

Solución clásica:

$v=gt$, $h=1/2*gt^2$, ⇨ $h=1/2*v^2/g$; Por lo tanto $h=0.5*24^2/9.81= 29.4$[m]

⇨$v=\sqrt{(2gh)}$

$E_c=1/2mv^2=mgh=576$ J.

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

Solución por energías:

$0+mgh=1/2mv^2$ ⇨$h=0.5v^2/g=29.4$[m]

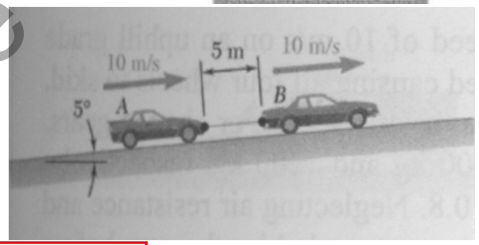
Sol:

(a) Ec=576 [J];

(b) h=29.4[m];

University Copy For Library Use

• Beer 13_015.



El coche B remolca al A con un cable de longitud 5[m] a v=10[m/s]. B frena con μ=0.9 y el coche A le impacta. Hallar la velocidad de impacto.

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

Antes de frenar: E_{c1}=2*1/2*m*v^2= 100m [J]

El coche B al frenar cambia su energía cinética por potencial más fricción:

U_{12}=-mg(sin5º+μcos5º)*d ⇨

50m -mg(sin5º+μcos5º)*d = 0

en el que d es la distancia recorrida: d=50/(9.81*(sin5º+0.9*cos5º))=5.181[m]

El coche A para impactar a B:

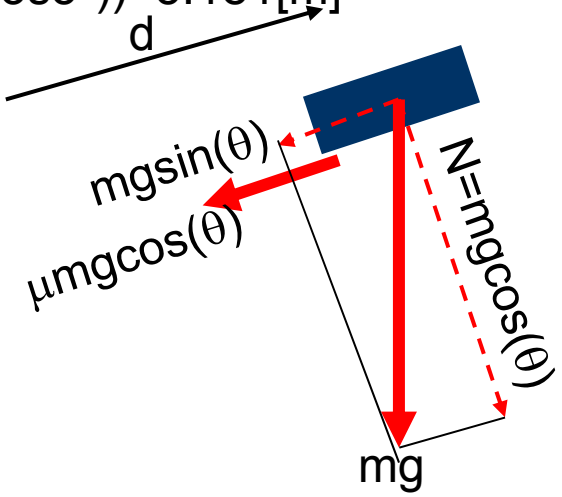
50m-mg(sin5º)*(d+5)=1/2*m*v_i^2

⇨ v_i^2 =2*(50 -g(sin5º)*(5.181+5))

⇨ v_i = 9.087 [m/s]

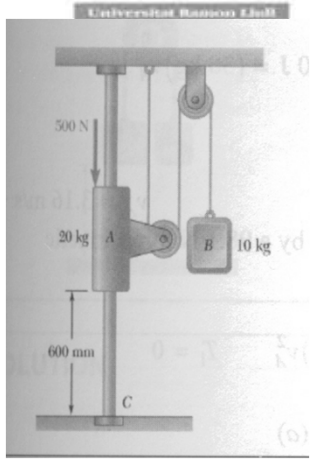
Comentario:

Se ha de considerar la posibilidad de que el coche impacte antes de que B se pare del todo.



University Copy For Library Use

•Beer 13_019.



El collar A de 20[kg] y su contrapeso B de 10[kg] están en equilibrio estático hasta que una fuerza de 500[N] se aplica en A. Calcular (a) la velocidad al impactar en C y (b) suponiendo que en lugar de la masa B de 10 [kg] aplicamos una fuerza de 98.1[N] hacia abajo.

Primero encontramos relaciones cinemáticas:

$x_b+2x_a=L \Rightarrow v_b=-2v_a$.

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

Planteamos energías para A y B:

$0+500*0.6+20*9.81*0.6-10*9.81*0.6*2=1/2*(20*v_a^2+10*(2*v_a)^2)$

(a) $\Rightarrow v_a=\sqrt{500*0.6/30}=3.16$[m/s].

Si en lugar de una masa en b tenemos una fuerza:

$0+500*0.6+20*9.81*0.6-98.1*0.6*2=1/2*(20*v_a^2)$

(a) $\Rightarrow v_a=\sqrt{500*0.6/10}=5.48$[m/s].

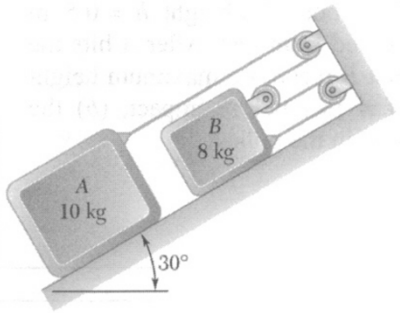
Sol:

(a) $v_a=3.16$[m/s]

(b) $v_a=5.48$[m/s]

University Copy For Library Use

• Ejercicio casa Beer 13_021.



Se liberan el bloque A de 10[kg] y el B de 8[kg] sobre plano inclinado de 30º y se pide (a) velocidad de A al moverse 0.5 [m] y (b) la tensión del cable.

Primero encontrar relaciones de velocidad: $x_a+3x_b=L$

Plantear energías para el conjunto de bloques considerando energía inicial cero.

$0+17.985=5.444v_a^2$.

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

Suponer A está aislado con una fuerza que es la tensión del cable.

$mgsin30º*0.5-T*0.5=1/2*m_a*v_a^2$.

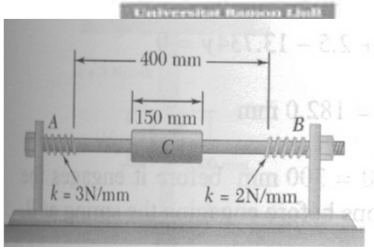
Sol:

(a) v_a=1.818 m/s descendiendo.

(b) T=16.02[N]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 13_027.



Un collar de 4[kg] oscila entre los muelles A y B de 2000 y 3000 [N/m]. Para empezar se empuja el collar hasta comprimir el muelle en B 50[mm].

la

Sol:

(a) d=341[mm];

(b) d=182[mm]

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios utilizando métodos de energía incluyendo muelles.

University Copy For Library Use

S26t.- Ejercicios Cantidad Movimiento Partículas.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ...

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios utilizando métodos de energía incluyendo muelles.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Objetivos sesión.

➢ Comprender la conservación de cantidad de movimiento lineal y angular.

➢ Realizar ejercicios en los que se vea la necesidad de calcular por este método.

$$mv_1 + \int_1^2 F\partial t = mv_2$$

$$r \times mv_1 + \int_1^2 r \times F\partial t = r \times mv_2$$

University Copy For Library Use

- Conservación de momento.

Al igual que hemos hecho con la energía podemos hacer lo mismo con la conservación de momentos. Tema 19 Riley.

Energía:

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

Cantidad movimiento lineal:

$$mv_1 + \int_1^2 F\partial t = mv_2$$

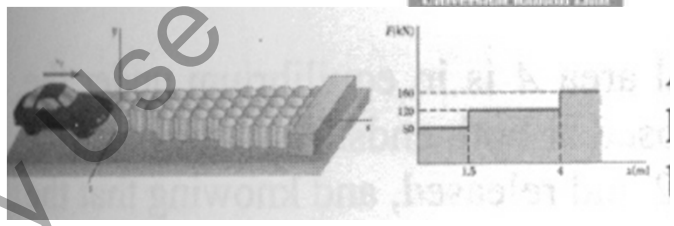
No olvidar la posibilidad de ganar o perder masa

Cantidad Momento angular. Al igual que el lineal pero con pares:

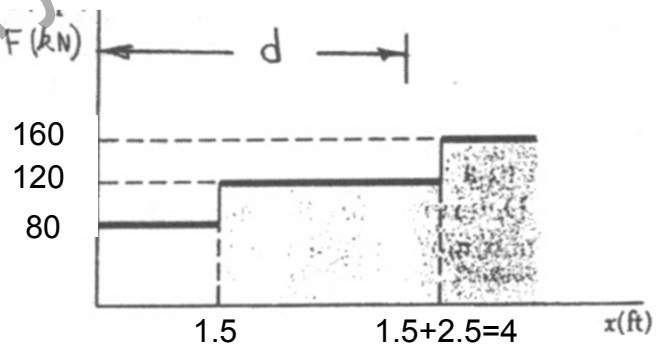
$$r \times mv_1 + \int_1^2 r \times F\partial t = r \times mv_2$$

University Copy For Library Use

- Beer 13_031.



Un coche a 100[km/h] choca contra las protecciones que aportan un comportamiento fuerza-desplazamiento progresivo: 80[kN] el primer bloque de 1.5[m], 120[kN] el segundo bloque de 2.5[m] y 160[kN] el tercer bloque de 40[m]. Si el coche tiene una masa de 1000[kg] calcular (a) la distancia que recorre el coche hasta pararse y (b) la máxima desaceleración.



Primero calculamos energía cinética inicial:

E_{c1}=0.5*1000*(100/3.6)^2=3.858e5[J] = 385.8[kJ]

Calculamos el trabajo para llegar hasta la segunda barrera:

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

U_{12}=-80000*1.5= 1.2e5[J] =-120[kJ].

E_{c2}=385.8-120=265.8[kJ] ⇨ v=√(265800*2/1000)=23.05[m/s] = 83[km/h]

Calculamos el trabajo para pararse en la segunda barrera:

E_{c3}=0=E_{c2}+U_{23}=265800-120000*(d-1.5)

⇨ d=1.5+265800/120000= 3.715[m] (ok pues menos que 4)

aceleración máxima= F_{max}/m=120000/1000=120[m/s2].

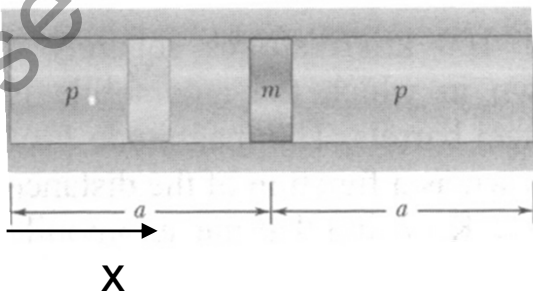
Sol:

	m[kg]	v[km/h]	F1[kN]	d1[m]	F2[kN]	d2[m]	F3[kN]	v[m/s]	Ec[J]	Ec1[J]	Ec2[J]	d2s[m]	d2s-d1[m]
ej.-Bee	1.000E+03	1.000E+02	8.000E+01	1.500E+00	1.200E+02	2.500E+00	1.600E+02	2.778E+01	3.858E+05	2.658E+05	-3.420E+04	3.715E+00	2.215E+00

(a) d=3.34[m] solución Beer equivocada! Solución García 3.715[m] (b) a=120[m/s^2]

University Copy For Library Use

- Beer 13_032.



Un pistón de masa m y de sección A está en equilibrio en la posición central con una presión p. Si movemos el pistón hacia la izquierda a/2 y la presión es inversamente proporcional al volumen calcular (a) la velocidad del pistón al pasar por la posición central en función de "P", "A", "m" y "a".

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

Primero calculamos presión a izquierda y derecha iniciales:

P_i=P*(A*a)/(A*0.5*a)=2*P; Para cualquier x: P_i(x)=P*(A*a)/(A*(x))

P_d=P*(A*a)/(A*1.5*a)=2/3*P Para cualquier x: P_d(x)=P*(A*a)/(A*(2a-x))

Condiciones iniciales: v=0, x=a/2.

Al pasar por x=a:

$$0 + \int_{x=a/2}^{x=a} (P_i - P_d) A \partial x = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow$$

$$PaA\left[\ln(a) + \ln(2a-a) - \ln(a/2) - \ln(3a/2)\right] = 0.5mv^2 \Rightarrow$$

$$PaA\left[\ln(a^2) - \ln(3a^2/4)\right] = PaA\left[\ln(4a^2/3a^2)\right] = PaA\left[\ln(4/3)\right] = 0.5mv^2 \Rightarrow$$

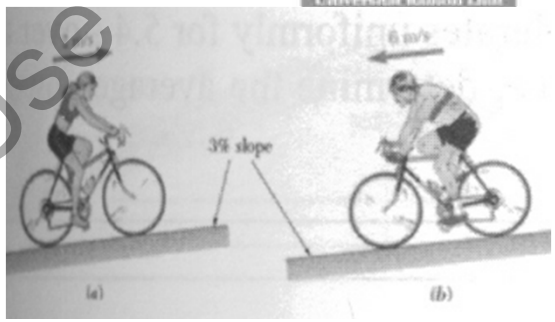
$$v = 0.759\sqrt{\frac{PaA}{m}}$$

Sol Beer:

(a) v=0.759√(PaA/m)

University Copy For Library Use

- Beer 13_047.



Una mujer de 60[kg] y su bici de 7[kg] suben una rampa del 3% a 2[m/s]. (a) ¿Que potencia necesita desarrollar la mujer?. Un hombre de 90[kg] y su bici de 9[kg] bajan la pendiente del 3% y mantiene la velocidad constante a 6[m/s] frenando. (b)¿Que potencia disipan los frenos?

Primero calculamos el ángulo de la rampa: $\tan(\theta)=0.03 \Rightarrow \theta=1.718^{\circ}$

Calculamos la potencia en subida:

$P=Fv=mg\sin(\theta)v=(60+7)[kg]*9.815[m/s^2]*\sin(1.718^{\circ})*2[m/s]=39.4[W]$

Calculamos la potencia para frenar en bajada y mantener velocidad constante:

$P=Fv=mg\sin(\theta)v=(90+9)[kg]*9.815[m/s^2]*\sin(1.718^{\circ})*6[m/s]=174.7[W]$

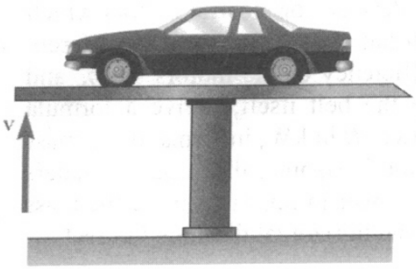
Sol Beer:

(a) 39.4 [W]

(b) 174.7 [W]

University Copy For Library Use

- Beer 13_050.



Un elevador de coches necesita 16[s] para subir un coche de 2800[lb] y el soporte de 650[lb] hasta una altura de 6.5[ft]. Si el motor eléctrico y todos los mecanismos tienen una eficiencia del 82% determinar (a) la potencia requerida en la bomba y (b) la potencia del motor eléctrico.

Primero calculamos la velocidad:

v=6.5[ft]/16[s]=0.4062[ft/s]

Potencia hidráulica para subir:

P=Fv=mgsin(90º)v=(2800+650)[lb]*1*0.4062[ft/s]=1401[lb·ft/s]

P= 1401[lb·ft/s]*1cv/550[lb·ft/s] = 2.55 cv (hp)

Potencia eléctrica para subir:

$P_e=P_h$/rendimiento=2.55/0.82= 3.11 cv

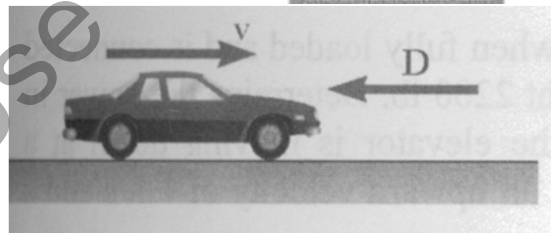
Sol Beer:

(a) 2.55 cv

(b) 2.55/0.82=3.11cv

University Copy For Library Use

- Beer 13_053.



Un coche de 1400[kg] acelera y se desplaza 400[m]. La aceleración $a=3.6e^{-0.0005x}$ (a en [m/s^2] y x en [m]). La resistencia aerodinámica es $D=0.35v^2$ [N] con v en [m/s]. Hallar la potencia que consume la aerodinámica para (a) x=200[m] y (b) x=400[m]

Como conocemos la aceleración en función de x usamos la relación: a=v*dv/dx.

$$\frac{v^2}{2}=\int_{x=0}^{x=x} a\partial x=3.6\int_{x=0}^{x=x} e^{-0.0005x}\partial x=72000\left(1-e^{-0.0005x}\right)\Rightarrow$$

$$v=120\sqrt{\left(1-e^{-0.0005x}\right)}$$

Calculamos la potencia P=Fv:

$$P=\left(0.35v^2\right)v=0.35\left(120\sqrt{\left(1-e^{-0.0005x}\right)}\right)^3=6.048e5\left(1-e^{-0.0005x}\right)^{3/2}$$

Sustituimos en x=200 y en x=400:

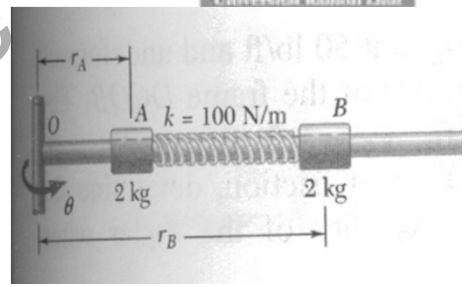
Sol Beer:

(a) $P_{x=200}$=17.75[kW]

(b) $P_{x=400}$=46.7[kW]

University Copy For Library Use

- Beer 13_094.



Dos collares de 2[kg] unidos por un muelle de k=100[N/m] pueden deslizar. B está sujeto al inicio cuando se rota a θ'=5[rad/s] y el muelle comprimido con r_a=1[m] y r_b=2.5[m]. Se libera la pieza b y se comienzan a mover los collares. En el instante en que el muelle está en compresión y la enregía cinética sea 185J calcular (a) r_a (b) r_b y (c) θ'.

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

Inicio del collar A. Calculamos el equilibrio de la fuerza el muelle con la aceleración normal: $100x_o=mr_a\theta'^2$. Por tanto se puede calcular lo comprimido que está el muelle x_o=0.5[m].

Por lo tanto muelle sin comprimir 0.5+(2.5-1)=2[m]

Por conservación de la energía:

$E_{c1}=0.5*2*(1*5)^2+0.5*2*(2.5*5)^2=$ 181.2[J] $E_{pm1}=0.5*100*0.5^2=12.5$[J]

$E_{c2}+E_{pm2}=185[J]+0.5*100*x_2^2$. ⇨$x_2$=0.4183 (un poco menos comprimido $r_{b2}-r_{a2}=2-0.4183$, $r_{b2}=r_{a2}+1.582$)

$$r \times mv_1 + \int_1^2 r \times F\partial t = r \times mv_2$$

Por conservación de momentos angulares:

$r_{a1}^2\theta_1'=r_{a2}^2\theta_2'$ y $r_{b1}^2\theta_1'=r_{b2}^2\theta_2'$ (muelle no momento angular) ⇨

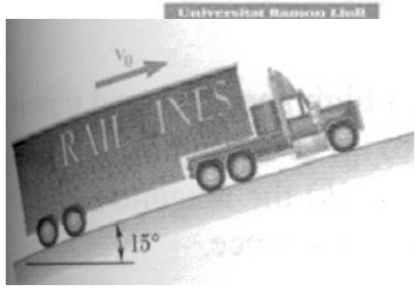
Por lo tanto aislando θ_2': $r_{b2}^2=2.5^2*r_{a2}^2$ ⇨ $r_{b2}=2.5*r_{a2}$. ⇨ $r_{a2}=1.582/1.5$

Sol Beer:

(a) r_{a2}=1.054[m], (b) r_{b2}=2.64[m], (c) θ_2'=4.50[rad/s]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 13_121.



Un camión se supone ha de parar en una rampa de emergencia diseñada con pendiente de 15º. Si el camión pesa 9000[kg] y entra a v_o=36[m/s] y tras 6[s] la velocidad se ha reducido a 12[m/s] calcular (a) la fuerza de frenada, (b) tiempo extra para llegar a pararse.

Hacer ejercicio por conservación de momentos:

$$mv_1 + \int_1^2 F\partial t = mv_2$$

F a integrar es la fuerza de frenado y componente en dirección de movimiento del peso.

Sol:

(a) F=13.15 [kN]

(b) t=9-6=3[s]

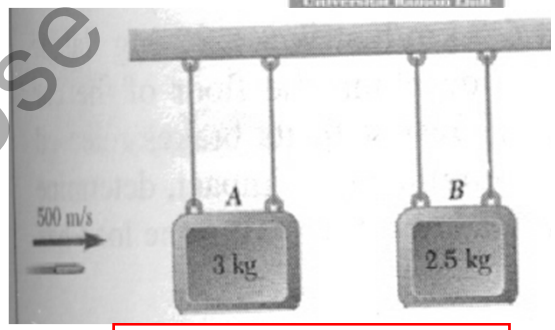
University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios con métodos de energía incluyendo cantidad de movimiento y potencia y rendimiento.

University Copy For Library Use

- Beer 14_005.



Una bala con v=500[m/s] atraviesa el bloque A de 3[kg] y luego se incrusta en B de 2.5[kg]. Sabiendo que A se mueve a 3[m/s] y B a 5[m/s] calcular (a) la masa de la bala y (b) la velocidad cuando sale de A y viaja hasta B.

$$mv_1 + \int_1^2 F\partial t = mv_2$$

Conservación de movimiento:

(a) m*500=3*3+(m+2.5)*5 ⇨

m=(3*3+2.5*5)/(500-5)=0.04343[kg] = 43.43[gr.]

Conservación de movimiento al pasar por A:

(b) m*500=3*3+m*$v_{a\_to\_b}$ ⇨

$v_{a\_to\_b}$=500-(3*3)/0.04343=293[m/s]

Sol Beer:

(a) m=43.4 gr.

(b) $v_{a\_to\_b}$=293[m/s]

University Copy For Library Use

- Beer 14_016.

Un cohete prototipo de 20[kg] viaja en dirección x con velocidad (60,0,0)[m/s] y una explosión lo parte en dos trozos A de 8 y B de 12 [kg]. El trozo de A se encuentra 2 segundos tras la explosión en la posición a una distancia (120,-10,-20)[m] del punto en que explosionó. Calcular la posición del fragmento B en ese instante suponiendo la gravedad (0,-9.81,0)[m/s^2].

Se considera que el centro de masas sigue moviéndose como si no hubiese explotado:

$r=v_o*t-1/2*g*t^2= (60t,-0.5*9.81*t^2, 0)$

Se aplica la conservación de l centro de masas:

$mr=m_a*r_a+m_b*r_b$.

$20*(120,-19.62,0)=8*(120,-10,-20)+12(x_b,y_b,z_b)$ ⇨

$x_b=(20*120-8*120)/12=120$

$y_b=(20*-19.62-8*-10)/12=-26.03$

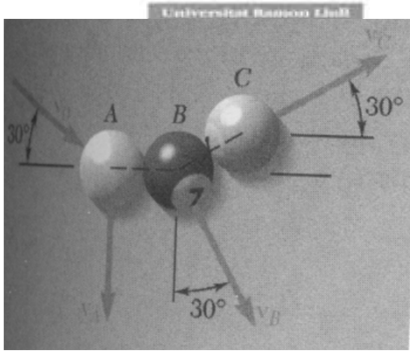
$z_b=(20*0-8*-20)/12=13.33$

Sol:

(a) $r_b=(120.0,-26.03,13.33)$

University Copy For Library Use

- Beer 14_041.



En el billar la bola A impacta a 5[m/s] la bola B que acaba moviendo la bola C. Si sabemos que las bolas van en las direcciones de la figura tras el impacto y se conserva la energía determinar la velocidad de las tres bolas.

$$mv_1 + \int_1^2 F\partial t = mv_2$$

Colocamos las velocidades en componentes (x,y):

Inicio=5*(cos30º,-sin30º)

v_a*(0,-1), v_b*(sin30º,-cos30º), v_c*(cos30º,sin30º)

Conservación movimiento:

m*5*(cos30º,-sin30º)=m*v_a*(0,-1)+m*v_b*(sin30º,-cos30º)+m*v_c*(cos30º,sin30º) ⇨

5*(cos30º)=v_b*(sin30º)+v_c*(cos30º)

5*(-sin30º)=v_a*(-1)+v_b*(-cos30º)+v_c*(sin30º) ⇨ $v_b=\sqrt{3}/2(5-v_a)$ $v_c=1/2(5+v_a)$

Conservación de energía:

$$Ec_1 + U^c_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

$5^2=v_a^2+v_b^2+v_c^2=v_a^2+(\sqrt{3}/2(5-v_a))^2+(1/2(5+v_a))^2$ ⇨

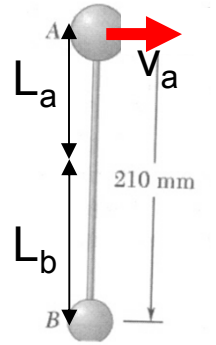
solucionamos todas las velocidades.

Sol Beer:

(a) v_a=2.50, v_b=2.17, v_c=3.75 [m/s]

University Copy For Library Use

• Beer 14_049.



Dos bolas A de 2.5 y B de 1[kg] unidas rígidamente por elemento de longitud L=0.21[m] de masa despreciable se empiezan a mover cuando v_a=3.5[m/s]. Determinar (a) centro de masas, (b) momento lineal, (c) momento angular sobre centro de gravedad y (d) la velocidad de a y b cuando la barra rote 180º.

Primero calculamos el centro de gravedad:

$L_b=(m_b*0+m_a*L)/(m_a+m_b)=5L/7$ y $L_a=(m_b*L+m_a*0)/(m_a+m_b)=2L/7$

Calculamos cantidad de movimiento o momento lineal y momento angular:

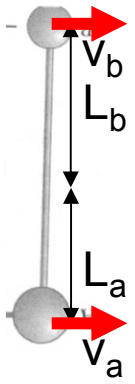
$m_a*v_{ao}=2.5*3.5=8.75$[kg·m/s]; $(0, l_a)x(m_a*v_{ao},0)=2L/7*2.5*3.5=-0.525$ [kg*m^2/s] ó ↻

Suponemos que las velocidades de a y b van hacia la derecha tras media vuelta:

cons. momento lineal: $2.5*v_a+1*v_b=8.75$ ⇨$v_b=8.75-2.5v_a$.

cons. momento angular:$(0,l_b)x(m_b*v_b,0)+(0,-l_a)x(m_a*v_a,0)=-0.15v_b+0.15v_a=-0.525$

Resolvemos con estas dos ecuaciones las velocidades en a y en b que salen positivas y por tanto tal y como se han pintado.



Sol Beer:

(a) $L_a=0.21*2/7$, $L_b=0.21*5/7$;

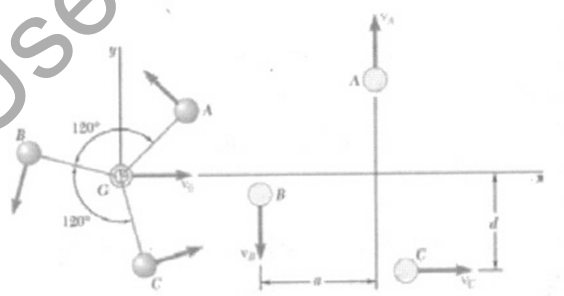
(b) mv=2.5*3.5=8.75 [kg*m/s];

(c) mrv=2.5*(0.21*2/7)*3.5=0.525 [kg*m^2/s];

(d) v_a=1.5, v_b=5 [m/s];

University Copy For Library Use

• Ejercicio casa Beer 14_055 (1/2).



Tres bolas idénticas unidas por cables de igual longitud van rotando mientras se desplazan en dirección x con v_o. Se rompe la fijación y las bolas vuelan libres y sabemos en un instante que v_a=(0,8.66)[ft/s], v_c=(15,0)[ft/s], a=0.866[ft] y d=0.5[ft]. Determinar (a) la velocidad inicial v_o, (b) la longitud de los cables L y (c) la velocidad de rotación ω antes de romperse la fijación.

University Copy For Library Use

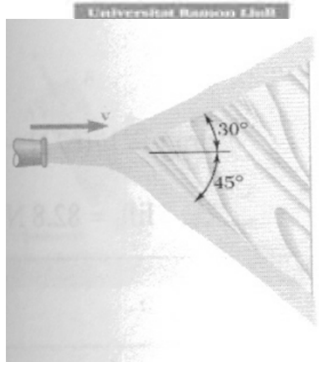
- Ejercicio casa Beer 14_055 (2/2).

Sol:

(a) v_o=5[ft/s] (b) L=0.5[ft] (c) ω=20[rad/s] ↺

University Copy For Library Use

- Beer 14_060.



Una tubería de diámetro interior d=50.47[mm] descarga agua con caudal de q=1.92[m^3/min] impactando contra la pared de la figura que se mueve hacia la izquierda con v=4[m/s]. Calcular la fuerza horizontal y vertical que sufre la pared. El caudal se divide en dos partes iguales.

Primero calculamos la velocidad:

$v=q/(\pi d^2/4)=1.92[m^3/min]*1[min]/60[s]/(\pi*0.05057^2/4[m^2])=16[m/s]$ y la relativa $v_r=16--4=20[m/s]$

Calculamos el flujo de masa:

$m'=\rho q=1000[kg/m^3]*1.92[m^3/min]*1[min]/60[s] = 32$ [kg/s]. Este flujo visto desde la pared es:

$m_r'=m'*v_r/v=32*20/16=40[kg/s]$ de los cuales la mitad sube a 30º y la mitad baja a 45º/2

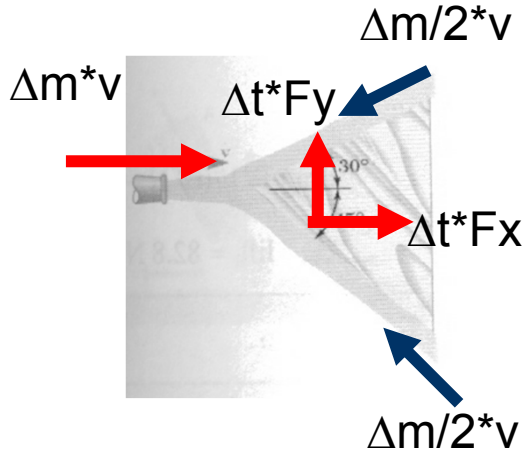
Hacemos conservación de momentos:

$\Delta m v_r'+F\Delta t=\Delta m/2*v_{rup}'+\Delta m/2*v_{rdown}'$ ⇨

$F=\Delta m/\Delta t\ (v_{rup}'/2+v_{rdown}'/2-v_r')$ ⇨

$(Fx,Fy)=40[kg/s]*20[m/s]*((\cos 30º,\sin 30º)/2+(\cos 45º,-\sin 45º)/2-(1,0))=$

$(-170.7,-82.8)[N]$

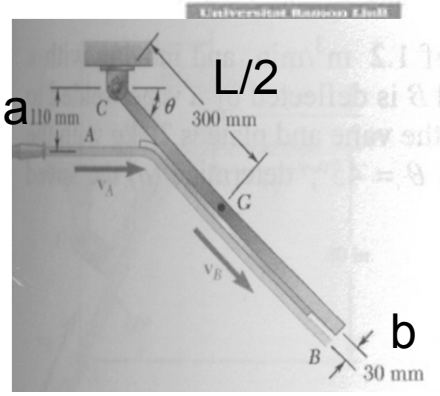


Sol:

(a) Horizontal - Drag = 170.7 [N], Vertical - Lift = 82.8 [N]

University Copy For Library Use

- Beer 14_065.



Un chorro de agua de q=1.2 m^3/min incide con v=30[m/s] en un placa de M=20[kg]. Determinar (a) el ángulo θ y (b) la reacción en la bisagra C.

Flujo másico: $m'=\rho q=20[kg/s]$

Conservación momento angular:

$\Sigma Mc: \Delta m*v_a*a-M*g*\Delta t*(L/2)*\cos\theta=\Delta m*v_b*b \Rightarrow$

$\cos\theta=20[kg/s]*30[m/s]*(0.110-0.030)[m]/(20[kg]*9.81[m/s^2]*0.300[m])=0.8155 \Rightarrow$

(a) $\theta=35.36º$

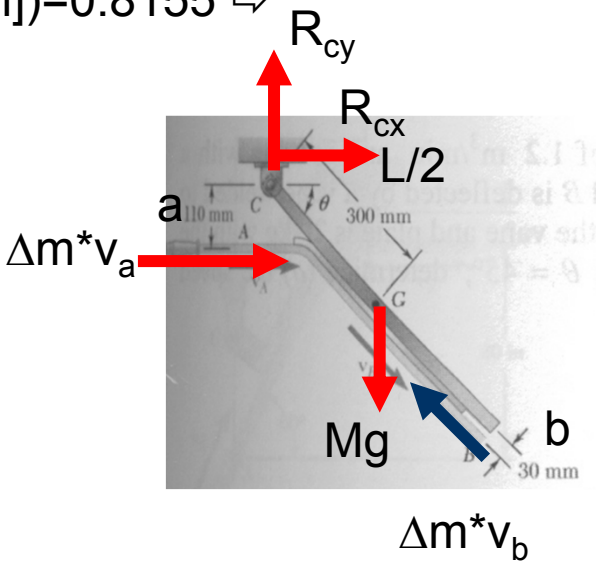
Reacciones:

$\Sigma Fx: \Delta m*v_a+R_{cx}\Delta t=\Delta m*v_b*\cos\theta \Rightarrow$

$R_{cx}=20*(30*0.8155-30)=-110.70[N]$

$\Sigma Fy: R_{cy}\Delta t-Mg\Delta t=-\Delta m*v_b*\sin\theta \Rightarrow$

$R_{cy}=20*(9.81-30*\sin 35.36º)=-151.1[N]$

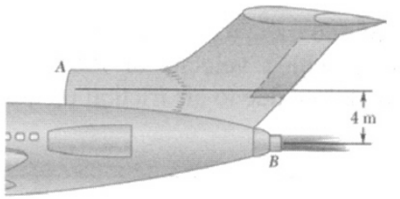


Sol:

(a) $\theta=35.4º$ (b) $R_c=(-110.7,-151.1)$, $|R_c|=187.3[N]$

University Copy For Library Use

- Beer 14_073.



Un motor jet coge aire en A a 90[kg/s] y descarga en B a 600[m/s] en relación al avión. Hallar el empuje y dirección causados al avión cuando vuela a (a) 480 [km/h] y (b) 960[km/h].

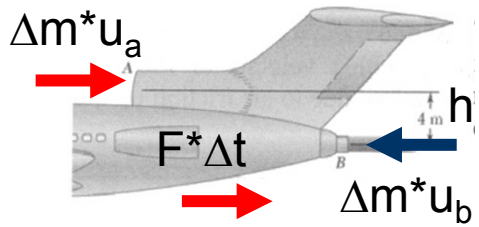
ΣF_x: $\Delta m*u_i+F*\Delta t-\Delta m*u_o=0 \Rightarrow F=\Delta m/\Delta t*(u_o-u_i)$

ΣM_{zo}: $-h*\Delta m*u_i+Momento_o\Delta t=0 \Rightarrow M_o=\Delta m/\Delta t*h*u_i$ (positivo, antihorario)

Para compensar el momento se puede suponer que la fuerza se aplica a una distancia "d" por debajo de la salida de forma que $M_o=F*d \Rightarrow d=M_o/F=h*u_i/(u_o-u_i)$.

(a) si u_i=480[km/h]=133.33[m/s] $\Rightarrow$ F=90*(600-133.33)=42000[N]
M_o=90*4*133.33, d=4*133.33/(600-133.33)=1.143[m]

(b) si u_i=960[km/h]=266.67[m/s] $\Rightarrow$ F=90*(600-266.67)=30000[N]
M_o=90*4*266.67, d=4*266.67/(600-266.67)=3.200[m]



Sol:
(a) F=42[kN] y d=1.143[m]
(b) F=30[kN] y d=3.200[m]

University Copy For Library Use

- Beer 14_074.

Un helicóptero al rotar las hélices lanza aire de densidad $\rho=1.21[kg/m^3]$ a una velocidad máxima de 24[m/s] por un tubo de diámetro d=9[m]. Si el helicóptero con el personal ya pesa 15[kN] calcular la carga máxima que puede transportar.

$$mv_1 + \int_1^2 F\partial t = mv_2$$

Suponemos que el aire al chocar con el suelo tiene una velocidad vertical cero y por tanto:

$\Delta m*v+F*\Delta t=0 \Rightarrow F=-\Delta m/\Delta t * v$, negativo pues va en sentido contrario a velocidad del aire.

Para calcular el flujo de masa:

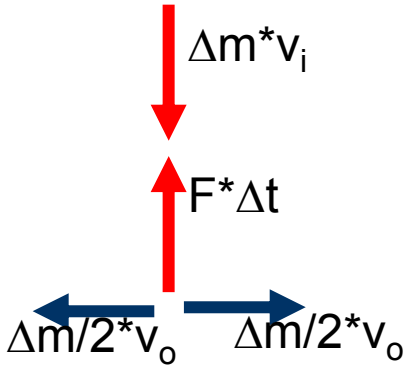
$\Delta m=\rho*volumen=\rho*\pi d^2/4*\Delta L \Rightarrow$

$\Delta m/\Delta t=\rho*\pi d^2/4*v$

Finalmente calculamos la fuerza que realiza el helicóptero.

$F=\rho*\pi d^2/4*v^2$

La máxima será para v=24[m/s]: $F_{max}=44.3[kN]$.



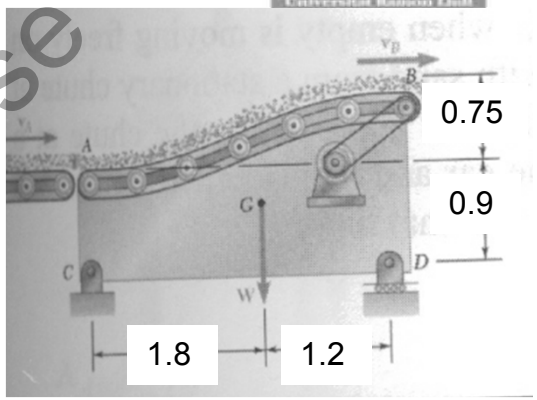
Sol:

(a) W=44.3-15=29.3[kN]

University Copy For Library Use

- Beer 14_087.

Una cinta transportadora recibe arena a un ritmo de 100[kg/s] en A y descarga en B. La cinta lleva una velocidad de 4.5[m/s]. El peso de la arena y el soporte es de 4[kN]. Determinar las reacciones en C y en D cuando (a) máquina parada y (b) cuando máquina en marcha.



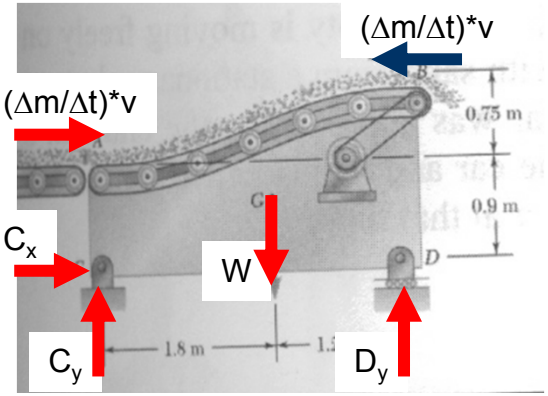
Hacemos el diagrama de fuerzas para calcular equilibrio estático (sin v) y dinámico:

(a) Estático:

ΣM_{zc}: -4000*1.8+D_y*3=0 ⇨ D_y=2.4[kN]

ΣF_x: C_x=0

ΣF_y: W-D_y-C_y=0 ⇨C_y=1.6[kN]



(b) Dinámico:

ΣM_{zc}: -100*4.5*0.9-4000*1.8+100*4.5*(0.9+0.75)+D_y*3=0 ⇨ D_y=2.287[kN]

ΣF_x: 100*4.5-100*4.5+C_x=0 ⇨ C_x=0

ΣF_y: W-D_y-C_y=0 ⇨C_y=1.712[kN]

Sol:

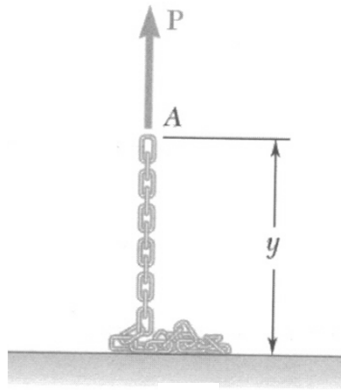
(a) C_x=0[kN]; C_y=4*1.2/3=1.6[kN]; D_y=4*1.8/3=2.4[kN]

(b) C_y=0[kN]; C_y=1.712[kN]; D_y=2.288[kN]

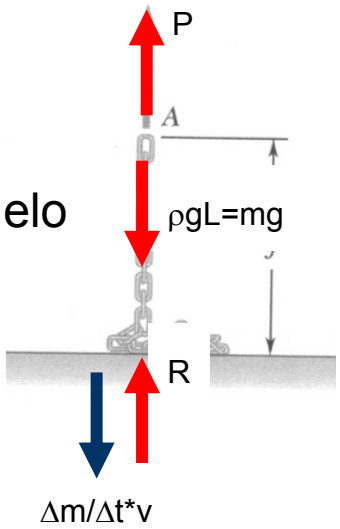
University Copy For Library Use

- Beer 14_091.

Una cadena de longitud L apoyada en el suelo se va levantando a velocidad constante. Expresar en función de la altura levantada (a) la fuerza P y (b) la reacción en el suelo.



Primero realizamos el dibujo con todas las fuerzas considerando una densidad por metro de la cadena m/L=ρ[kg/m]:



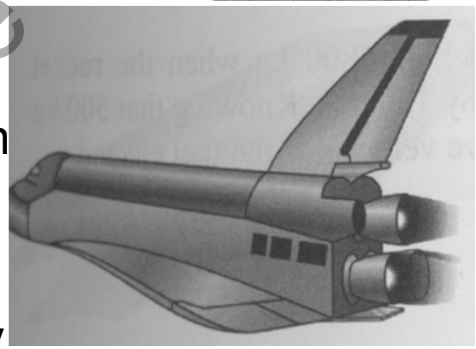
(b) Calculamos la reacción en el suelo como la fuerza que sustenta el trozo de cadena que no está vertical:
R=mg(1-y/L), cuando y=0 todo el peso en el suelo, cuando y=L ya no toca el suelo

(a) Aplicamos el equilibrio:
P-mg+mg*(1-y/L)=(Δm/Δt)*v ⇨ P=mg(y/L)+(ρ*v)*v=
ρ*(g*y+v^2)= m/L*(g*y+v^2).

Sol:
(a) P=m/L*(v^2+gy)
(b) R=mg*(1-y/L)

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 14_096.



Un trasbordador espacial tiene tres motores idénticos con una propulsión total de 1200[kips]. Determinar la velocidad a la que se quema la mezcla de oxígeno-hidrógeno en cada motor sabiendo que para el despegue se necesita una velocidad de 12500[ft/s] en (a) derivada de masa - tiempo y (b) derivada de peso - tiempo.

(a) Sabemos que un motor produce 1200/3=400[kips] y buscamos en la sesión de unidades para ver que en unidades de fuerza americanas tan sólo tenemos el [lb].
Buscamos en "http://www.babylon.com/definition/KIPS/English" para ver que 1kips=1000[lb].

Sol:

(a) m'= 32 [lb*s/ft]

(b) m'g= 1030 [lb/s]

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios aplicando conservación de movimiento para diferentes mecanismos incluyendo propulsión, cintas transportadoras y cadenas.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

S27t.- Ejercicio motor.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ...

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios utilizando métodos de energía incluyendo muelles.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Objetivos sesión.

➢ Aprender a ensamblar movimientos para el estudio cinemático.

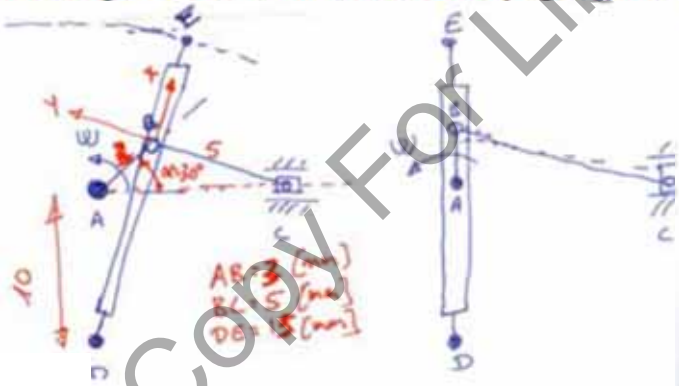
University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Ejemplo de cálculo.

Del ejercicio de examen conocemos los resultados cuando α=90º (figura derecha), resolver el estado previo cuando α=30º (figura izquierda).

La manivela AB gira a velocidad constante moviendo la biela BC con pistón horizontal en C y además la guía DE. Calcular usando ejes x,y,z de la figura cuando manivela y guía están verticales para ω=1[rad/s]↺.



3a: 0.25p. v_B=(0 , 3 , 0) [mm/s].

3b: 0.25p. v_C=(0 , 3 , 0) [mm/s].

3c: 0.25p. ω_{BC}=(0 , 0 , 0) [rad/s].

3d: 0.25p. v_E=(0 , 3.46 , 0) [mm/s].

3e: 0.25p. ω_{DE}=(0 , 0 0.2308[rad/s]=13.22[º/s]

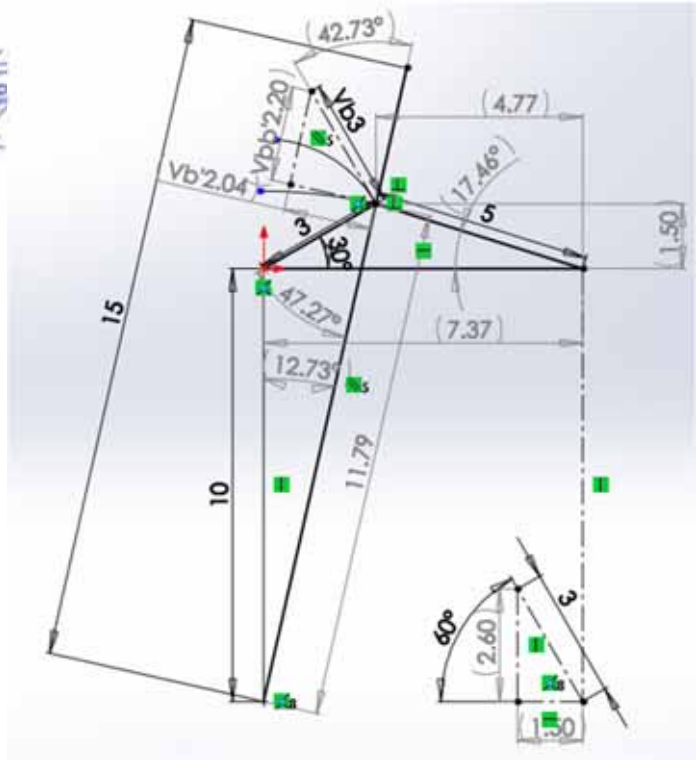
3f: 0.25p. a_B=(-3 , 0 , 0) [mm/s].

3g: 0.25p. a_C=(0 , -2.25, 0) [mm/s].

3h: 0.25p. α_{BC}=(0 , 0 0.75[rad/s^2]=42.97[º/s^2]

3i: 0.25p. a_E=(-0.7988, 0, 0) [mm/s].

3j: 0.25p. α_{DE}=(0 , 0 , 0) [rad/s].



University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios de cinemática de un motor ensamblando movimiento.

University Copy For Library Use

S28t.- Control Dinámica .

Mejora 1314 ...

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.
  - Ejercicios de movimiento 3D con Coriolis.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Objetivos sesión.

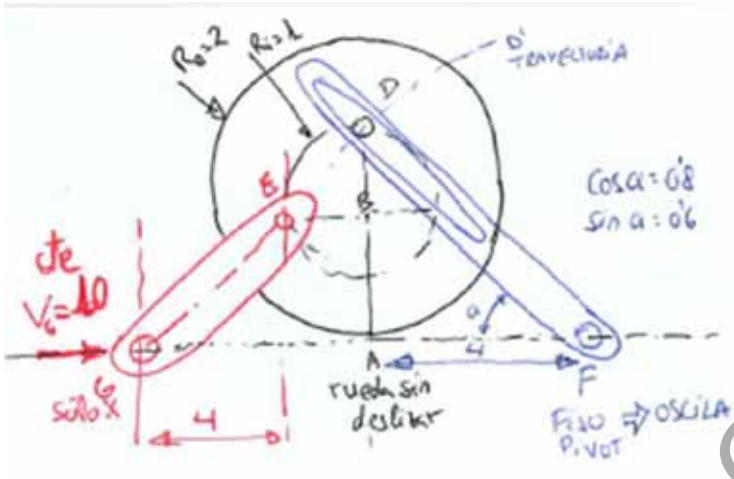
➢ Realizar una actividad de seguimiento que permita analizar si el alumno puede seguir el ritmo de la cinemática y al profesor ver los fallos de seguimiento del alumnado no detectados en clase.

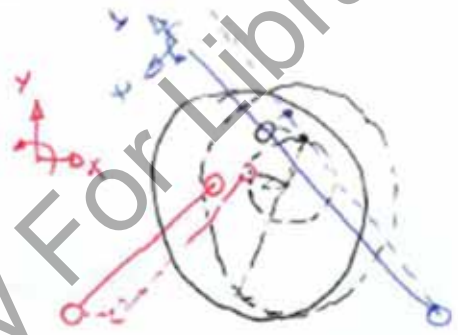
University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

Nombre y apellidos: Fecha: 16.11.2013

La barra GE se mueve con velocidad en G sólo en x V_G=10[m/s]. De esta forma empuja a la rueda ABED sin deslizar el punto A. Al rodar la rueda empuja al balancín FD', siendo D' el punto de la guía que en el momento de análisis está debajo del punto D de la rueda y el punto F el pivote de giro del balancín. Las unidades del dibujo son [m]. Se pide:





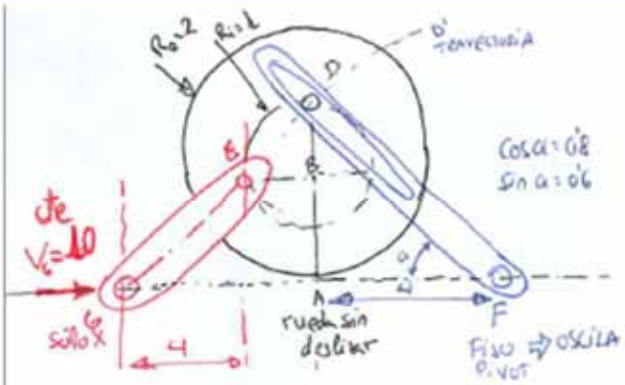
0.5p. V_E en (x,y). (8,4)[m/s]?
0.5p. ω_{EG}. +1[rad/s]?
0.5p. Altura CIR_{EG}. +10[m]?
1.0p. ω_R. -4[rad/s]?
0.5p. V_B en (x,y). (8,0)[m/s]?
0.5p. V_D en (x,y). (12,0)[m/s]?

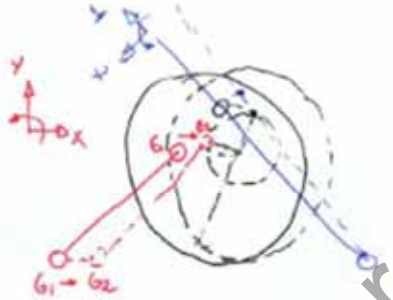
0.5p. a_E en (x,y). (-0.8,-8.4)[m/s^2]?
0.5p. α_{EG}. -1.6[rad/s^2]?
1.0p. α_R. +8.4[rad/s^2]?
0.5p. a_B en (x,y). (16.8,0)[m/s^2]
0.5p. a_D en (x,y). (25.2,-**16**)[m/s]

0.5p. $v_{D'}$ en (r,t). (0,-7.2)[m/s]?
0.5p. $v_{D'D}$ en (r,t). (9.6,0)[m/s]?
0.5p. $\omega_{FD'}$. -1.44[rad/s]?
0.5p. $a_{D'}$ en (r,t). (-10.37,-**29.97**)[m/s^2]
0.5p. $a_{D'D}$ en (r,t). (+**19.39**,0)[m/s^2]
1.0p. $\alpha_{FD'}$. -**5.99**[rad/s^2]?

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266





$V_E = V_G + V_{E/G}$

$x: -\omega_R \cdot 2 = V_G + -\omega_{EG} \cdot 2 \Rightarrow V_G = +\omega_{EG} \cdot 8 + \omega_{EG} \cdot 2 = -\omega_{EG} \cdot 10 \Rightarrow \boxed{\omega_{EG} = +1} \Rightarrow \boxed{\omega_R = -4}$

$y: -\omega_R \cdot 1 = 0 + \omega_{EG} \cdot 4 \quad \omega_R = -4\omega_{EG}$

$\boxed{V_E = (+8, +4)}$ $\quad (10 - 1.2,\ 1.4)$

$a_E = a_G + a_{E/G} + \text{coriolis}$

$\omega_R^2 \cdot 1 - \alpha_R 2 = 0 - \omega_{EG}^2 \cdot 4 - \alpha_{EG} \cdot 2 \Rightarrow \omega_R^2 \cdot 1 - 2(\omega_{EG}^2 \cdot 2 - \alpha_{EG} \cdot 4) + \omega_{EG}^2 \cdot 4 = -\alpha_{EG}^2$

$-\alpha_R \cdot 1 = 0 + \omega_{EG}^2 \cdot 2 + \alpha_{EG} \cdot 4$

$16 - 4 + 8\alpha_{EG} + 4 = -2\alpha_{EG} \Rightarrow 16 = -10\alpha_{EG} \Rightarrow \boxed{\alpha_{EG} = -1'6}$

$\Rightarrow \alpha_R = 2 - (-1'6) \cdot 4 = \boxed{+8'4\ [r/s^2] = \alpha_R}$

$a_E = (16 - (+8'4) \cdot 2,\ -(+1'4) \cdot 1) = (-0'8, -8'4)$ ok $\quad \boxed{a_E = (-0'8, -8'4)}$

$a_E = (-4 - (-1'6) \cdot 2,\ -2 - 1'6 \cdot 4) = (-0'8, -8'4)$

$\boxed{V_D = -3\omega_R = +12}$, $\quad a_{D_x} = -\alpha_R \cdot 3 = -25'2 \quad a_{D_y} = -\omega_R^2 \cdot 1 = -8'16 \quad a_D = (-25'2, -8)$

$V_{D'} = V_D + V_{D'D}$

$r: 0 = -12 \cdot 0'8 + V_{D'D} \Rightarrow \boxed{V_{D'D} = 9'6}$

$t: \omega_F \cdot 5 = -12 \cdot 0'6 + 0 \Rightarrow \boxed{\omega_F = -1'44}$

$a_{D'} = a_D + a_{D'D} + 2\omega_{FD'} V_{D'D}$

$r: -(1'44)^2 \cdot 5 = 25'2 \cdot 0'8 - 16 \cdot 0'6 + a_{D'D} + 0 \Rightarrow \boxed{a_{D'D} = -25'73\ [m/s^2]}$ +19.39

$t: \alpha_{FG} \cdot 5 = 25'2 \cdot 0'6 + 16 \cdot 0'8 + 0 + 2(-1'44) \cdot 9'6 \Rightarrow \boxed{\alpha_{FG} = -1'226\ [r/s^2]}$ -5.99

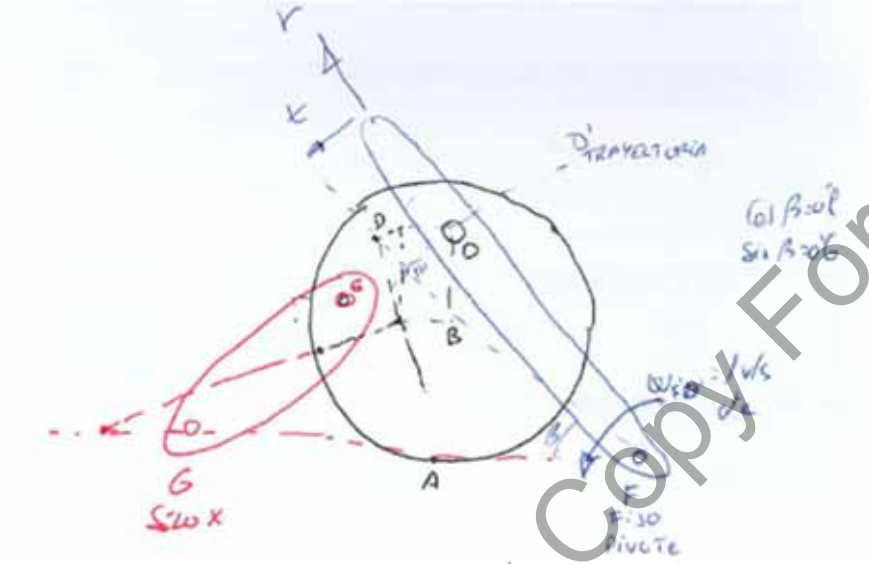
r, t

$\boxed{a_{D'} = (-10'37, -6'13)}$ (-10.37,-29.97)

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 10.12.2013

La barra FD' gira con velocidad angular constante $\omega_{FD'}$=1[rad/s]. De esta forma empuja a la rueda ABED sin deslizar el punto A. Al rodar la rueda empuja a la biela EG con punto G deslizando sólo horizontalmente. Se pide:

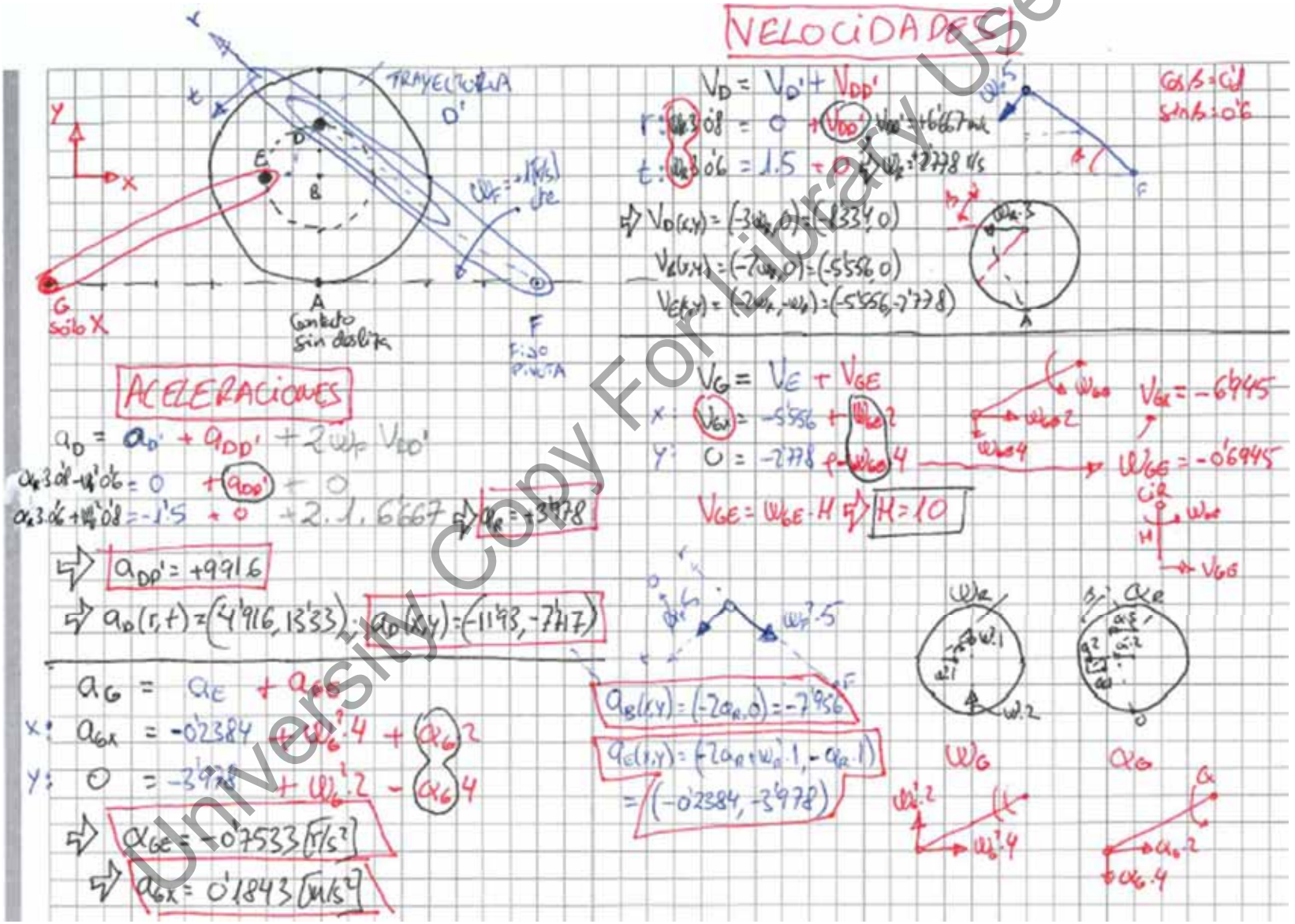


0.5p. V_D en (r,t). (6.667,5)[m/s]?
1.0p. ω_R. +2.778[rad/s]?
0.5p. $V_{DD'}$ en (r,t). (6.667,0)[m/s]?
0.5p. a_D en (r,t). (36.52,37.04)[m/s^2]
0.5p. $a_{DD'}$ en (r,t). (41.52,0)[m/s^2]
1.0p. α_R. 17.14[rad/s^2]?

1.0p. v_B en (x,y). (-5.556,0)[m/s]?
0.5p. v_E en (x,y). (-5.556,-2.7780)[m/s]?
1.0p. a_B en (x,y). (-34.28,0)[m/s^2]?
0.5p. a_E en (x,y). (-26.56,-17.14)[m/s^2]?

0.5p. v_G en (x,y). (-6.945,0)[m/s]?
0.5p. ω_{GE}. -0.6945[rad/s]?
1.0p. Altura CIR_{EG}. +10[m]?
0.5p. a_G en (x,y). (-32.72,0)[m/s^2]?
0.5p. α_{GE} -4.044[rad/s^2]?

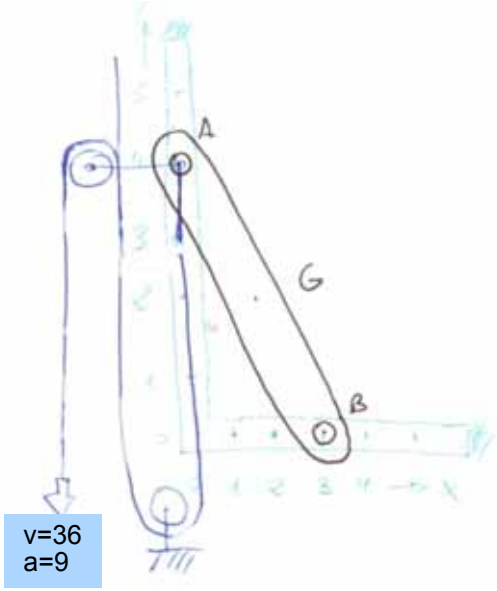
University Copy For Library Use



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 11.12.2012

Ej1: La barra AB se mueve por las guías horizontales en B y verticales en A estirando de la cuerda con poleas. Se pide:



1p. Velocidad y aceleración de A. (0,-12) (0,-3)
1p. Velocidad de B. (16,0)
1p. Velocidad angular de AB. +4
1p. Aceleración de B (-129.3,0)
1p. Aceleración angular de AB. -20.33

Ej2: El pasado B se mueve por dentro de la guía fija con VB=5[m/s] y por dentro de la barra AB' que rota respecto a A. Se pide en ejes x=r, y=t:

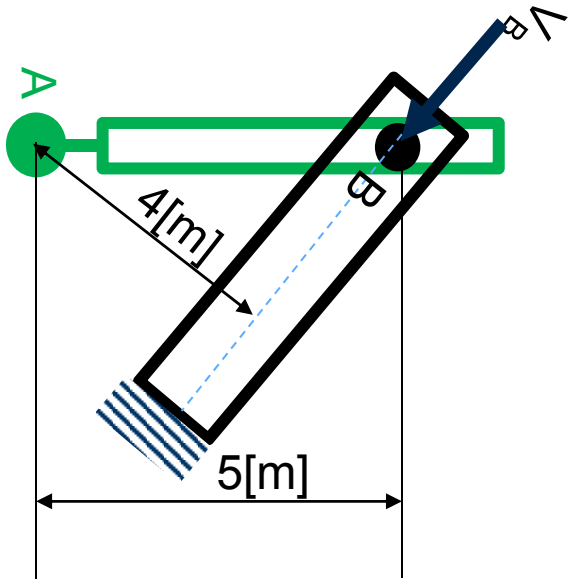
1p. v_B y a_B. (-3,-4) (0,0)

1p. $\varpi_{AB'}$. -0.8

1p. $v_{B'}$ y $v_{BB'}$. (0,-4), (-3,0)

1p. $\alpha_{AB'}$. -0.48

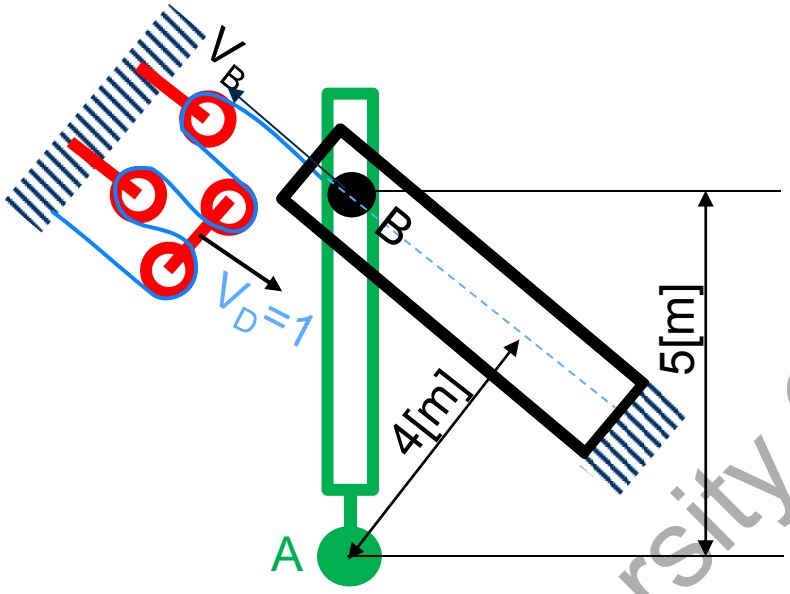
1p. $a_{B'}$ y $a_{BB'}$. (-3.2,-2.4) (3.2,0)



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 02.12.2011

Ej1: La polea se desplaza con v_D=1[m/s] cte y la manivela gira respecto a A. **Guía de B** está fija y paralela a D. B desliza y B' es el punto que en este instante está bajo B en guía AB'. Se pide:



1p. Velocidad de B.

2p. Velocidad angular de AB'.

2p. Aceleración angular de AB'.

Ej2: Un coche se desplaza sin deslizar con v_B=40[m/s] y acelera con a_B=4[m/s^2] gracias a un pistón D con biela d_{CD}=0.5[m] y cigüeñal d_{BC}=0.3[m]. Se pide:

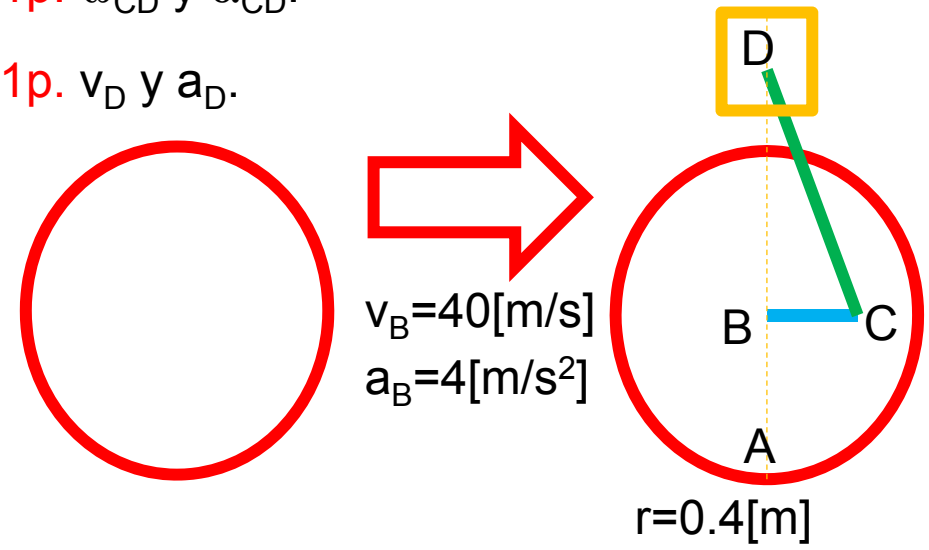
1p. v_A y a_A.

1p. ϖ_{AB} y α_{AB}.

1p. v_C y a_C.

1p. ϖ_{CD} y α_{CD}.

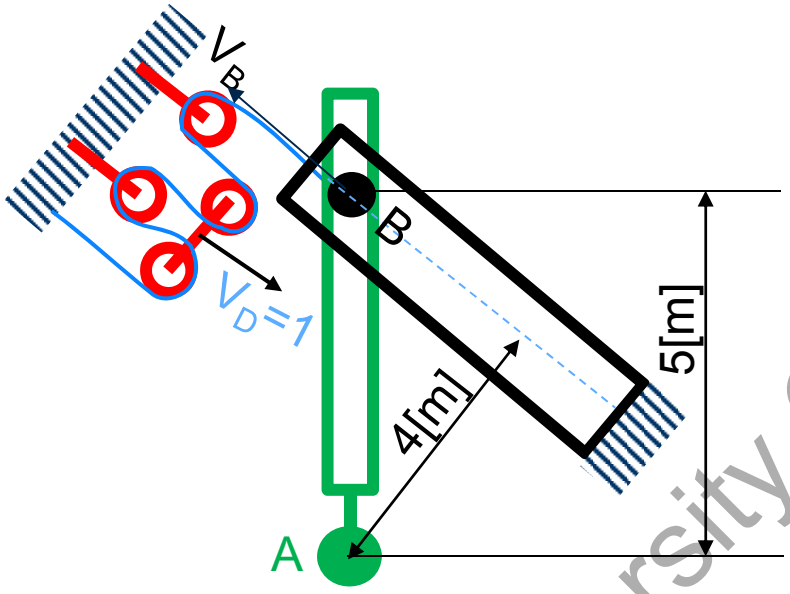
1p. v_D y a_D.



University Copy For Library Use

SOLUCION EJ1 Fecha: 02.12.2011

Ej1: La polea se desplaza con v_D=1[m/s] cte y la manivela gira respecto a A. **Guía de B** está fija y paralela a D. B desliza y B' es el punto que en este instante está bajo B en guía AB'. Se pide:



1p. Velocidad de B.

2p. Velocidad angular de AB'.

2p. Aceleración angular de AB'.

v_B=4=(-4*0.8,4*0.6)=(-3.2,2.4)

$\omega_{BC'}$=3.2/5=0.64[r/s],
$v_{B'B}$=(0,-2.4)[m/s]

$\alpha_{BC'}$=-2*0.64*2.4/5=-0.6144 [r/s^2],
$a_{B'B}$=(0,-0.64^2*5)=(0,-2.048) [m/s^2]

University Copy For Library Use

SOLUCION EJ2 Fecha: 02.12.2011

Ej2: Un coche se desplaza sin deslizar con v_B=40[m/s] y acelera con a_B=4[m/s^2] gracias a un pistón D con biela d_{CD}=0.5[m] y cigüeñal d_{BC}=0.3[m]. Se pide:

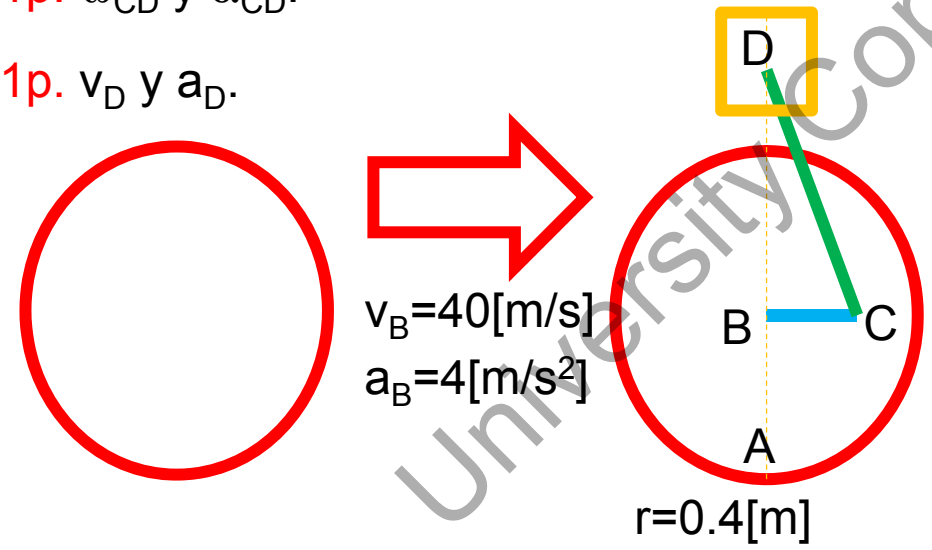
1p. v_A y a_A.

1p. ϖ_{AB} y α_{AB}.

1p. v_C y a_C.

1p. ϖ_{CD} y α_{CD}.

1p. v_D y a_D.



v_A=0,
a_A=(0,v^2/r)=(0,4000)[m/s^2]

ω_{AB}=v/r=100[r/s]↻,
α_{AB}=a/r=10[r/s^2]↻

v_C=(40,-30)[m/s]
a_C=(4-3000,-3)=(-2996,-3)[m/s^2]

ω_{CD}=0/(0.5*0.8)=0 [r/s]↺,
α_{CD}=-3000/(0.5*0.8)=-7500 [r/s^2] ↺

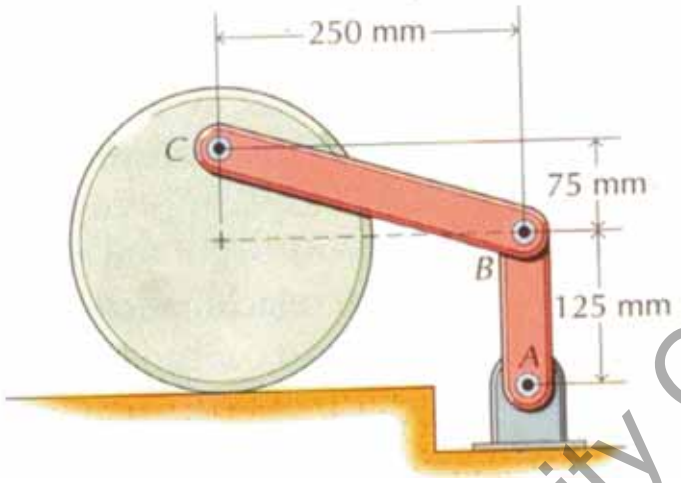
v_D=(40,-30-0*0.5*0.6)=(40,-30) [m/s],
a_D=(4,-3-7500*0.5*0.6)=(4,-2253)[m/s^2]

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 14.12.2010

Ej1: La rueda representada en la figura P14-95 está rodando sin deslizamiento sobre la superficie horizontal. En el instante representado, la rueda tiene una velocidad angular de

5.6 rad/s y una aceleración angular de 2 rad/s^2, ambas en sentido horario. Determinar la aceleración angular de los enlaces *AB* y *BC* en ese instante.



1p. Velocidad de B.

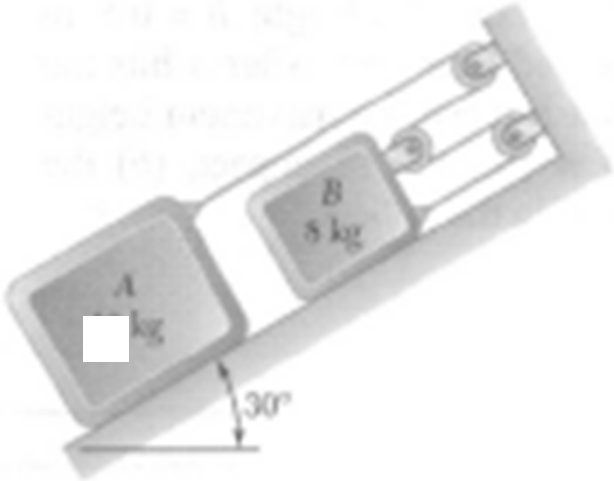
2p. Aceleración angular BC.

2p. Aceleración angular AB.

Ej2: Se liberan el bloque A de 11.x [kg] y el B de 8[kg] sobre plano inclinado de 30º y se pide:

2p. velocidad de A al moverse 5 [m]

3p. la tensión del cable.:

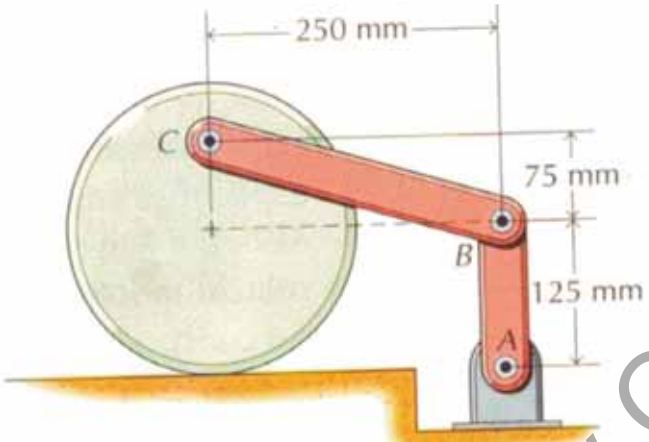


University Copy For Library Use

SOLUCIONES: Fecha: 14.12.2010

Ej1: La rueda representada en la figura P14-95 está rodando sin deslizamiento sobre la superficie horizontal. En el instante representado, la rueda tiene una velocidad angular de

5.6 rad/s y una aceleración angular de 2 rad/s^2, ambas en sentido horario. Determinar la aceleración angular de los enlaces *AB* y *BC* en ese instante.



	wCD[rad/s]	aCD[rad/s^2]	VB[mm/s]	aBC[rad/s^2]	aAB[rad/s^2]
ej01_a	-5.000E+00	-2.000E+00	1.000E+03	-2.450E+01	1.150E+01
ej01_b	-5.100E+00	-2.000E+00	1.020E+03	-2.549E+01	1.209E+01
ej01_c	-5.200E+00	-2.000E+00	1.040E+03	-2.650E+01	1.270E+01
ej01_d	-5.300E+00	-2.000E+00	1.060E+03	-2.753E+01	1.332E+01
ej01_e	-5.400E+00	-2.000E+00	1.080E+03	-2.858E+01	1.395E+01
ej01_f	-5.500E+00	-2.000E+00	1.100E+03	-2.965E+01	1.459E+01
ej01_g	-5.600E+00	-2.000E+00	1.120E+03	-3.073E+01	1.524E+01
ej01_h	-5.700E+00	-2.000E+00	1.140E+03	-3.184E+01	1.590E+01
ej01_i	-5.800E+00	-2.000E+00	1.160E+03	-3.297E+01	1.658E+01
ej01_j	-5.900E+00	-2.000E+00	1.180E+03	-3.411E+01	1.727E+01
ej01_Riley	-6.000E+00	-2.000E+00	1.200E+03	-3.528E+01	1.797E+01

$V_D=(-\omega_{CD}*125,0)$, $V_C=(-\omega_{CD}*200,0)$,
$V_B=(-\omega_{CD}*200,0)+(\omega_{BC}*75, \omega_{BC}*250)$
$V_B=(-\omega_{AB}*125, 0)$ ⇨
$\omega_{BC}=0$ y $\omega_{AB}=\omega_{CD}*1.6$,
$V_B=(-\omega_{CD}*200,0)=(-\omega_{AB}*125,0)$ →

$a_D=(-\alpha_{CD}*125,0)$, $a_C=(-\alpha_{CD}*200,-\omega^2_{CD}*75)$,
$a_B=(-\alpha_{CD}*200,-\omega^2_{CD}*75)+(-\omega^2_{BC}*250, \omega^2_{BC}*75)+(\alpha_{BC}*75, \alpha_{BC}*250)$
$a_B=(-\alpha_{AB}*125, -\omega^2_{AB}*125)$ ⇨
$\alpha_{BC}=-0.98\omega^2_{CD}$ y
$\alpha_{AB}=\alpha_{CD}*1.6+0.588\omega^2_{CD}$,

Si $\omega_{CD}=-6$ y $\alpha_{CD}=-2$ entonces:
$\alpha_{BC}=-35.28$ [r/s^2] ↻ y
$\alpha_{AB}=17.97$ [r/s2] ↺ ,

Sol RILEY 14_95:
$\alpha_{AB}=17.96$ [r/s^2] ↺ y $\alpha_{BC}=-35.28$ [r/s2] ↻

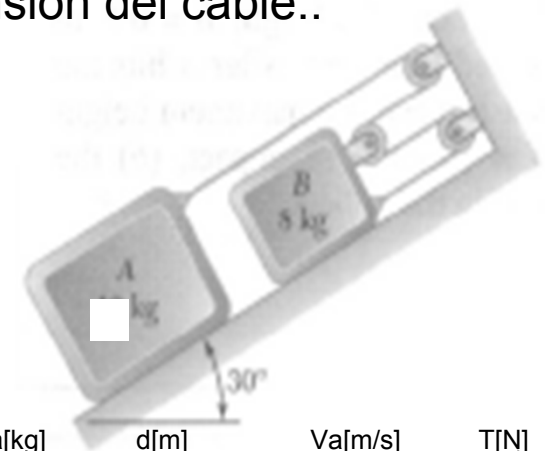
University Copy For Library Use

SOLUCIONES: Fecha: 14.12.2010

Ej2: Se liberan el bloque A de 11.x [kg] y el B de 8[kg] sobre plano inclinado de 30º y se pide:

2p. velocidad de A al moverse 5 [m]

3p. la tensión del cable.:



$x_A=-3x_B$, $x_B=-x_A/3$

$m_A g\sin30^o d-m_B g\sin30^o d/3=0.5*(m_A v^2_A+m_B v^2_A/9)$ ⇨

$v_A=\sqrt{[m_A g\sin30^o d-m_B g\sin30^o d/3)/(m_A+m_B/9)/2]}$

Para la tensión:

$m_A g\sin30^o d-T*d=0.5*(m_A v^2_A)$ ⇨

$T=m_A g\sin30^o-0.5*(m_A v^2_A)/d$

	ma[kg]	d[m]	Va[m/s]	T[N]
ej02_a	1.100E+01	5.000E+00	5.863E+00	1.613E+01
ej02_b	1.110E+01	5.000E+00	5.873E+00	1.614E+01
ej02_c	1.120E+01	5.000E+00	5.883E+00	1.615E+01
ej02_d	1.130E+01	5.000E+00	5.893E+00	1.616E+01
ej02_e	1.140E+01	5.000E+00	5.903E+00	1.617E+01
ej02_f	1.150E+01	5.000E+00	5.913E+00	1.618E+01
ej02_g	1.160E+01	5.000E+00	5.922E+00	1.619E+01
ej02_h	1.170E+01	5.000E+00	5.932E+00	1.620E+01
ej02_i	1.180E+01	5.000E+00	5.941E+00	1.621E+01
ej02_j	1.190E+01	5.000E+00	5.950E+00	1.622E+01
ej02_Beer	1.000E+01	5.000E-01	1.817E+00	1.601E+01

Si $m_A=10$ y $d=0.5$[m]

Sol BEER 13_21:

$v_A=1.818$ m/s descendiendo, T=16.02[N]

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 15.12.2009a

Ej1: Un paracaidista de masa m=100[kg] salta desde 2463[m] y se calcula que la fuerza aerodinámica que se opone a su caída es F=kv[N] si v[m/s] y k=17.65[kg/s]:

1p. Calcular velocidad máxima de caída.

1p. Calcular velocidad en función del tiempo.

1p. Calcular velocidad para t=1[s].

1p. Calcular velocidad para t=50[s].

1p. Calcular altura en función de tiempo.

Ej2: Calcular los siguientes mecanismos si la barra AB gira con ω_{AB}=(0,0,-5)[rad/s] y los puntos A y E no se mueven:

1p. CIR para 53.13º.

0.5p. ω_{BD} y ω_{DE} para 53.13º.

0.5p. $|V_D|$ para 53.13º.

1p. CIR para 90º.

0.5p. ω_{BD} y ω_{DE} para 90º.

0.5p. $|V_D|$ para 90º.

0.5p. CIR para 96.38º.

0.5p. Opinar sobre problemática de posición 96.38º.

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b) \quad \log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

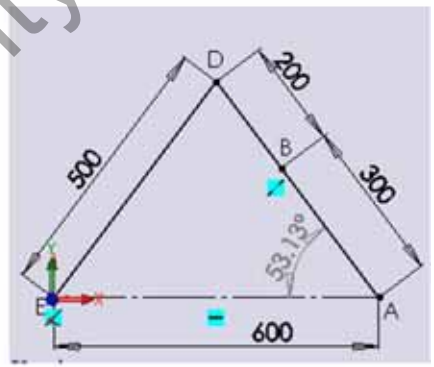
$$\int \frac{K}{x^2 - a^2} dx = \frac{K}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C \qquad \int \frac{K}{ax+b} dx = \frac{K}{a} \ln(ax+b) + C$$

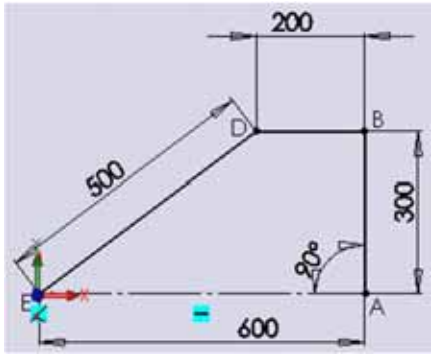
$$Ec_1 + U^c_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

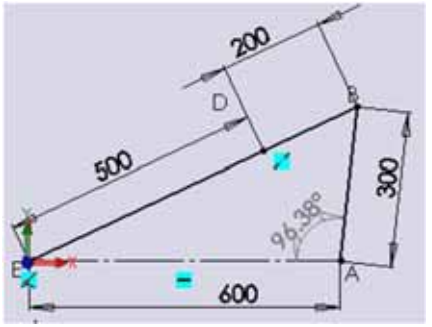
$$\int_{S_1}^{S_2} R_t ds = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$m v_1 + \int_1^2 F \partial t = m v_2$$

Cotas en mm







University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 15.12.2009b

Ej1: Un paracaidista de masa m=90[kg] salta desde 2463[m] y se calcula que la fuerza aerodinámica que se opone a su caída es F=k*v[N] si v[m/s] y k=15.89[kg/s]:

1p. Calcular velocidad máxima de caída.

1p. Calcular velocidad en función del tiempo.

1p. Calcular velocidad para t=1[s].

1p. Calcular velocidad para t=50[s].

1p. Calcular altura en función de tiempo.

Ej2: Calcular los siguientes mecanismos si la barra AB gira con ω_{AB}=(0,0,-6)[rad/s] y los puntos A y E no se mueven:

1p. CIR para 53.13º.

0.5p. ω_{BD} y ω_{DE} para 53.13º.

0.5p. $|V_D|$ para 53.13º.

1p. CIR para 90º.

0.5p. ω_{BD} y ω_{DE} para 90º.

0.5p. $|V_D|$ para 90º.

0.5p. CIR para 96.38º.

0.5p. Opinar sobre problemática de posición 96.38º.

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b) \quad \log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

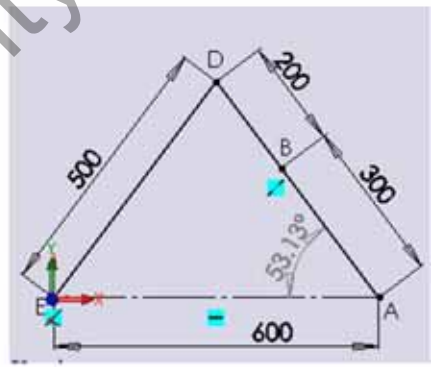
$$\int \frac{K}{x^2 - a^2} dx = \frac{K}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C \qquad \int \frac{K}{ax+b} dx = \frac{K}{a} \ln(ax+b) + C$$

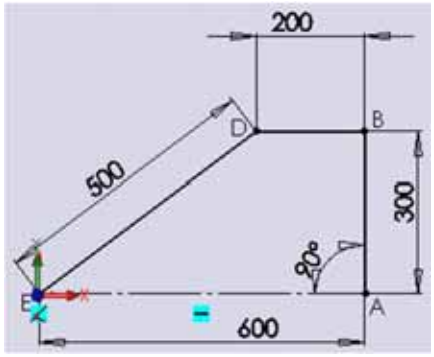
$$Ec_1 + U^c_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

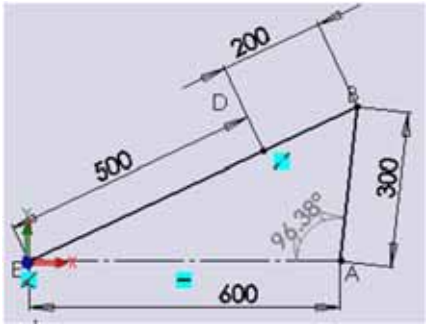
$$\int_{S_1}^{S_2} R_t ds = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$m v_1 + \int_1^2 F \partial t = m v_2$$

Cotas en mm







University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 15.12.2009c

Ej1: Un paracaidista de masa m=85[kg] salta desde 2463[m] y se calcula que la fuerza aerodinámica que se opone a su caída es F=k*v[N] si v[m/s] y k=15.00[kg/s]:

1p. Calcular velocidad máxima de caída.

1p. Calcular velocidad en función del tiempo.

1p. Calcular velocidad para t=1[s].

1p. Calcular velocidad para t=50[s].

1p. Calcular altura en función de tiempo.

Ej2: Calcular los siguientes mecanismos si la barra AB gira con ω_{AB}=(0,0,-7)[rad/s] y los puntos A y E no se mueven:

1p. CIR para 53.13º.

0.5p. ω_{BD} y ω_{DE} para 53.13º.

0.5p. $|V_D|$ para 53.13º.

1p. CIR para 90º.

0.5p. ω_{BD} y ω_{DE} para 90º.

0.5p. $|V_D|$ para 90º.

0.5p. CIR para 96.38º.

0.5p. Opinar sobre problemática de posición 96.38º.

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b) \quad \log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

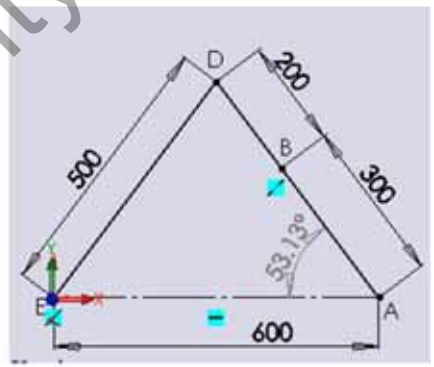
$$\int \frac{K}{x^2 - a^2} dx = \frac{K}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C \qquad \int \frac{K}{ax+b} dx = \frac{K}{a} \ln(ax+b) + C$$

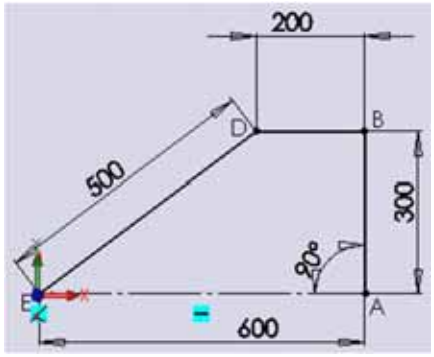
$$Ec_1 + U^c_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

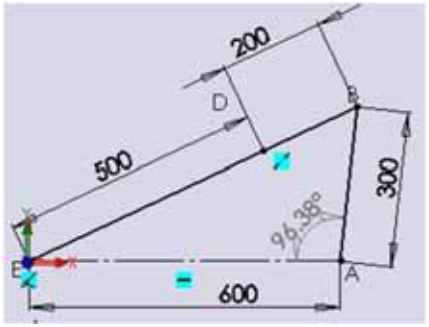
$$\int_{S_1}^{S_2} R_t ds = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$m v_1 + \int_1^2 F \partial t = m v_2$$

Cotas en mm







University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 15.12.2009d

Ej1: Un paracaidista de masa m=75[kg] salta desde 2463[m] y se calcula que la fuerza aerodinámica que se opone a su caída es F=k*v[N] si v[m/s] y k=13.24[kg/s]:

1p. Calcular velocidad máxima de caída.

1p. Calcular velocidad en función del tiempo.

1p. Calcular velocidad para t=1[s].

1p. Calcular velocidad para t=50[s].

1p. Calcular altura en función de tiempo.

Ej2: Calcular los siguientes mecanismos si la barra AB gira con ω_{AB}=(0,0,-8)[rad/s] y los puntos A y E no se mueven:

1p. CIR para 53.13º.

0.5p. ω_{BD} y ω_{DE} para 53.13º.

0.5p. $|V_D|$ para 53.13º.

1p. CIR para 90º.

0.5p. ω_{BD} y ω_{DE} para 90º.

0.5p. $|V_D|$ para 90º.

0.5p. CIR para 96.38º.

0.5p. Opinar sobre problemática de posición 96.38º.

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b) \quad \log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

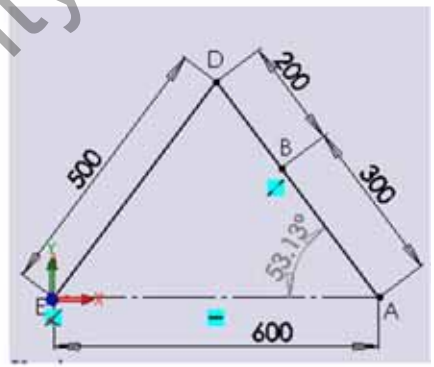
$$\int \frac{K}{x^2 - a^2} dx = \frac{K}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C \qquad \int \frac{K}{ax+b} dx = \frac{K}{a} \ln(ax+b) + C$$

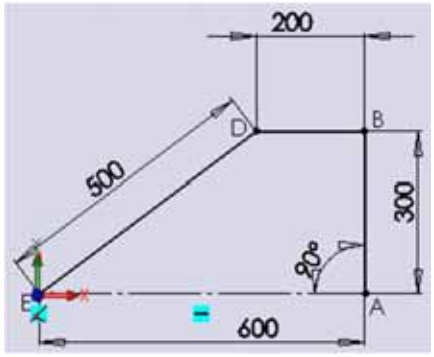
$$Ec_1 + U^c_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

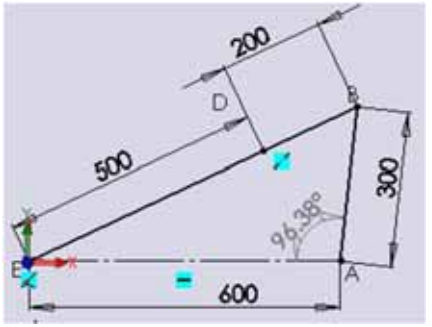
$$\int_{S_1}^{S_2} R_t ds = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$m v_1 + \int_1^2 F \partial t = m v_2$$

Cotas en mm







University Copy For Library Use

SOLUCIONES:

Ej1: Un paracaidista de masa m=75[kg] salta desde 2463[m] y se calcula que la fuerza aerodinámica que se opone a su caída es F=kv[N] si v[m/s] y k=17.65[kg/s]:

1p. Calcular velocidad máxima de caída.

1p. Calcular velocidad en función del tiempo.

1p. Calcular velocidad para t=1[s].

1p. Calcular velocidad para t=50[s].

1p. Calcular altura en función de tiempo.

$$v = -\frac{mg}{k} = -55.58[m/s] = -200[km/h]$$

$$v = \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right)$$

$$v_{1s} = -8.99[m/s]$$

$$v_{50s} = -55.55[m/s]$$

$$h = 2463 + \frac{mg}{k}\left(-\frac{m}{k}\left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right) - t\right)$$

$$h_{50s} = 0$$

Ej2: Calcular los siguientes mecanismos si la barra AB gira con ω_{AB}=(0,0,-8)[rad/s] y los puntos A y E no se mueven:

1p. CIR para 53.13º.

0.5p. ω_{BD} y ω_{DE} para 53.13º.

0.5p. $|V_D|$ para 53.13º.

1p. CIR para 90º.

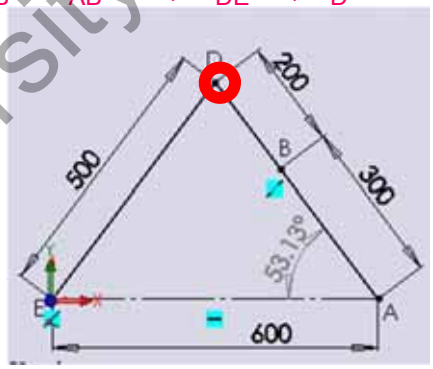
0.5p. ω_{BD} y ω_{DE} para 90º.

0.5p. $|V_D|$ para 90º.

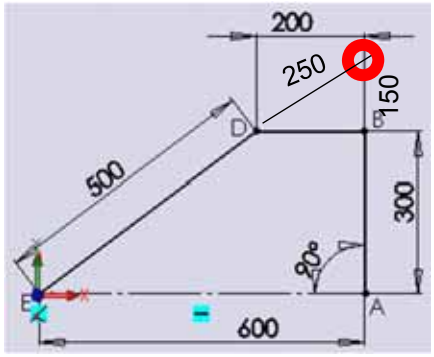
0.5p. CIR para 96.38º.

0.5p. Opinar sobre problemática de posición 96.38º.

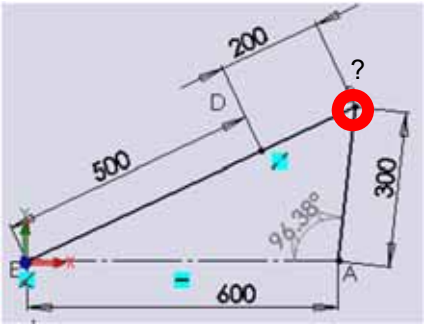
ω_{DB}=-ω_{AB}*3/2, ω_{DE}=0, v_D=0



ω_{DB}=-ω_{AB}*2, ω_{DE}=ω_{AB}, v_D=ω_{AB}*0.5

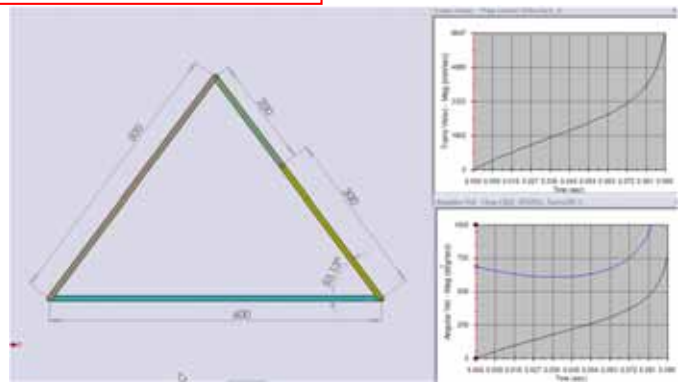


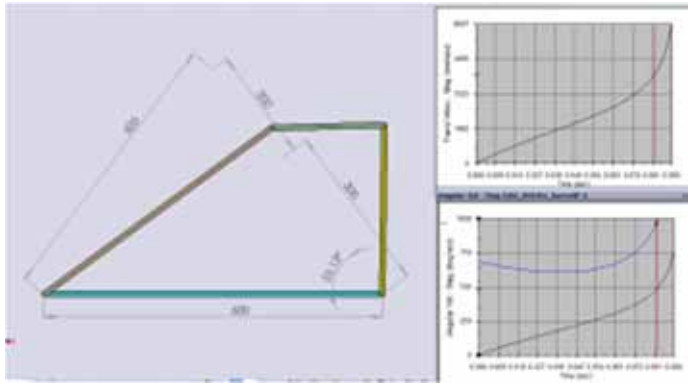
Barra fin recorrido.

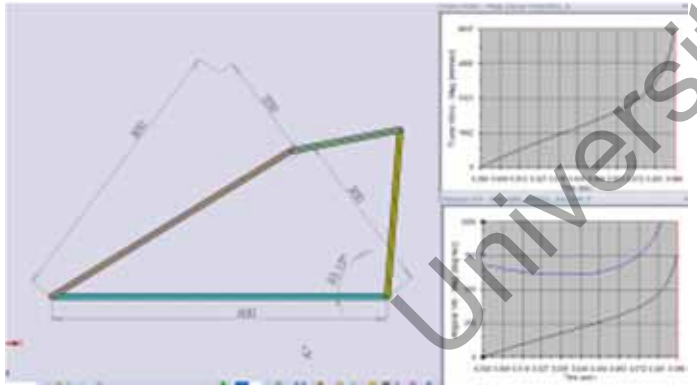


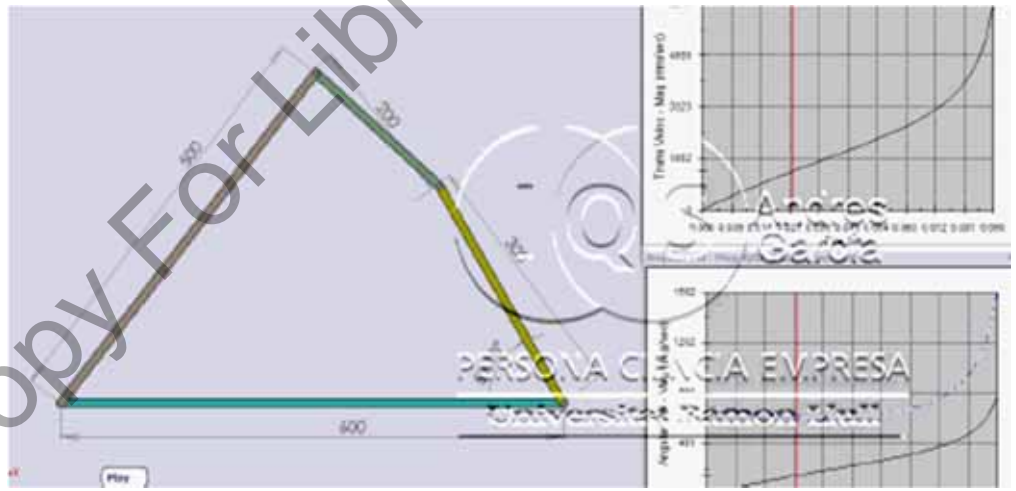
University Copy For Library Use

SOLUCIONES:









Motion Analysis Messages

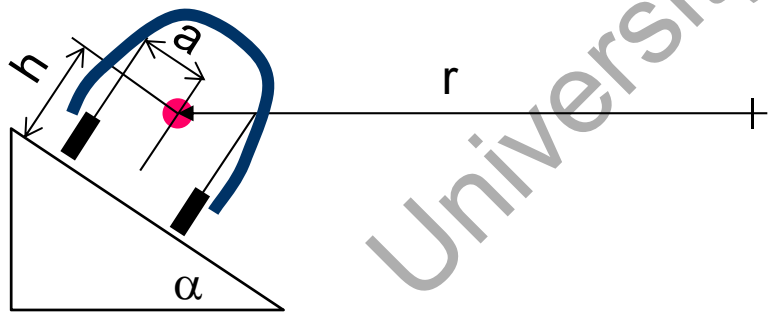
```
At time 9.448262E-02 the Kinematic solver is stopping because
time step 1.474594E-11 is below minimum time step size 1.979167E-11
Check for discontinuity in motion inputs.
```

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 16.12.2008a

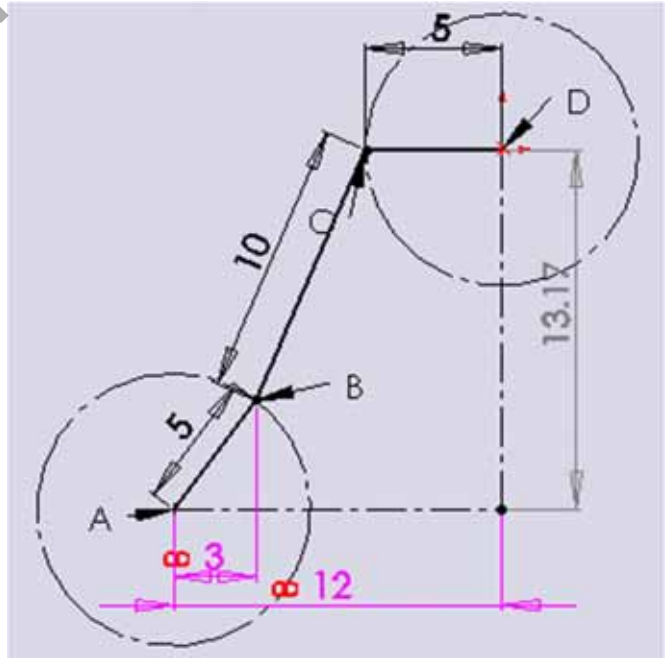
Ej1: Calcular el ángulo del peralte α de la carretera para que el coche de masa m=1100[kg] distancia del centro de gravedad al suelo h=1[m] y distancia entre ruedas 2a=3[m] pueda coger una curva de radio r=100[m] a velocidad v=30[m/s] considerando:

1p. Plantear el equilibrio de las fuerzas.
1p. Considerar no deslice sin rozamiento.
1p. Comprobar no vuelca sin rozamiento.
1p. Considerar no deslice con roz. μ=0.5.
1p. Comprobar no vuelca con roz. μ=0.5.



Ej2: Suponiendo que la barra AB gira en sentido horario con ω=5[rad/s] constante y que A y D son puntos fijos calcular:

1p. Posición del CIR.
1p. Velocidad angular de barra BC.
1p. Velocidad angular de CD.
1p. Velocidad del punto C.
1p. Aceleración del punto C.

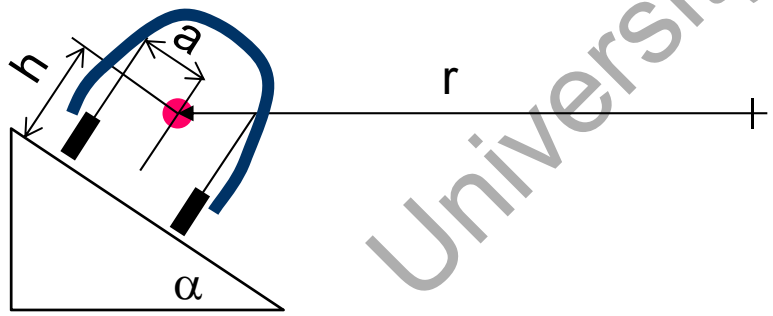


University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 16.12.2008b

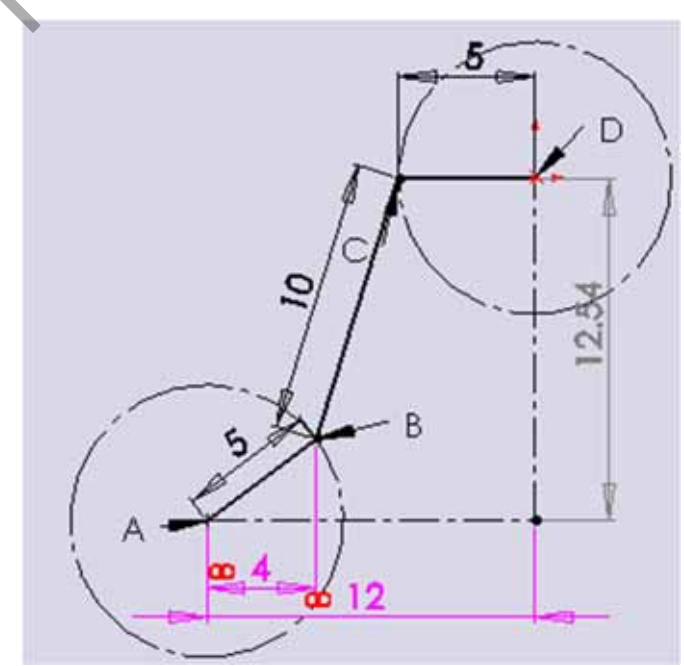
Ej1: Calcular el ángulo del peralte α de la carretera para que el coche de masa m=900[kg] distancia del centro de gravedad al suelo h=1[m] y distancia entre ruedas 2a=3[m] pueda coger una curva de radio r=80[m] a velocidad v=20[m/s] considerando:

1p. Plantear el equilibrio de las fuerzas.
1p. Considerar no deslice sin rozamiento.
1p. Comprobar no vuelca sin rozamiento.
1p. Considerar no deslice con roz. μ=0.5.
1p. Comprobar no vuelca con roz. μ=0.5.



Ej2: Suponiendo que la barra AB gira en sentido horario con ω=5[rad/s] constante y que A y D son puntos fijos calcular:

1p. Posición del CIR.
1p. Velocidad angular de barra BC.
1p. Velocidad angular de CD.
1p. Velocidad del punto C.
1p. Aceleración del punto C.

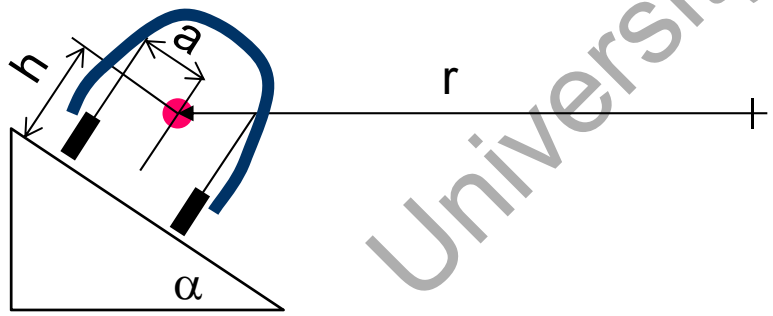


University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 16.12.2008c

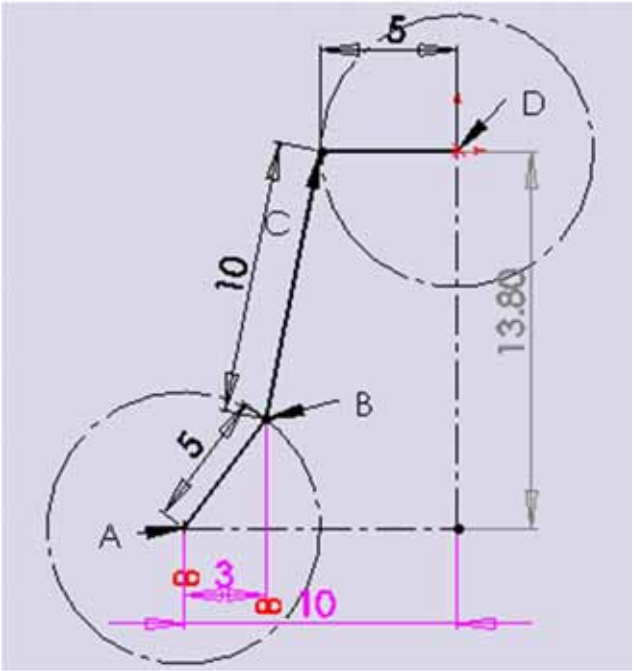
Ej1: Calcular el ángulo del peralte α de la carretera para que el coche de masa m=1100[kg] distancia del centro de gravedad al suelo h=1[m] y distancia entre ruedas 2a=3[m] pueda coger una curva de radio r=90[m] a velocidad v=30[m/s] considerando:

1p. Plantear el equilibrio de las fuerzas.
1p. Considerar no deslice sin rozamiento.
1p. Comprobar no vuelca sin rozamiento.
1p. Considerar no deslice con roz. μ=0.5.
1p. Comprobar no vuelca con roz. μ=0.5.



Ej2: Suponiendo que la barra AB gira en sentido horario con ω=5[rad/s] constante y que A y D son puntos fijos calcular:

1p. Posición del CIR.
1p. Velocidad angular de barra BC.
1p. Velocidad angular de CD.
1p. Velocidad del punto C.
1p. Aceleración del punto C.

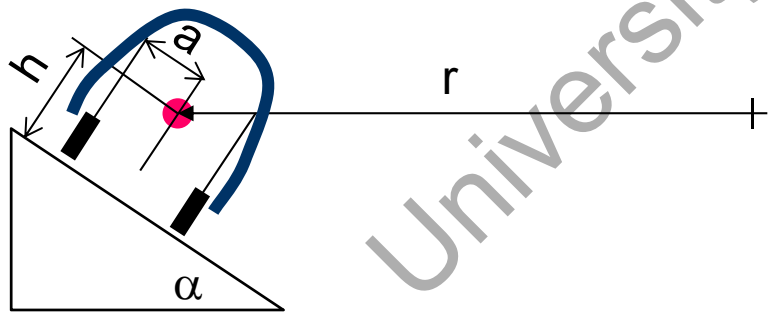


University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 16.12.2008d

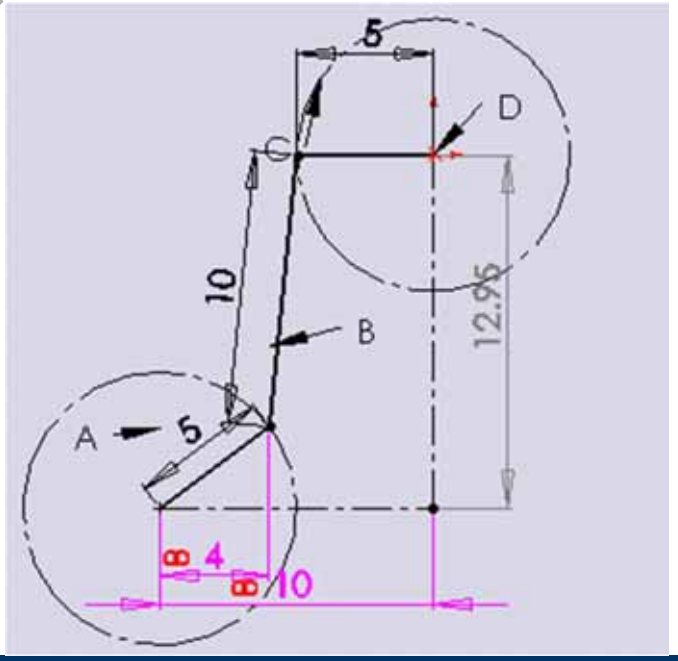
Ej1: Calcular el ángulo del peralte α de la carretera para que el coche de masa m=900[kg] distancia del centro de gravedad al suelo h=1[m] y distancia entre ruedas 2a=3[m] pueda coger una curva de radio r=70[m] a velocidad v=20[m/s] considerando:

1p. Plantear el equilibrio de las fuerzas.
1p. Considerar no deslice sin rozamiento.
1p. Comprobar no vuelca sin rozamiento.
1p. Considerar no deslice con roz. μ=0.5.
1p. Comprobar no vuelca con roz. μ=0.5.



Ej2: Suponiendo que la barra AB gira en sentido horario con ω=5[rad/s] constante y que A y D son puntos fijos calcular:

1p. Posición del CIR.
1p. Velocidad angular de barra BC.
1p. Velocidad angular de CD.
1p. Velocidad del punto C.
1p. Aceleración del punto C.



University Copy For Library Use

SOLUCIONES

Ej1: Calcular el ángulo del peralte α de la carretera para que el coche de masa m[kg] distancia del centro de gravedad al suelo h=1[m] y distancia entre ruedas 2a=3[m] pueda coger una curva de radio r[m] a velocidad v[m/s] considerando:

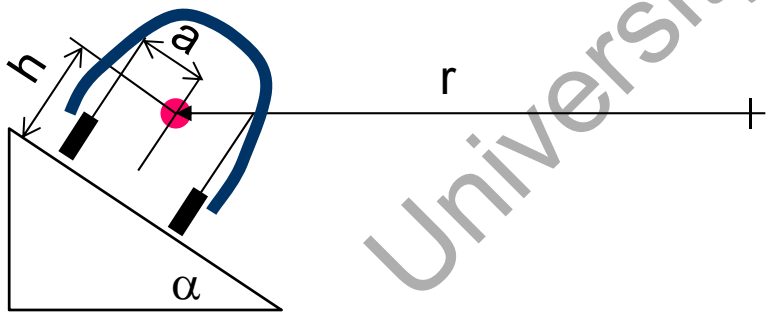
1p. Plantear el equilibrio de las fuerzas.

1p. Considerar no deslice sin rozamiento.

1p. Comprobar no vuelca sin rozamiento.

1p. Considerar no deslice con roz. μ=0.5.

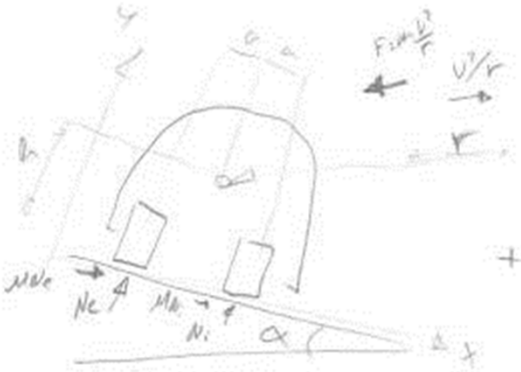
1p. Comprobar no vuelca con roz. μ=0.5.



	ej01_a	ej01_b	ej01_c	ej01_d	Riley 15-159
m[kg]	1.100E+03	9.000E+02	1.100E+03	9.000E+02	9.000E+02
v[m/s]	3.000E+01	2.000E+01	3.000E+01	2.000E+01	2.778E+01
r[m]	1.000E+02	8.000E+01	9.000E+01	7.000E+01	2.700E+02
h[m]	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00	1.000E+00
a[m]	1.500E+00	1.500E+00	1.500E+00	1.500E+00	1.500E+00
g[m/s^2]	9.807E+00	9.807E+00	9.807E+00	9.807E+00	9.807E+00
μ1[-]	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
μ2[-]	5.000E-01	5.000E-01	5.000E-01	5.000E-01	2.915E-01
Fg	1.079E+04	8.826E+03	1.079E+04	8.826E+03	8.826E+03
Fc	9.900E+03	4.500E+03	1.100E+04	5.143E+03	2.572E+03
a[º]	4.254E+01	2.701E+01	4.556E+01	3.023E+01	1.625E+01
Ni[N]	7.321E+03	4.954E+03	7.703E+03	5.108E+03	4.597E+03
No[N]	7.321E+03	4.954E+03	7.703E+03	5.108E+03	4.597E+03
a[º]	1.598E+01	4.493E-01	1.899E+01	3.663E+00	-5.086E-03
Ni[N]	4.365E+03	2.954E+03	4.593E+03	3.046E+03	3.556E+03
No[N]	5.775E+03	3.908E+03	6.077E+03	4.029E+03	4.229E+03

University Copy For Library Use

SOLUCIONES



$$\sum F_x: \quad mg\sin\alpha - m\frac{v^2}{r}\cos\alpha + \mu(N_e + N_i) = 0 \Rightarrow$$

$$\sum F_y: \quad -mg\cos\alpha - m\frac{v^2}{r}\sin\alpha + (N_i + N_e) = 0 \Rightarrow$$

$$* \quad tg\,\alpha = \frac{\left(\frac{v^2}{r} - \mu g\right)}{\left(g + \mu\frac{v^2}{r}\right)} \Rightarrow \boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{v^2}{r} - \mu g}{g + \mu\frac{v^2}{r}}\right)}$$

$$\mu = 0 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v^2}{rg}\right) \quad \text{o} \quad mg\sin\alpha - m\frac{v^2}{r}\cos\alpha = 0$$

$$\mu = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{v^2}{r} - 0{,}5g}{g + 0{,}5\frac{v^2}{r}}\right)$$

$$\sum M_{Ge}: \quad N_i\,2a + m\frac{v^2}{r}\cos\alpha \cdot h - mg\sin\alpha \cdot h - mg\cos\alpha \cdot a - m\frac{v^2}{r}\sin\alpha \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N_i = m \cdot \frac{\left(-\frac{v^2}{r}h + ga\right)\cos\alpha + \left(gh - \frac{v^2}{r}a\right)\sin\alpha}{2a}}$$

$$\boxed{N_e = -N_i + mg\cos\alpha + m\frac{v^2}{r}\sin\alpha}$$

$$\text{Si } \mu = 0 \Rightarrow N_i = N_0 = \frac{mg\cos\alpha + m\frac{v^2}{r}\sin\alpha}{2}$$

No vuelca $\Rightarrow N_i$ y $N_e > 0$

Si $m\frac{v^2}{r}\cos\alpha > mg\sin\alpha \Rightarrow$ quiere volcar hacia afuera $\Rightarrow$ comprobar $N_i > 0$

University Copy For Library Use

SOLUCIONES

Ej2: Suponiendo que la barra AB gira en sentido horario con ω=5[rad/s] constante y que A y D son puntos fijos calcular:

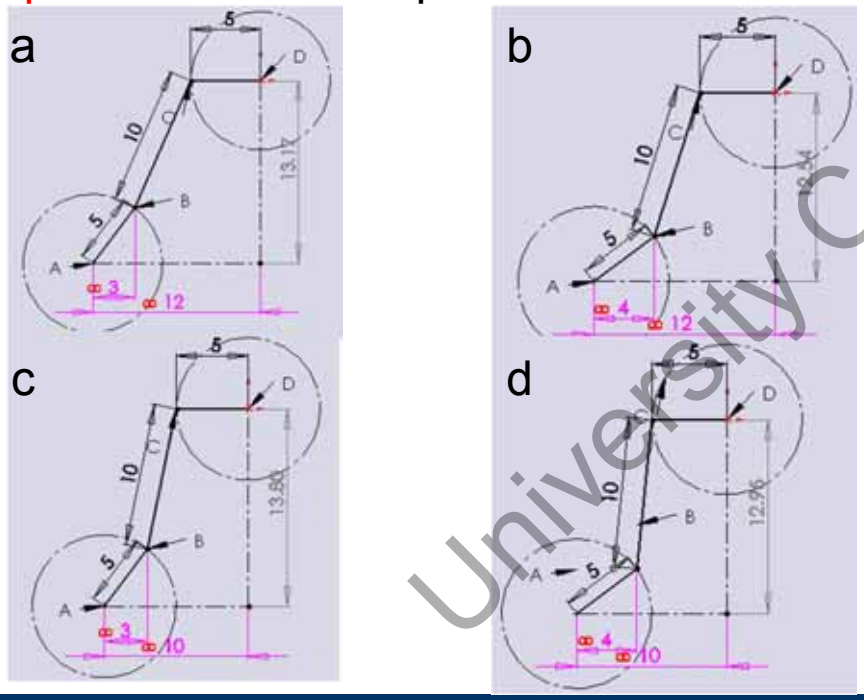
1p. Posición del CIR.

1p. Velocidad angular de barra BC.

1p. Velocidad angular de CD.

1p. Velocidad del punto C.

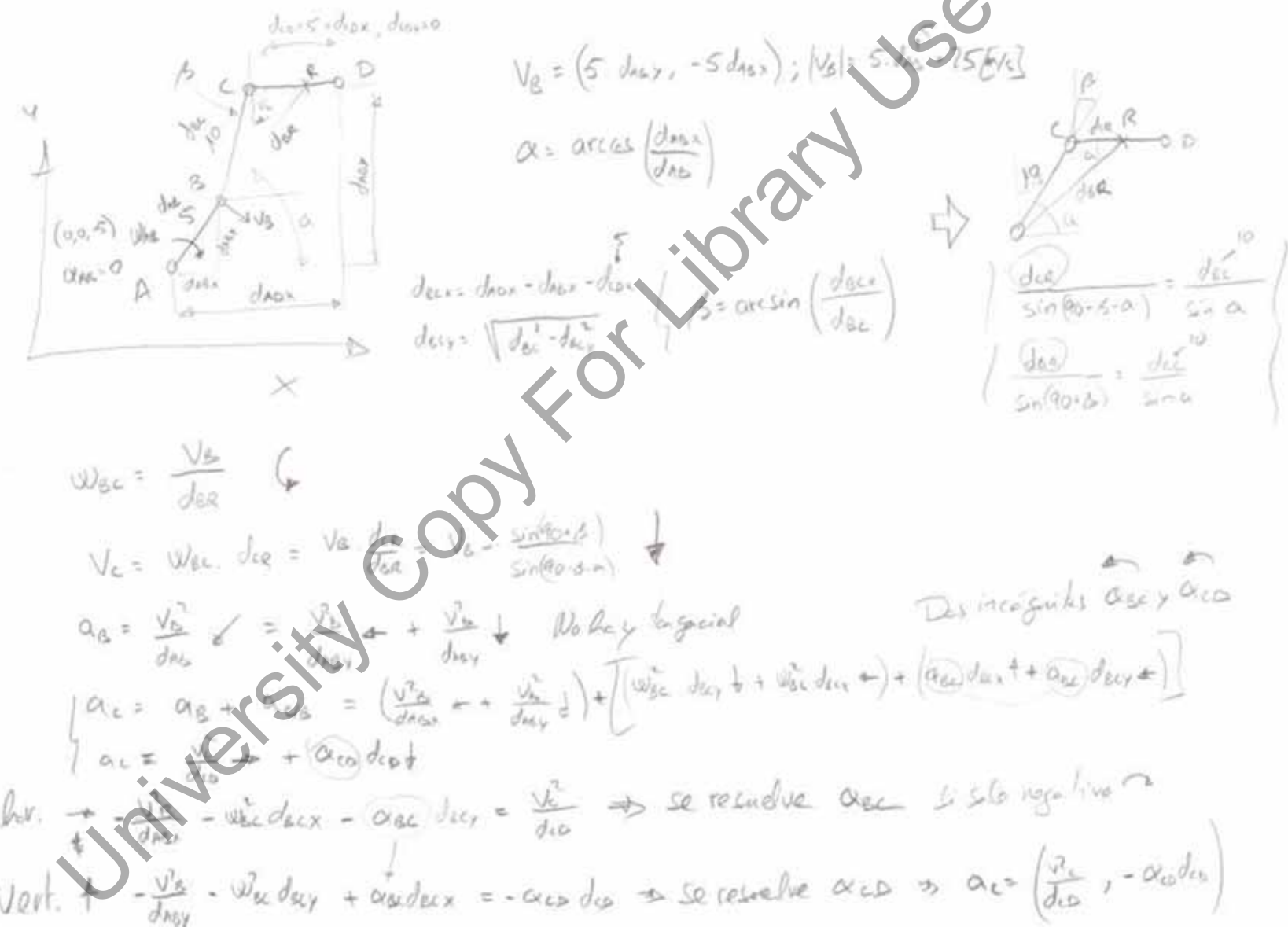
1p. Aceleración del punto C.



	ej02_a	ej02_b	ej02_c	ej02_d
dAB[m]	5.000E+00	5.000E+00	5.000E+00	5.000E+00
dBC[m]	1.000E+01	1.000E+01	1.000E+01	1.000E+01
dCD[m]	5.000E+00	5.000E+00	5.000E+00	5.000E+00
dADx[m]	1.200E+01	1.200E+01	1.000E+01	1.000E+01
dADy[m]	1.000E+01	1.000E+01	1.000E+01	1.000E+01
dABx[m]	3.000E+00	4.000E+00	3.000E+00	4.000E+00
dABy[m]	4.000E+00	3.000E+00	4.000E+00	3.000E+00
dBCx[m]	4.000E+00	3.000E+00	2.000E+00	1.000E+00
dBCy[m]	9.165E+00	9.539E+00	9.798E+00	9.950E+00
w[rad/s]	-5.000E+00	-5.000E+00	-5.000E+00	-5.000E+00
vBx[m/s]	2.000E+01	1.500E+01	2.000E+01	1.500E+01
vBy[m/s]	-1.500E+01	-2.000E+01	-1.500E+01	-2.000E+01
a[º]	5.313E+01	3.687E+01	5.313E+01	3.687E+01
vB[m/s]	2.500E+01	2.500E+01	2.500E+01	2.500E+01
b[º]	2.358E+01	1.746E+01	1.154E+01	5.739E+00
dBR[m]	1.146E+01	1.590E+01	1.225E+01	1.658E+01
dCR[m]	2.874E+00	9.719E+00	5.348E+00	1.227E+01
wBC[rad/s]	2.182E+00	1.572E+00	2.041E+00	1.508E+00
vC[m/s]	6.271E+00	1.528E+01	1.092E+01	1.849E+01
wCD[rad/s]	1.254E+00	3.057E+00	2.184E+00	3.698E+00
aBC[rad/s^2]	-1.112E+01	-1.616E+01	-1.094E+01	-1.715E+01
aCD[rad/s^2]	3.762E+01	2.941E+01	3.254E+01	2.295E+01
acx[m/s^2]	7.866E+00	4.671E+01	2.384E+01	6.839E+01
acy[m/s^2]	-1.881E+02	-1.471E+02	-1.627E+02	-1.148E+02
ac[m/s^2]	1.883E+02	1.543E+02	1.644E+02	1.336E+02

University Copy For Library Use

SOLUCIONES



University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Tercer control de cuatro evaluado con 0.80 puntos de 3.50 del total de los controles.

University Copy For Library Use

S29t.- Momentos de Inercia.

University Copy For Library Use

Mejora 1415 ....

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios de dinámica de partículas con movimiento rectilíneo, movimiento curvilínea y con composición de movimientos.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos sesión.

➢ Comprender el concepto e inercia de masa y saber calcularlo para un sistema de partículas, para un sólido integrando o simplificando como suma y resta de figuras conocidas que es necesario para poder calcular fuerzas y pares necesarios en movimiento.

➢ Saber calcular radio de giro y calcular Steiner.

➢ Calcular inercia de masa de figuras planas y comprender la importancia de espesor.

➢ Saber calcular direcciones principales.

$$I = \int_m r^2 dm$$

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

$$I_{xm} = \rho t I_{xA}$$

$$I_{ym} = \rho t I_{yA}$$

$$I_{zm} = \rho t \left(I_{xA} + I_{yA} \right)$$

$$I_{xy} = \int_m xy dm;$$

$$I_{x'y'} = I_{xyG} + \overline{xy} m;$$

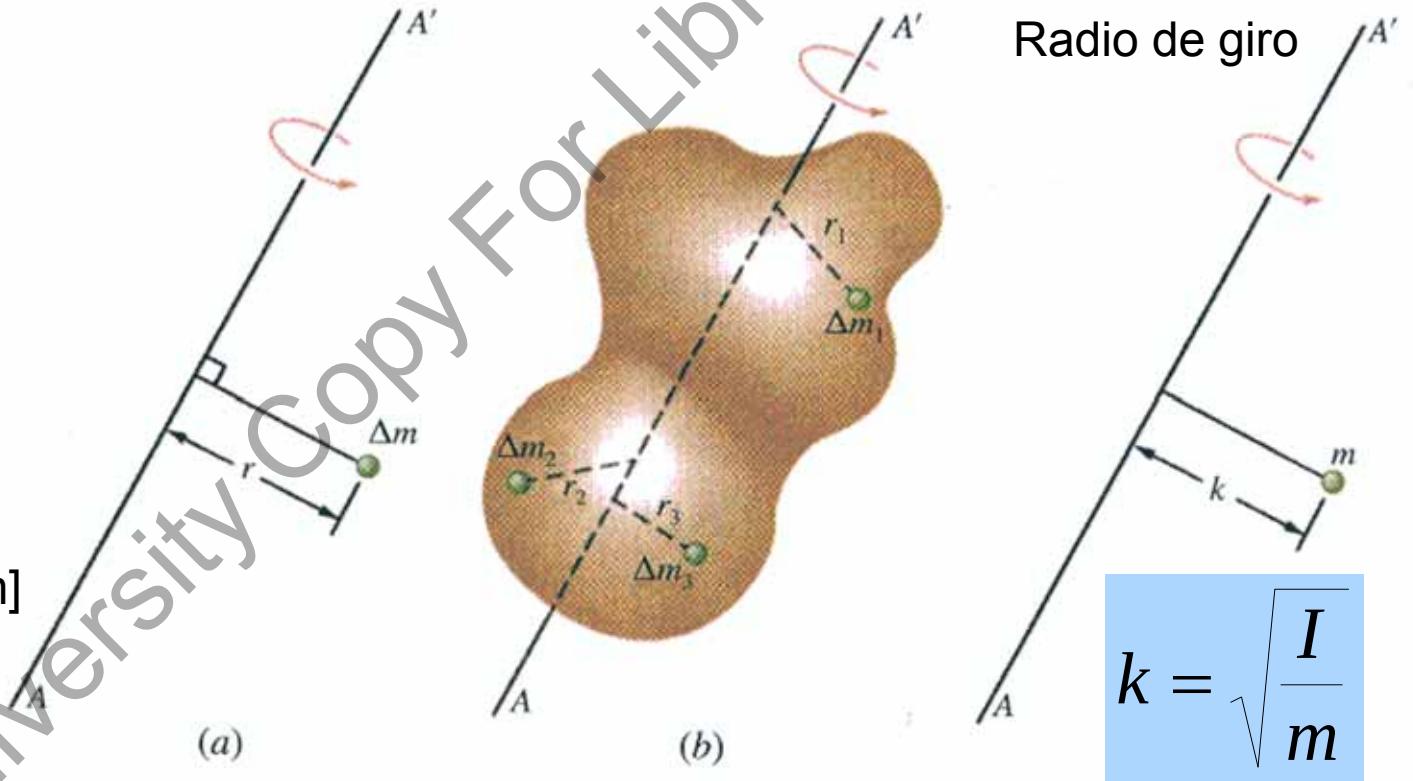
University Copy For Library Use

• Momentos de inercia.

En la parte de estática aprendimos a calcular los momentos de inercia. Ahora veremos su aplicación en dinámica al girar un cuerpo sobre un eje.

$$I = \int_m r^2 dm$$

Par $M=I\alpha$ [$kg \cdot m^2/s^2=N \cdot m$]



Radio de giro

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

Par $M=kma=km\alpha k=\alpha I$ [$kg \cdot m/s2=N \cdot m$]

University Copy For Library Use

- Simplificación para sólidos planos de espesor constante.

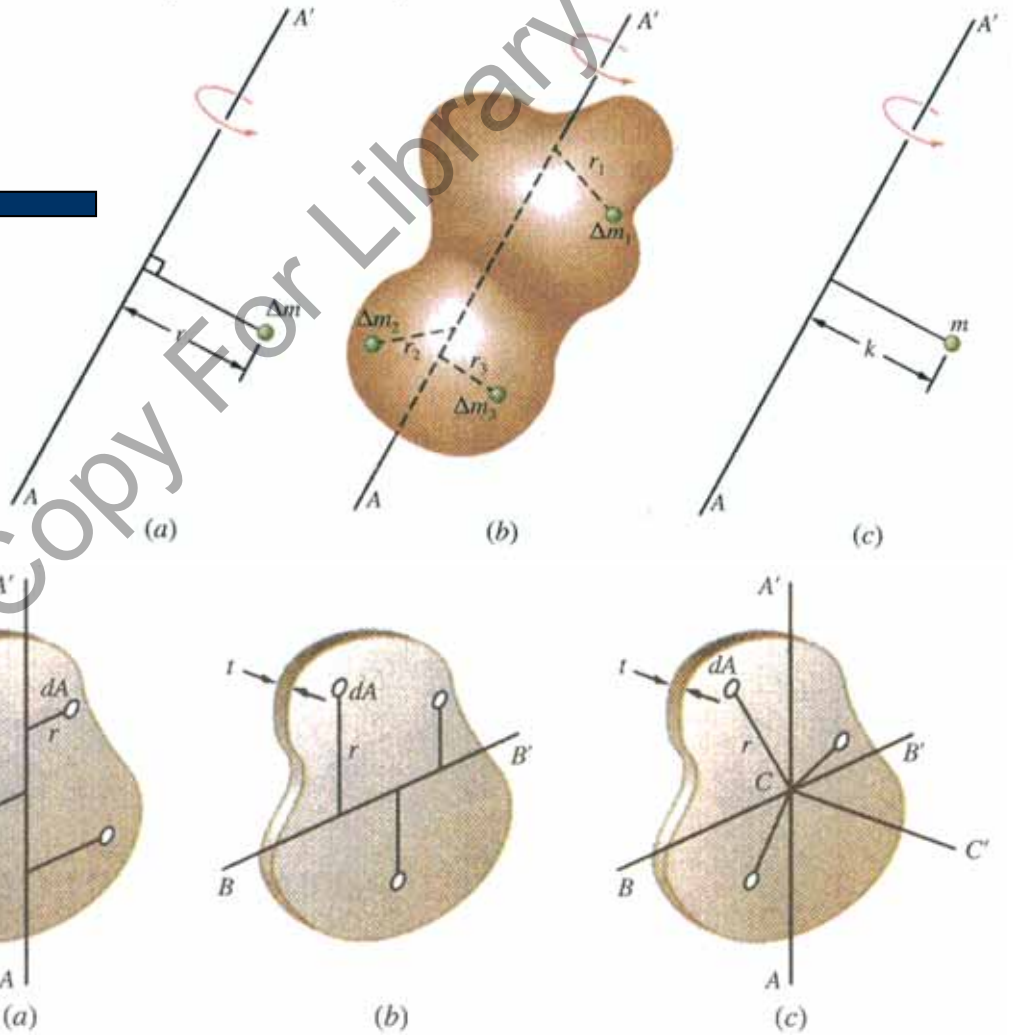
Si el sólido es plano de espesor constante se puede simplificar las inercias del sólido con las del área plana.

$t=f(AA')$ ⟸

Válido para t pequeño

$$I_{xm} = \rho t I_{xA}$$
$$I_{ym} = \rho t I_{yA}$$
$$I_{zm} = \rho t \left(I_{xA} + I_{yA}\right)$$

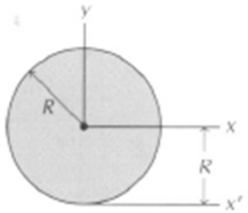
t=ctte ⟸



University Copy For Library Use

• Ejemplo cálculo inercia piezas espesor constante.

Supongamos que queremos saber la inercia de un cilindro de radio r y altura h. Sabemos la inercia de un círculo de radio r por tablas.



$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{x'} = \frac{5\pi R^4}{4}$$

$$A = \pi R^2$$

Para volumen de cilindro será:

$$I_{xm} = \rho t I_{xA} = \rho h \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_{ym} = \rho t I_{yA} = \rho h \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_{zm} = \rho t \left(I_{xA} + I_{yA}\right) = \rho h \frac{\pi r^4}{2}$$

Comprobamos para r=10, h=10 y densidad 8000kg/m³.

Comprobamos para r=10

Section properties of Sketch1 of Part2

Area = 314.16 millimeters^2

Centroid relative to sketch origin: (millimeters)
X = 0.00
Y = 0.00

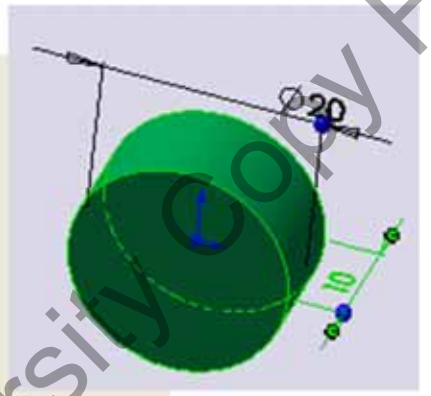
Centroid relative to part origin: (millimeters)
X = 0.00
Y = 0.00
Z = 0.00

Moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ^ 4)
Lxx = 7853.98 Lxy = 0.00
Lyx = 0.00 Lyy = 7853.98

Polar moment of inertia of the area, at the centroid = 15707.96 millimeters ^ 4

Angle between principal axes and sketch axes = 0.00 degrees

Principal moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ^ 4)
Mx = 7853.98
My = 7853.98



Mass properties of Part2 (Part Configuration - Predeterminado)

Output coordinate System: -- default --

Density = 0.0080 grams per cubic millimeter

Mass = 25.1327 grams

Volume = 3141.5927 cubic millimeters

Surface area = 1256.6371 millimeters^2

Center of mass: (millimeters)
X = 0.0000
Y = 0.0000
Z = 0.0000

Error SolidWORKS:
ó teoría 628.32 ??

Principal axes of inertia and principal moments of inertia: (grams * square millimeters
Taken at the center of mass.
Ix = (1.0000, 0.0000, 0.0000) Px = 837.7580
Iy = (0.0000, 1.0000, 0.0000) Py = 837.7580
Iz = (0.0000, 0.0000, 1.0000) Pz = 1256.6371

Moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the center of mass and aligned with the output coordinate system.
Lxx = 837.7580 Lxy = 0.0000 Lxz = 0.0000
Lyx = 0.0000 Lyy = 837.7580 Lyz = 0.0000
Lzx = 0.0000 Lzy = 0.0000 Lzz = 1256.6371

University Copy For Library Use

• Comparación con Catia y Tablas.

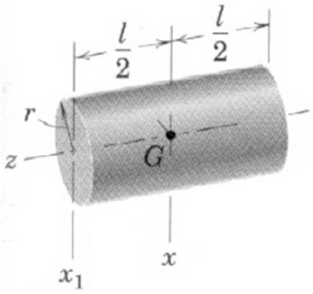
Como SolidWorks nos da un valor diferente al esperado teóricamente usaremos otros métodos para validar la teoría.

Volumen cilindro= $\pi r^2 h$, Masa=$\rho \pi r^2 h$.

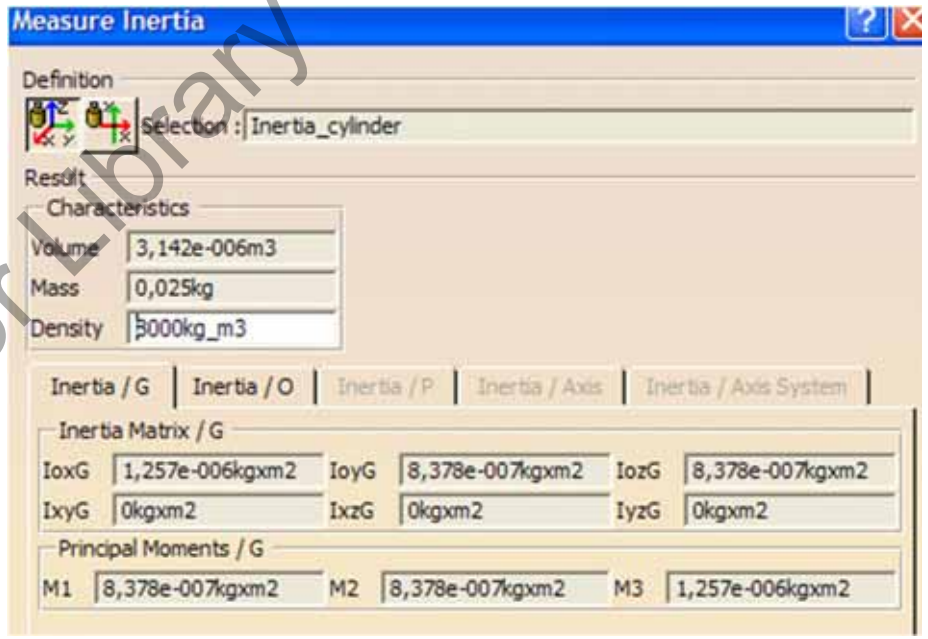
$$I_{xm} = I_{ym} = \rho t I_{xA} = \rho h \frac{\pi r^4}{4} = ? \frac{mr^2}{4} + \frac{mh^2}{12} =$$

$$\rho h \frac{\pi r^4}{4} + \rho h \frac{\pi r^2 h^2}{4} (noOK)$$

$$I_{zm} = \rho t \left(I_{xA} + I_{yA} \right) = \rho h \frac{\pi r^4}{2} = ? \frac{mr^2}{2} = \rho h \frac{\pi r^4}{2} (OK)$$



Circular Cylinder	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$



University Copy For Library Use

• Comprobación espesor pequeño.

Supongamos que queremos saber la inercia de un cilindro de radio r y altura h. Sabemos la inercia de un círculo de radio r por tablas.

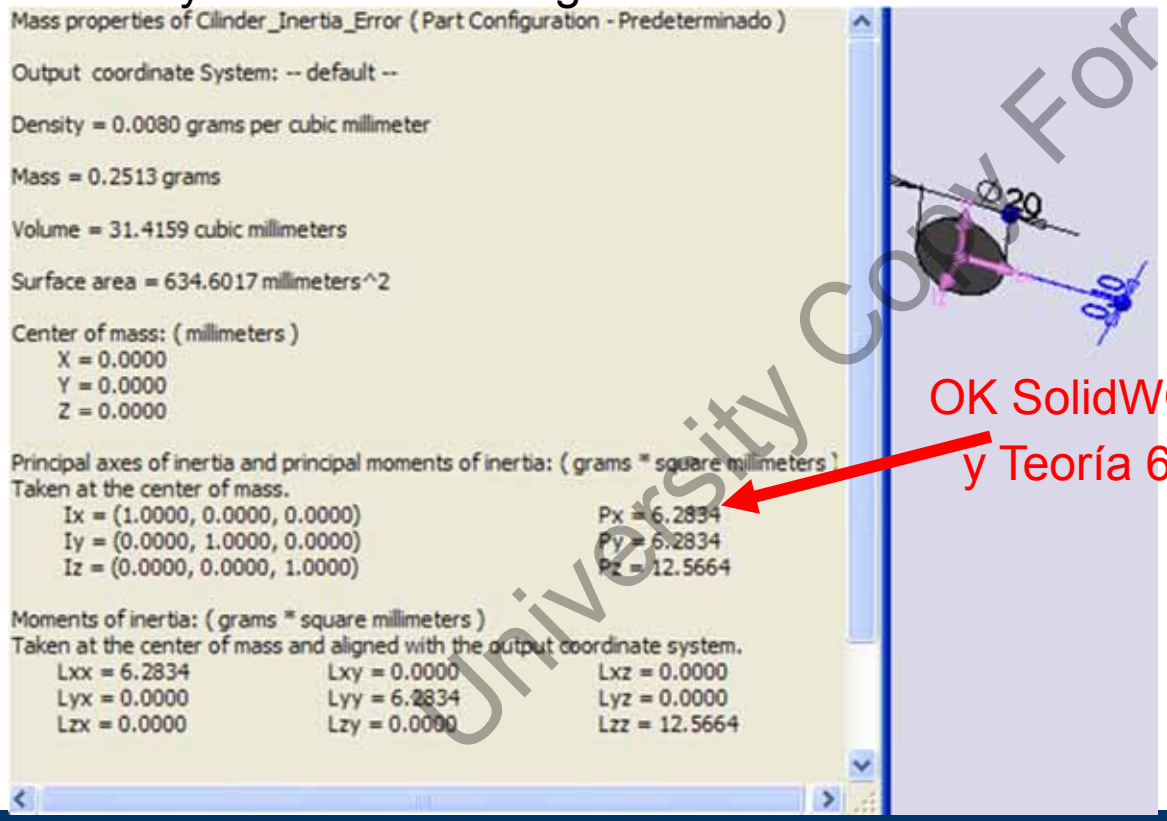
Para volumen de cilindro será:

$$I_{xm} = \rho t I_{xA} = \rho h \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_{ym} = \rho t I_{yA} = \rho h \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_{zm} = \rho t \left(I_{xA} + I_{yA}\right) = \rho h \frac{\pi r^4}{2}$$

Comprobamos para r=10,
h=0.1 y densidad 8000kg/m^3.



OK SolidWORKS y Teoría 6.2832

$$\text{Error} = \frac{\left(\rho h \frac{\pi r^4}{4} + \rho h \frac{\pi r^2 h^2}{4}\right) - \rho h \frac{\pi r^4}{4}}{\rho h \frac{\pi r^4}{4} + \rho h \frac{\pi r^2 h^2}{4}} = \frac{h^2}{r^2 + h^2}$$

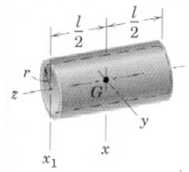
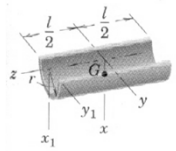
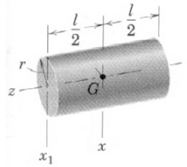
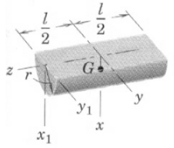
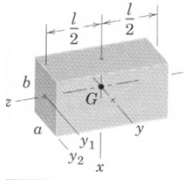
Si h=kr $\quad \text{Error} = \frac{k^2}{1^2 + k^2}$

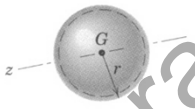
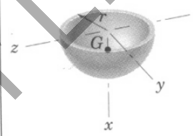
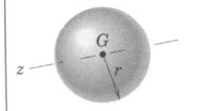
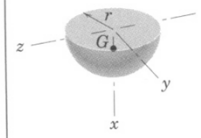
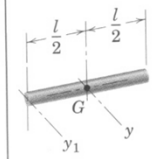
Si h=0.1r $\quad \text{Error\%} = 100 * \frac{0.1^2}{1^2 + 0.1^2} = 0.99\%$

Si h=0.01r $\quad \text{Error\%} = 100 * \frac{0.01^2}{1^2 + 0.01^2} = 0.0099\%$

University Copy For Library Use

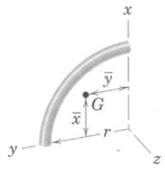
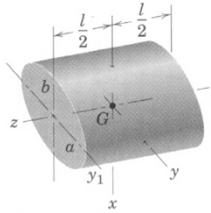
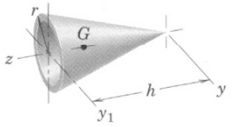
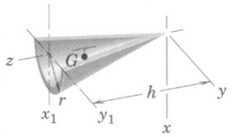
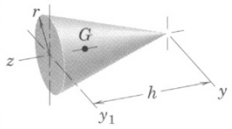
- Tablas de inercias de volúmenes (1/2).

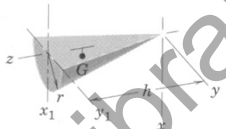
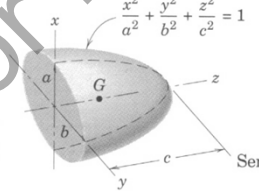
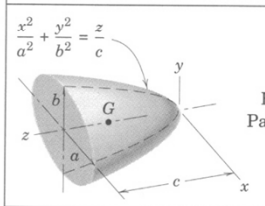
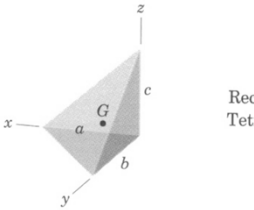
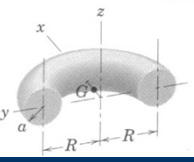
BODY		MASS CENTER	MASS MOMENTS OF INERTIA
	Circular Cylindrical Shell	—	$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
	Half Cylindrical Shell	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$
	Circular Cylinder	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
	Semicylinder	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
	Rectangular Parallelepiped	—	$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2} = \frac{1}{3}m(b^2 + l^2)$

BODY		MASS CENTER	MASS MOMENTS OF INERTIA
	Spherical Shell	—	$I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$
	Hemispherical Shell	$\bar{x} = \frac{r}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{5}{12}mr^2$
	Sphere	—	$I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$
	Hemisphere	$\bar{x} = \frac{3r}{8}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{83}{320}mr^2$
	Uniform Slender Rod	—	$I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{3}ml^2$

University Copy For Library Use

• Tablas de inercias de volúmenes (2/2).

BODY	MASS CENTER	MASS MOMENTS OF INERTIA
 Quarter-Circular Rod	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2$ $I_{zz} = mr^2$
 Elliptical Cylinder	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{yy} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$
 Conical Shell	$\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$
 Half Conical Shell	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$
 Right-Circular Cone	$\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$

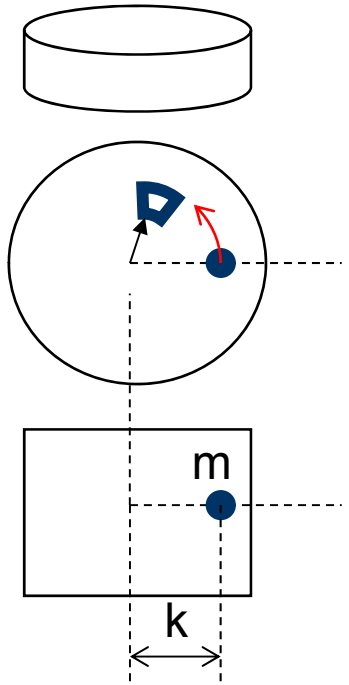
BODY	MASS CENTER	MASS MOMENTS OF INERTIA
 Half Cone	$\bar{x} = \frac{r}{\pi}$ $\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{\pi^2}\right)mr^2$
 Semiellipsoid	$\bar{z} = \frac{3c}{8}$	$I_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + \frac{19}{64}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + \frac{19}{64}c^2)$
 Elliptic Paraboloid	$\bar{z} = \frac{2c}{3}$	$I_{xx} = \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{yy} = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{zz} = \frac{1}{6}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{6}m(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{6}m(a^2 + \frac{1}{3}c^2)$
 Rectangular Tetrahedron	$\bar{x} = \frac{a}{4}$ $\bar{y} = \frac{b}{4}$ $\bar{z} = \frac{c}{4}$	$I_{xx} = \frac{1}{10}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{10}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{10}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{3}{80}m(b^2 + c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{80}m(a^2 + c^2)$ $\bar{I}_{zz} = \frac{3}{80}m(a^2 + b^2)$
 Half Torus	$\bar{x} = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{5}{8}ma^2$ $I_{zz} = mR^2 + \frac{3}{4}ma^2$

University Copy For Library Use

• Solución integrando.

Calcular integrando la inercia I_z del cilindro de radio "r" y altura "h" en dirección "z" que ha de dar $\rho h \pi r^4/2$ y el radio de giro que ha de dar $r/\sqrt{2}$.

Primero escogemos un diferencial de masa que podamos integrar



$$I_{zm} = \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^{r} r_o^{\,3} \partial r_o \partial \theta = \rho h \frac{\pi r^4}{2}$$

Calculamos radio de giro:

$$k = \sqrt{\frac{I_{zm}}{m}} = \sqrt{\frac{\rho h \frac{\pi r^4}{2}}{\rho h \pi r^2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

University Copy For Library Use

• Steiner de sólidos.

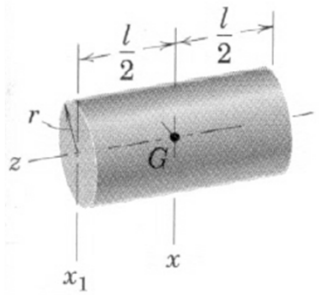
Comprobar Steiner para sólidos. Usar el ejemplo del cilindro para calcular la inercia en ejes x' por la base.

$$I_{x'm} = I_{xm} + d^2 m = \left(\rho h \frac{\pi r^4}{4} + \rho h \frac{\pi r^2 h^2}{12}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \left(\rho h \pi r^2\right) = \left(\rho h \frac{\pi r^4}{4} + \rho h \frac{\pi r^2 h^2}{3}\right) = m\frac{r^2}{4} + m\frac{h^2}{3}$$

Calculamos el nuevo radio de giro:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_{xm}}{m}} = \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}}$$

$$k_{x'} = \sqrt{\frac{I_{x'm}}{m}} = \sqrt{\frac{I_{xm} + d^2 m}{m}} = \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{3}} \neq \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}}$$

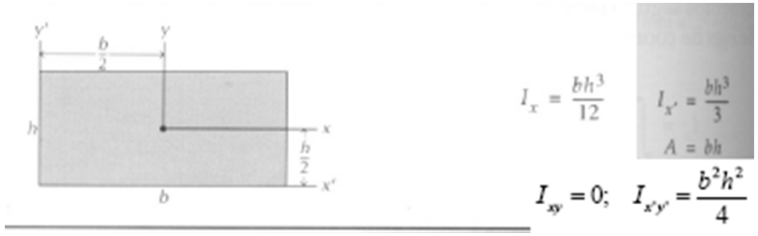


Circular Cylinder	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa.

Dar la inercia de masa de un barra de acero (ρ=8000kg/m3) de dimensiones espesor t=0.12[m], b=L=20[m], h=1[m] para girar por el centro o por el extremo.



$$I_{zm} = \rho t\left(I_{xA} + I_{yA}\right)$$

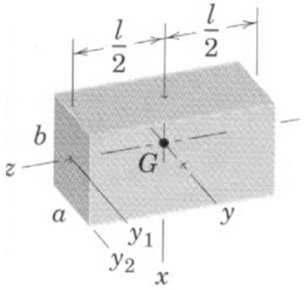
$$I_{z'm} = I_{zm} + d^2 m$$

I_z= [redacted] = 641600[kg.m^2]

$I_{z'}$= [redacted] =2566400[kg.m^2]

$I_{z'}$= [redacted] =2566400[kg.m^2]

Comprobación por tablas



Rectangular Parallelepiped	—	$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2} = \frac{1}{3}m(b^2 + l^2)$

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Cálculo de momentos de inercia de masa.

➢ Simplificación para piezas de espesor constante y pequeño.

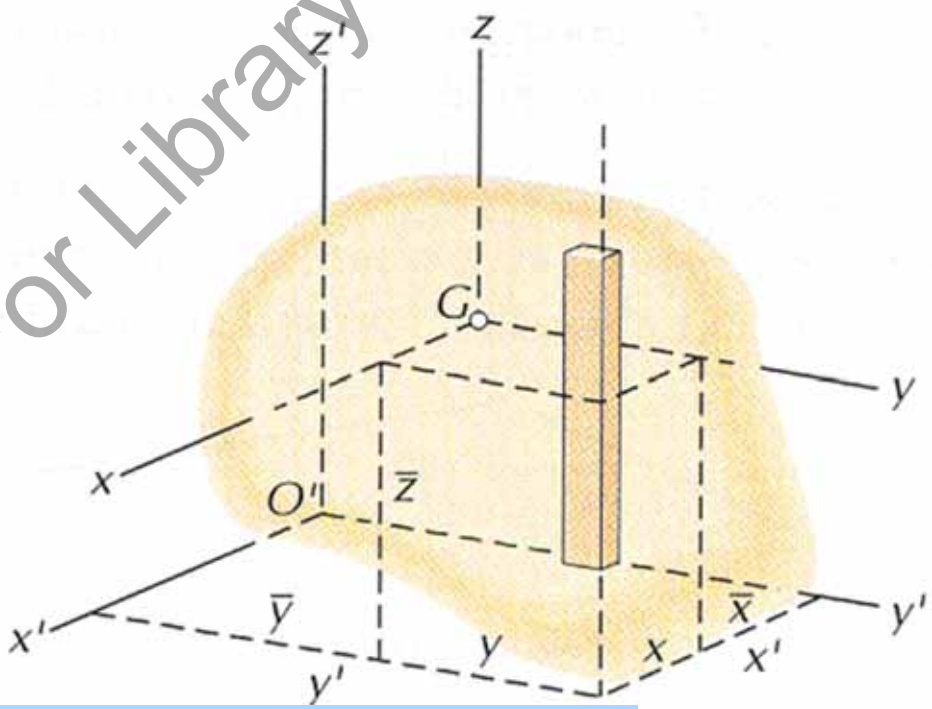
➢ Steiner y radios de giro.

University Copy For Library Use

• Productos de inercia.

Al igual que hemos calculados los momentos segundos de inercia podemos calcular los mixtos o productos de inercia.

Ahora sin embargo no hay una razón física para justificar estos productos de inercia. La única justificación es conocer las direcciones de momentos principales.



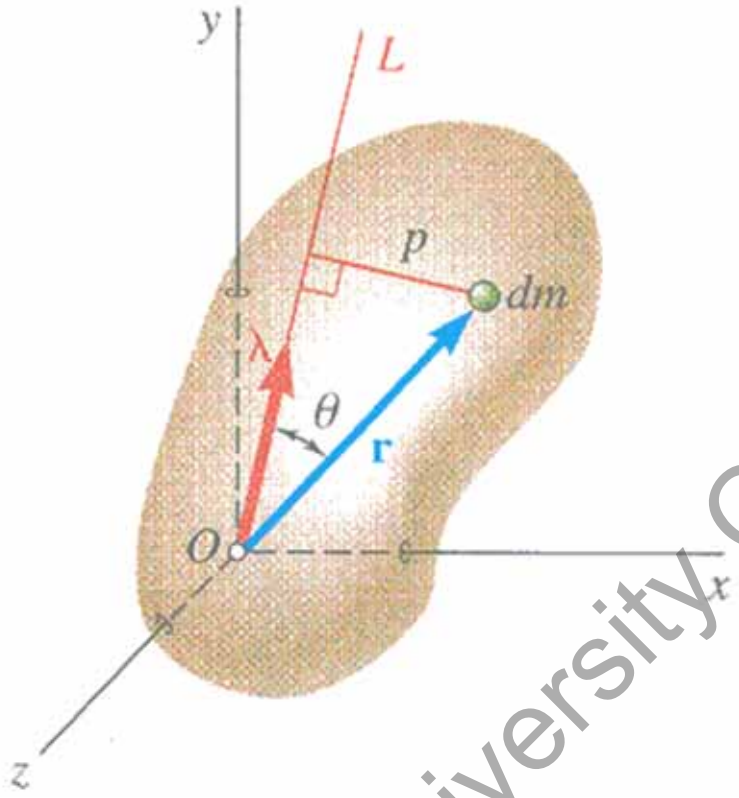
$$I_{xy} = \int_m xydm;\ I_{yz} = \int_m yzdm;\ I_{zx} = \int_m zxdm;$$

$$I_{x'y'} = I_{xyG} + \bar{x}\bar{y}m;\ I_{y'z'} = I_{yzG} + \bar{y}\bar{z}m;\ I_{x'z'} = I_{xzG} + \bar{x}\bar{z}m;$$

University Copy For Library Use

- Momentos respecto a un eje cualquiera.

Podemos calcular los momentos respecto a otros ejes.



$$I_{OL} = \int p^2 dm = \int \left|\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}\right|^2 dm$$

$$\left|\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}\right| = \lambda \cdot r \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$

University Copy For Library Use

- Elipsoide de inercia.

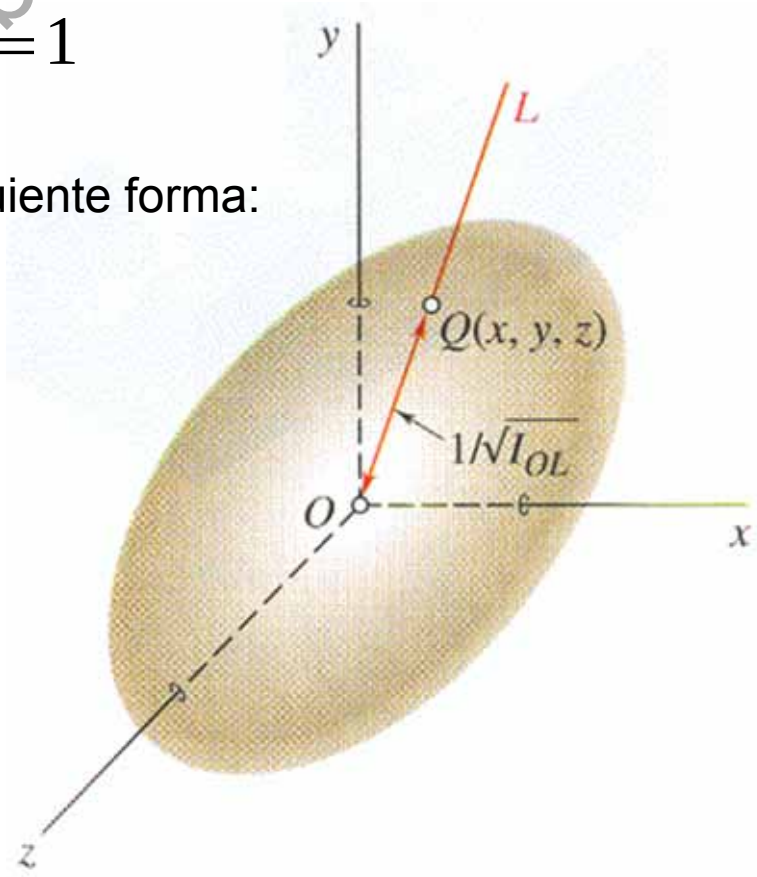
Al igual que en 2D usábamos el círculo de Mohr para sacar las inercias en otras direcciones en 3D podemos hacer lo mismo construyendo un elipsoide. Colocamos en cada eje su parte de inercia (1/√Inercia) y los mixtos para construir un elipsoide de ecuación:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx = 1$$

Cualquier punto del elipsoide se puede calcular de la siguiente forma:

$$OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$$

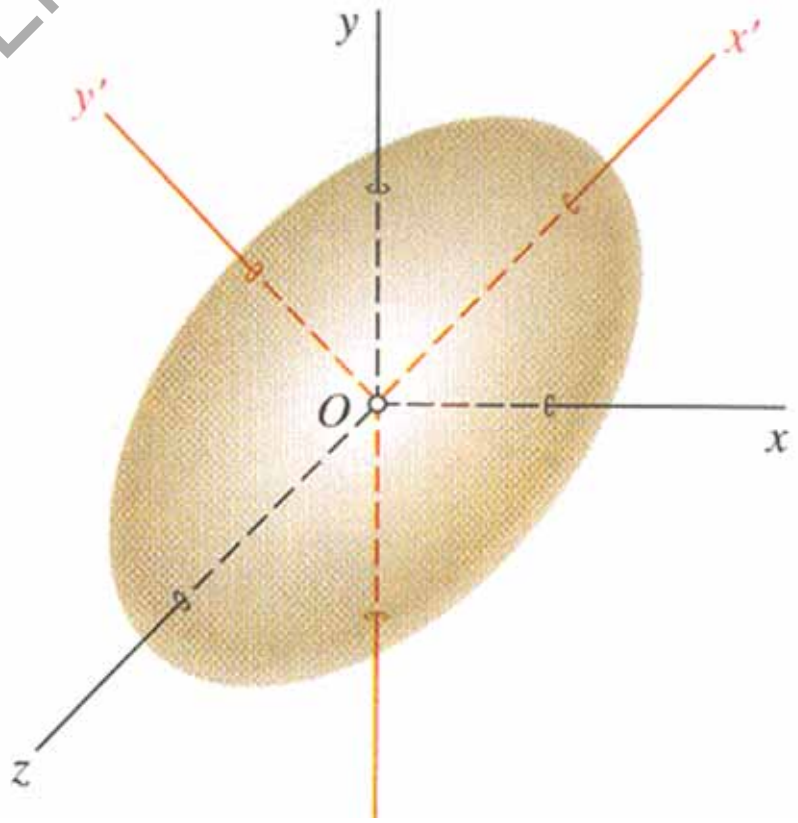
$$\frac{1}{OQ^2} = I_{OL}$$



University Copy For Library Use

- Ejes principales.

Usando el elipsoide se pueden buscar los ejes principales en los que los productos de inercia (momentos mixtos) son nulos.



$$I_{x'}x'^2 + I_{y'}y'^2 + I_{z'}z'^2 = 1$$

University Copy For Library Use

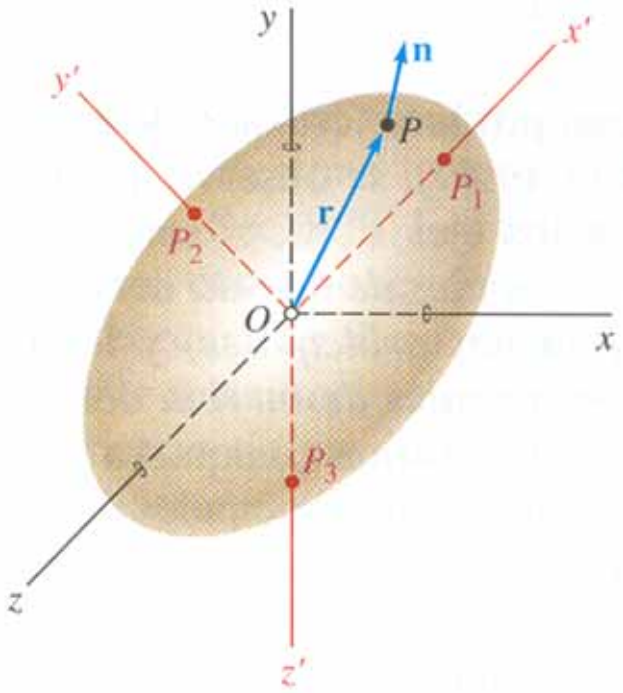
• Cálculo de momentos principales 3D.

Para buscar las direcciones principales se ha de conseguir que el radio del elipsoide sea colineal con la normal a su superficie.

r y **n** colineales: $\nabla f = (2K)\mathbf{r}$

$$f(x,y,z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 1$$

$$K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 - (I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K$$
$$-(I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{zx}^2 - I_z I_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0$$



University Copy For Library Use

• Solución Menacho.

Si tenemos la forma cuadrática (elipsoide) $I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{yz}yz + 2I_{zx}zx = 1$

Se puede escribir en forma matricial: $r^T Mr$

Donde r es el vector columna (x,y,z), y M es la matriz simétrica $\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ & I_{yy} & I_{yz} \\ & & I_{zz} \end{pmatrix}$

que se puede poner en “forma canónica” hallando los valores y vectores propios de la matriz M.

Si la matriz P tiene por columnas los vectores propios normalizados, entonces se puede diagonalizar la matriz, obteniendo D

$$D = P^T MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

La matriz D es diagonal, y tiene precisamente los valores propios en la diagonal.

Entonces, el elipsoide se escribiría $s^T Ds$

Donde s es el nuevo sistema de coordenadas: s = (u,v,w) y la matriz de cambio de base es P: $r = Ps$

Es decir, el elipsoide se podría escribir en unas nuevas coordenadas (u,v,w) como:

$$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2 = 1$$

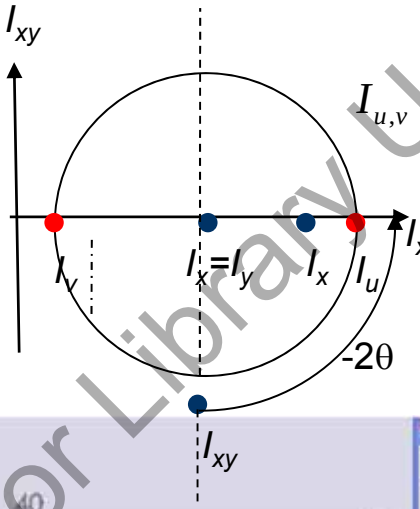
Siendo los tres vectores propios la nueva base (los nuevos ejes de coordenadas), y los semiejes del elipsoide:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$$

University Copy For Library Use

• Comparativa círculo de Mohr.

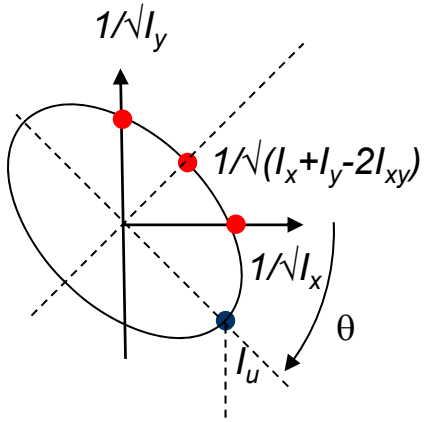
Vamos a comparar el resultado de Mohr con elipsoide usando ejemplo de sesión de momentos mixtos 2D. Ix=94404.76, Iy=94404.76, Ixy=-51428.57
Mohr: 94404.76±51428.57
Elipsoide: I_u a -45º

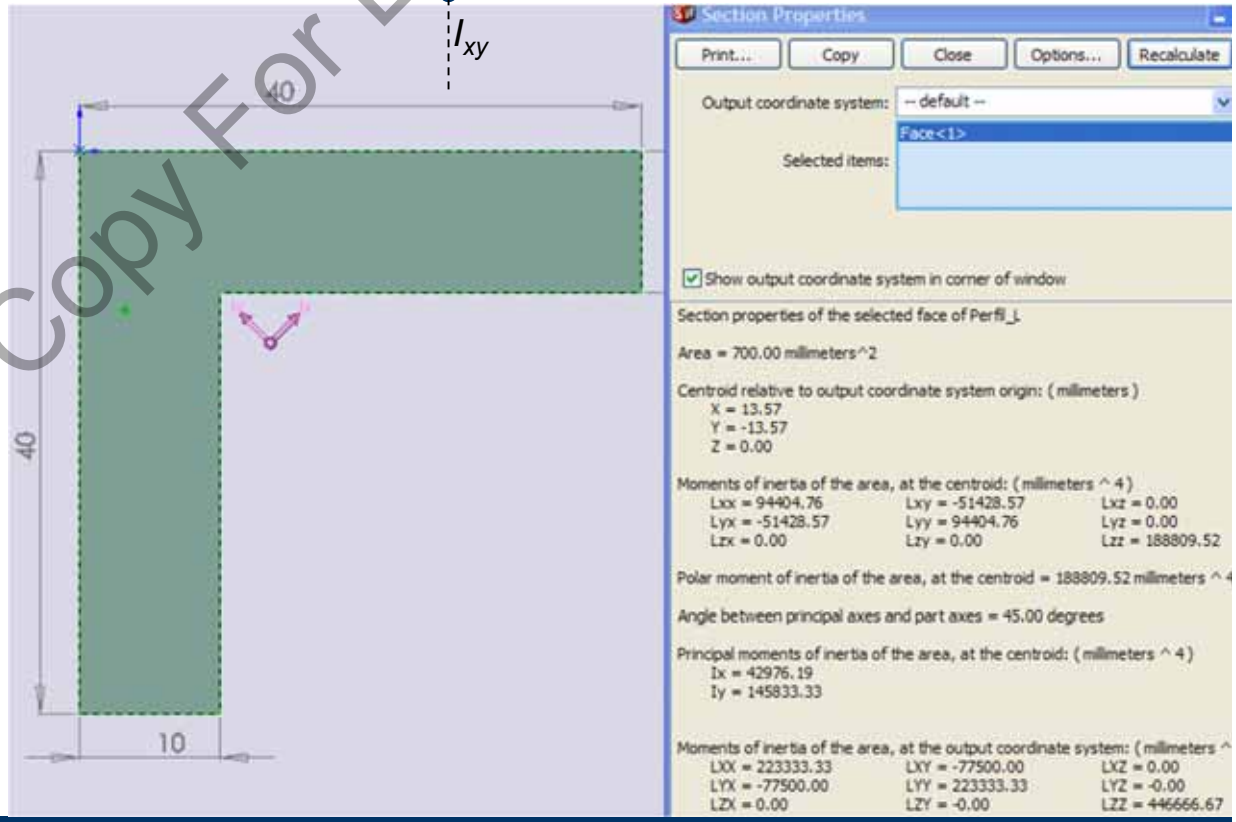


$$I_{u,v} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \left[\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

Max. I_u=94404.76+51428.57=

145833.33 a -45º

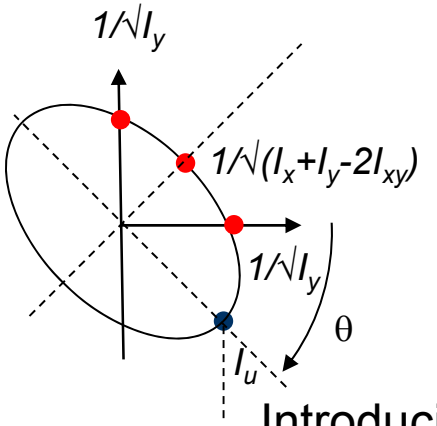




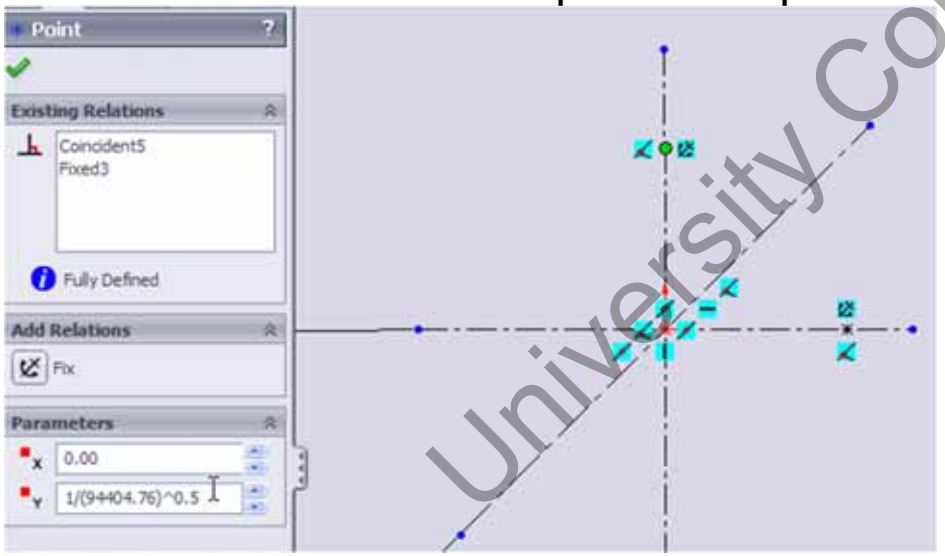
University Copy For Library Use

- Comparativa círculo de Mohr Gráfica.

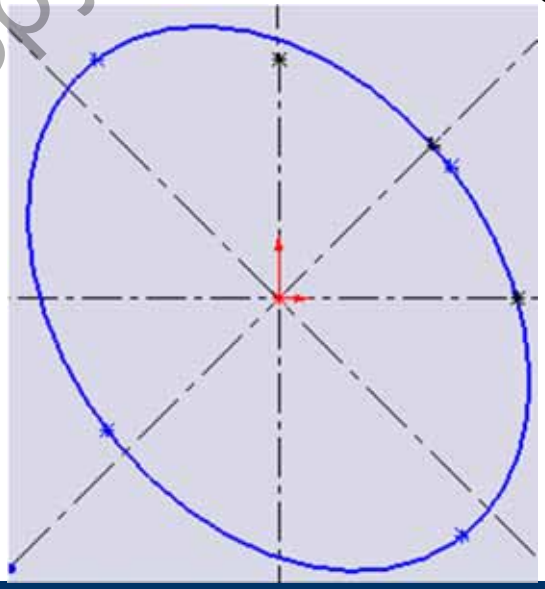
Usamos un programa CAD para dibujar una elipse por tres puntos de paso considerando:
Ix=94404.76, Iy=94404.76, Ixy=-51428.57



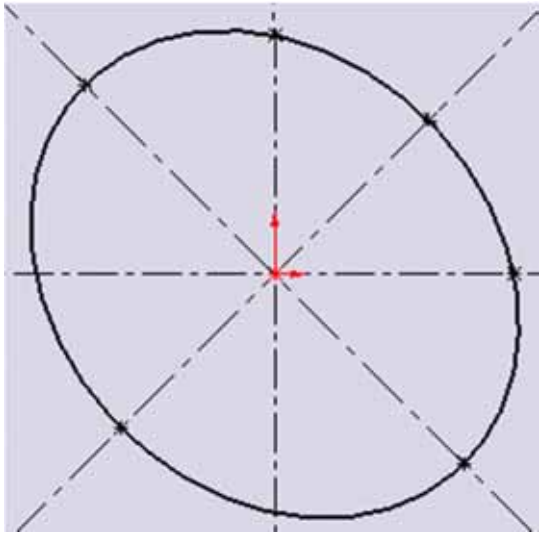
Introducir 3 puntos de paso



Introducir elipse centrada en origen.



Introducir 3 puntos de paso elipse hasta quedar bien definida.



University Copy For Library Use

- Ejemplo de Inercias SW.

Vamos a hacer una chapa de lado 100mm y operar con él. La inercia de área en cualquier dirección es $L^4/12=8.333e+6\ mm^4$.

Section properties of Sketch1 of Part1

Area = 10000.00 millimeters^2

Centroid relative to sketch origin: (millimeters)
X = 0.00
Y = 0.00

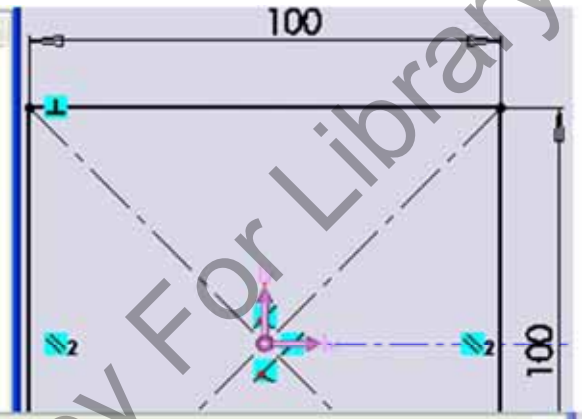
Centroid relative to part origin: (millimeters)
X = 0.00
Y = 0.00
Z = 0.00

Moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ^ 4)
Lxx = 8333333.33 Lxy = 0.00
Lyx = 0.00 Lyy = 8333333.33

Polar moment of inertia of the area, at the centroid = 16666

Angle between principal axes and sketch axes = 0.00 degre

Principal moments of inertia of the area, at the centroid: (mi
Mx = 8333333.33
My = 8333333.33



Section properties of Sketch1 of Part1

Area = 10000.00 millimeters^2

Centroid relative to sketch origin: (millimeters)
X = 0.00
Y = 0.00

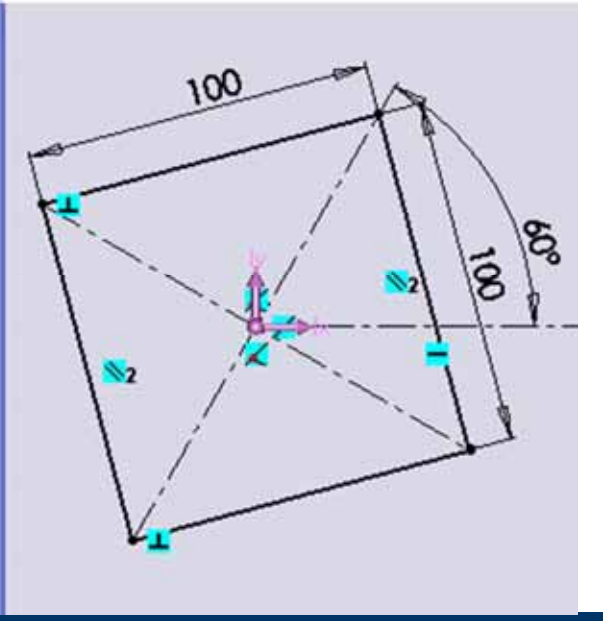
Centroid relative to part origin: (millimeters)
X = 0.00
Y = 0.00
Z = 0.00

Moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ^ 4)
Lxx = 8333333.33 Lxy = 0.00
Lyx = 0.00 Lyy = 8333333.33

Polar moment of inertia of the area, at the centroid = 16666666.67 millimeters ^ 4

Angle between principal axes and sketch axes = 0.00 degrees

Principal moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ^ 4)
Mx = 8333333.33
My = 8333333.33



University Copy For Library Use

• Ejemplo de Inercias SW.

Pasamos a crear el sólido de espesor 1 en acero de densidad 0.008 [gr/mm^3]. Simplificando para pequeño espesor esperamos que de $I_x=I_y=0.008*1*8.333e+6=6.667e4[gr\cdot mm^2]$, $I_z=2I_y$.

Mass properties of Part1 (Part Configuration - Predeterminado)

Output coordinate System: -- default --

Density = 0.0080 grams per cubic millimeter

Mass = 80.0000 grams

Volume = 10000.0000 cubic millimeters

Surface area = 20400.0000 millimeters^2

Center of mass: (millimeters)
X = 0.0000
Y = 0.0000
Z = 0.0000

Principal axes of inertia and principal moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the center of mass.

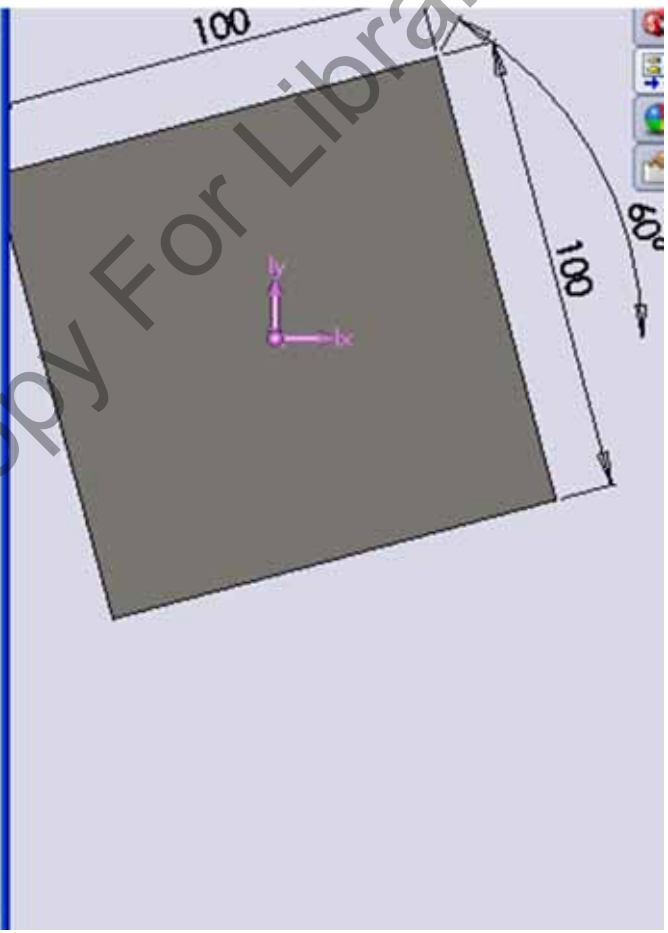
Ix = (1.0000, 0.0000, 0.0000)	Px = 66673.3333
Iy = (0.0000, 1.0000, 0.0000)	Py = 66673.3333
Iz = (0.0000, 0.0000, 1.0000)	Pz = 133333.3333

Moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the center of mass and aligned with the output coordinate system.

Lxx = 66673.3333	Lxy = 0.0000	Lxz = 0.0000
Lyx = 0.0000	Lyy = 66673.3333	Lyz = 0.0000
Lzx = 0.0000	Lzy = 0.0000	Lzz = 133333.3333

Moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the output coordinate system.

Ixx = 66673.3333	Ixy = 0.0000	Ixz = 0.0000
Iyx = 0.0000	Iyy = 66673.3333	Iyz = 0.0000
Izx = 0.0000	Izy = 0.0000	Izz = 133333.3333



University Copy For Library Use

- Ejemplo de Inercias SW.

Quitamos una esquina para ver si hay momentos mixtos. Este cuadrado tiene inercias que son una dieciseisava parte.

Section properties of Sketch2 of Part1

Area = 2500.0000 millimeters^2

Centroid relative to sketch origin: (millimeters)
X = -25.0000
Y = 25.0000

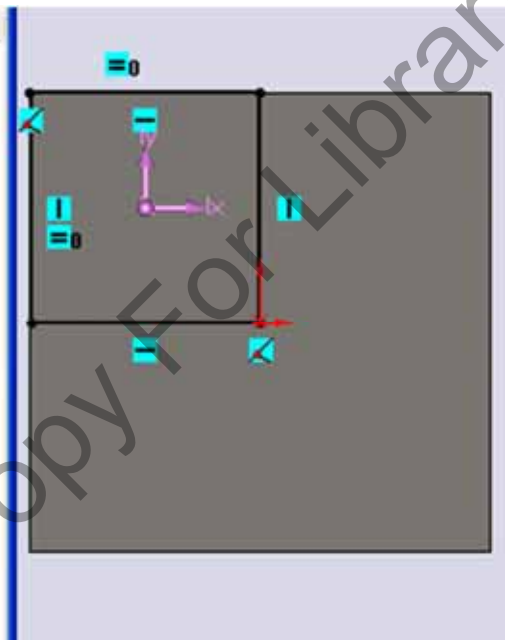
Centroid relative to part origin: (millimeters)
X = -25.0000
Y = 25.0000
Z = 0.0000

Moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ^ 4)
Lxx = 520833.3333 Lxy = 0.0000
Lyx = 0.0000 Lyy = 520833.3333

Polar moment of inertia of the area, at the centroid = 1041666.6667 millimeters ^ 4

Angle between principal axes and sketch axes = 0.0000 degrees

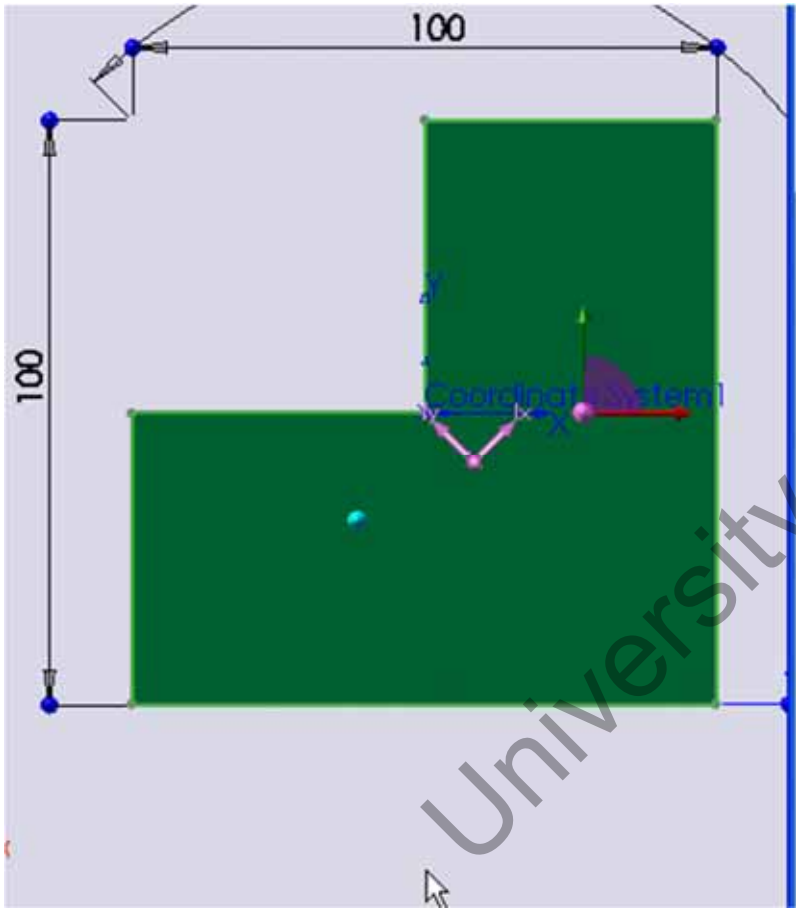
Principal moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ^ 4)
Mx = 520833.3333
My = 520833.3333



University Copy For Library Use

- Ejemplo de Inercias SW.

Ahora al aplicar Steiner si salen momentos mixtos. Primero comprobamos areas.



Show output coordinate system in corner of window

Section properties of the selected face of Productos_inercia

Area = 7500.0000 millimeters^2

Centroid relative to output coordinate system origin: (millimeters)
X = 8.3333
Y = 8.3333
Z = 0.0000

Moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ^ 4)

Lxx = 5729166.6667	Lxy = -2083333.3333	Lxz = 0.0000
Lyx = -2083333.3333	Lyy = 5729166.6667	Lyz = 0.0000
Lzx = 0.0000	Lzy = 0.0000	Lzz = 11458333.3333

Polar moment of inertia of the area, at the centroid = 11458333.3333 millimeters ^

Angle between principal axes and part axes = 45.0000 degrees

Principal moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ^ 4)
Ix = 3645833.3333
Iy = 7812500.0000

Moments of inertia of the area, at the output coordinate system: (millimeters ^ 4)

LXX = 6250000.0000	LXY = 1562500.0000	LXZ = 0.0000
LYX = 1562500.0000	LYY = 6250000.0000	LYZ = -0.0000
LZX = 0.0000	LZY = -0.0000	LZZ = 12500000.0000

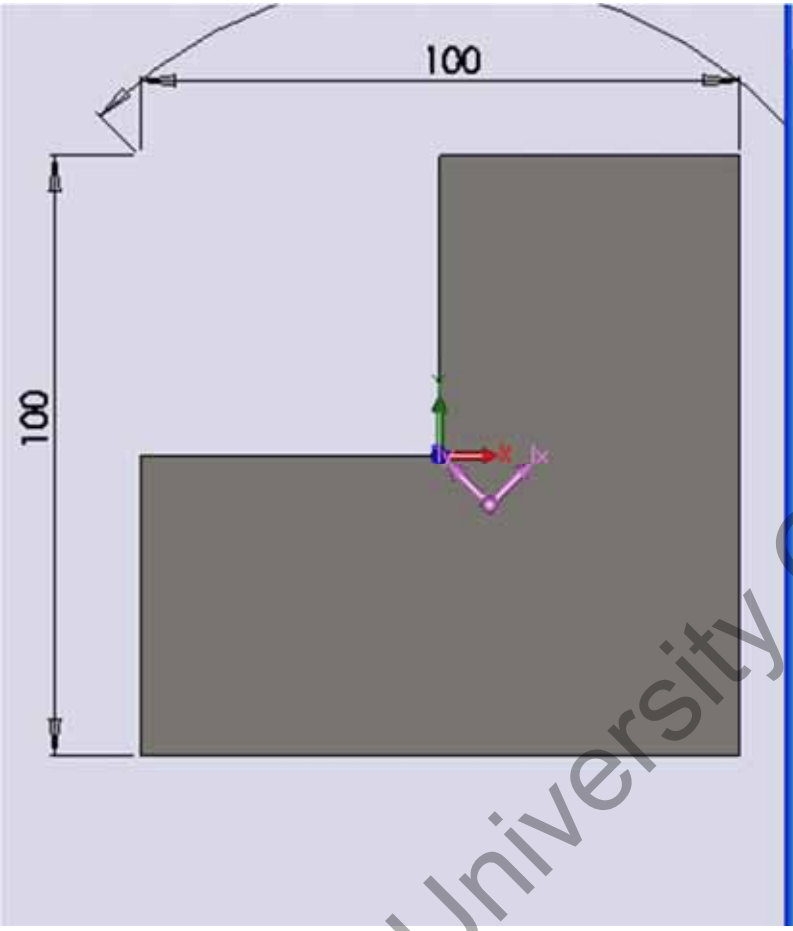
$I_x=I_y=50^4=6.25e6$

$I_{xy}=0--50^4/4=1.562e6$

University Copy For Library Use

- Ejemplo de Inercias SW.

Cuando lo pasamos a momentos de masa.



Assigned mass properties

Output coordinate System: -- default --

Density = 0.0080 grams per cubic millimeter

Mass = 60.0000 grams

Volume = 7500.0000 cubic millimeters

Surface area = 15400.0000 square millimeters

Center of mass: (millimeters)
X = 8.3333
Y = -8.3333
Z = 0.0000

Principal axes of inertia and principal moments of inertia: (grams * square millime
Taken at the center of mass.
Ix = (0.7071, 0.7071, 0.0000) Px = 29171.6667
Iy = (-0.7071, 0.7071, 0.0000) Py = 62505.0000
Iz = (0.0000, 0.0000, 1.0000) Pz = 91666.6667

Moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the center of mass and aligned with the output coordinate system.

Lxx = 45838.3333	Lxy = 16666.6667	Lxz = 0.0000
Lyx = 16666.6667	Lyy = 45838.3333	Lyz = 0.0000
Lzx = 0.0000	Lzy = 0.0000	Lzz = 91666.6667

Moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the output coordinate system.

Ixx = 50005.0000	Ixy = 12500.0000	Ixz = 0.0000
Iyx = 12500.0000	Iyy = 50005.0000	Iyz = 0.0000
Izx = 0.0000	Izy = 0.0000	Izz = 100000.0000

$I_x = I_y = 5.000e4$

$I_z = 2I_y = 1.000e5$

University Copy For Library Use

- Ejemplo de Inercias SW.

Si la pieza la giramos 45º veremos que son los ejes principales. Por orden la pieza es más costosa de girar en Z, Y y por último X.

Mass properties of Part1 (Part Configuration - Predeterminado)

Output coordinate System: -- default --

Density = 0.0080 grams per cubic millimeter

Mass = 60.0000 grams

Volume = 7500.0000 cubic millimeters

Surface area = 15400.0000 millimeters^2

Center of mass: (millimeters)
X = 0.0000
Y = -11.7851
Z = 0.0000

Principal axes of inertia and principal moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the center of mass.

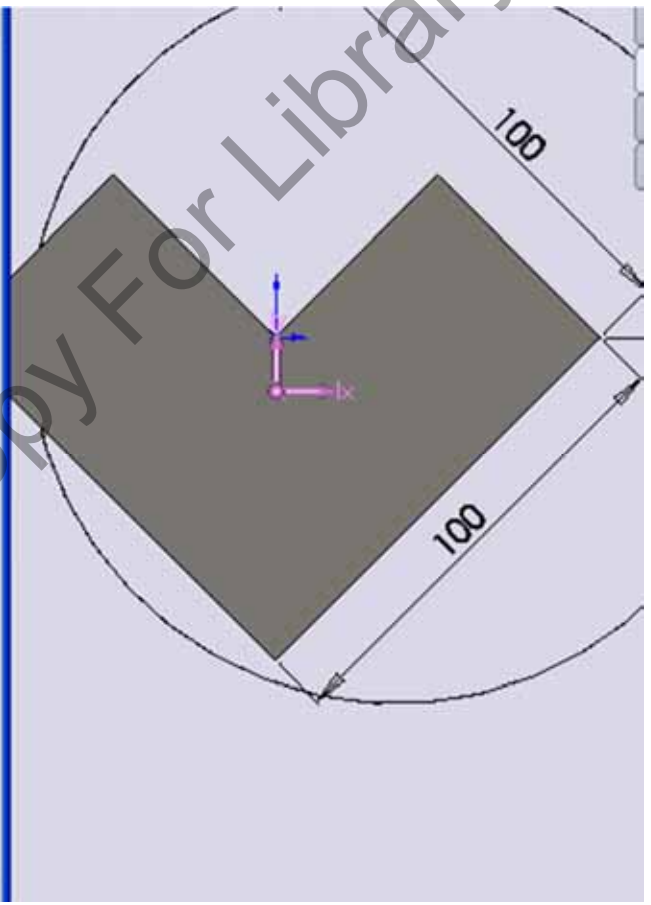
Ix = (1.0000, 0.0000, 0.0000)	Px = 29171.6667
Iy = (0.0000, 1.0000, 0.0000)	Py = 62505.0000
Iz = (0.0000, 0.0000, 1.0000)	Pz = 91666.6667

Moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the center of mass and aligned with the output coordinate system.

Lxx = 29171.6667	Lxy = 0.0000	Lxz = 0.0000
Lyx = 0.0000	Lyy = 62505.0000	Lyz = 0.0000
Lzx = 0.0000	Lzy = 0.0000	Lzz = 91666.6667

Moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the output coordinate system.

Ixx = 37505.0000	Ixy = 0.0000	Ixz = 0.0000
Iyx = 0.0000	Iyy = 62505.0000	Iyz = 0.0000
Izx = 0.0000	Izy = 0.0000	Izz = 100000.0000



University Copy For Library Use

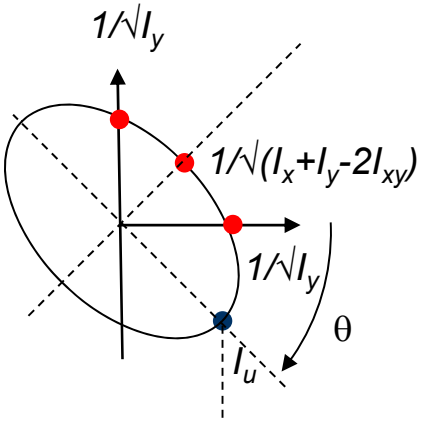
- Ejemplo casa de Inercias SW.

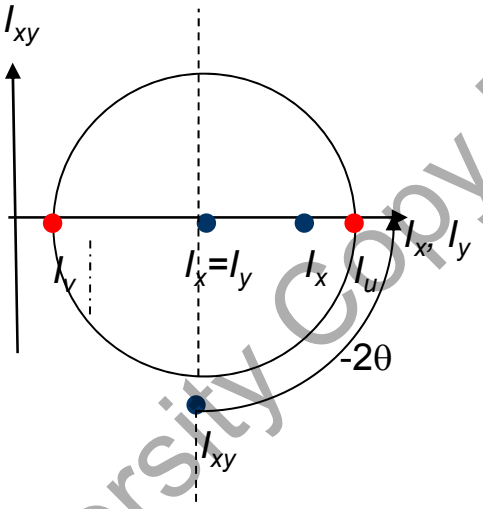
Justificar con círculo de Mohr la dirección de máxima inercia y direcciones principales de la figura anterior.

Taken at the center of mass and aligned with the output coordinate system.

Lxx = 45838.3333	Lxy = 16666.6667	Lxz = 0.0000
Lyx = 16666.6667	Lyy = 45838.3333	Lyz = 0.0000
Lzx = 0.0000	Lzy = 0.0000	Lzz = 91666.6667

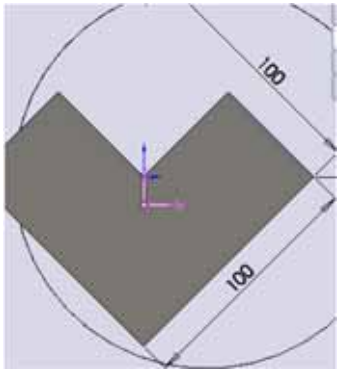
$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx = 1$$





$$I_{u,v} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \left[\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \right)$$



I_u:

I_v:

θ=

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Cálculo de productos de inercia y de direcciones principales de inercia.

➢ Comparativa entre círculo de Mohr y elipsoide.

University Copy For Library Use

S30t.- Ejercicios de Productos de Inercia.

University Copy For Library Use

Mejora 1314….

- Repaso sesión anterior.
  - Cálculo de productos de inercia y de direcciones principales de inercia.
  - Comparativa entre círculo de Mohr y elipsoide.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Objetivos sesión.

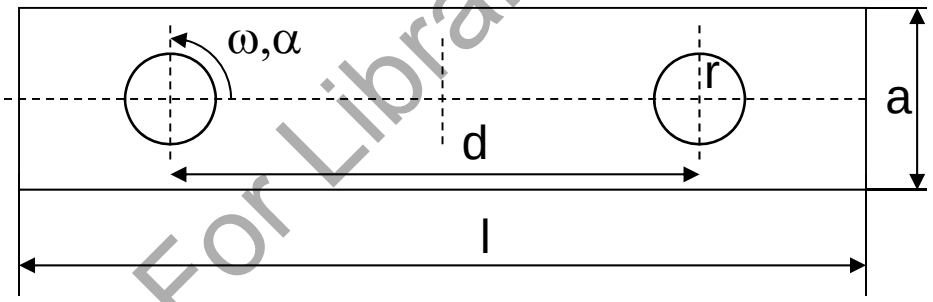
➢ Realizar ejercicios de cálculo de inercias en varios ejes y comparar con simplificaciones para barras y discos.

University Copy For Library Use

• Calcular la inercia a rotación de biela.

Calcular la inercia para rotar una biela de longitud "l", ancho "a", con agujeros de radio "r" a distancia "d". Considerar espesor "t1".

$$I_{xm} = \rho t I_{xA}$$
$$I_{ym} = \rho t I_{yA}$$
$$I_{zm} = \rho t \left(I_{xA} + I_{yA} \right)$$



Primero calculamos I_{xA} e I_{yA} respecto al centro de masas:

$I_{xA}=l*a^3/12+0-\pi*r^4/4+0-\pi*r^4/4+0 = l*a^3/12-\pi*r^4/2.$

$I_{yA}=a*l^3/12+0-\pi r^4/4-(d/2)^2*\pi r^2-\pi r^4/4-(d/2)^2*\pi r^2 = a*l^3/12-\pi r^4/2-d^2*\pi r^2/2.$

$I_{xyA}=0$ por simetría.

Calculamos I_{zm} respecto a centro de masas:

$I_{zm}=\rho*t*(I_{xA}+I_{yA})=\rho*t*(l*a^3/12-\pi*r^4/2 + a*l^3/12-\pi r^4/2-d^2*\pi r^2/2).$

Calculamos $I_{z'm}$ respecto a centro de rotación:

$I_{z'm}=I_{zm}+(d/2)^2*m=\rho*t*(l*a^3/12-\pi*r^4/2 + a*l^3/12-\pi r^4/2-d^2*\pi r^2/2)+(d/2)^2*\rho*t*(a*l-2*\pi*r^2).$

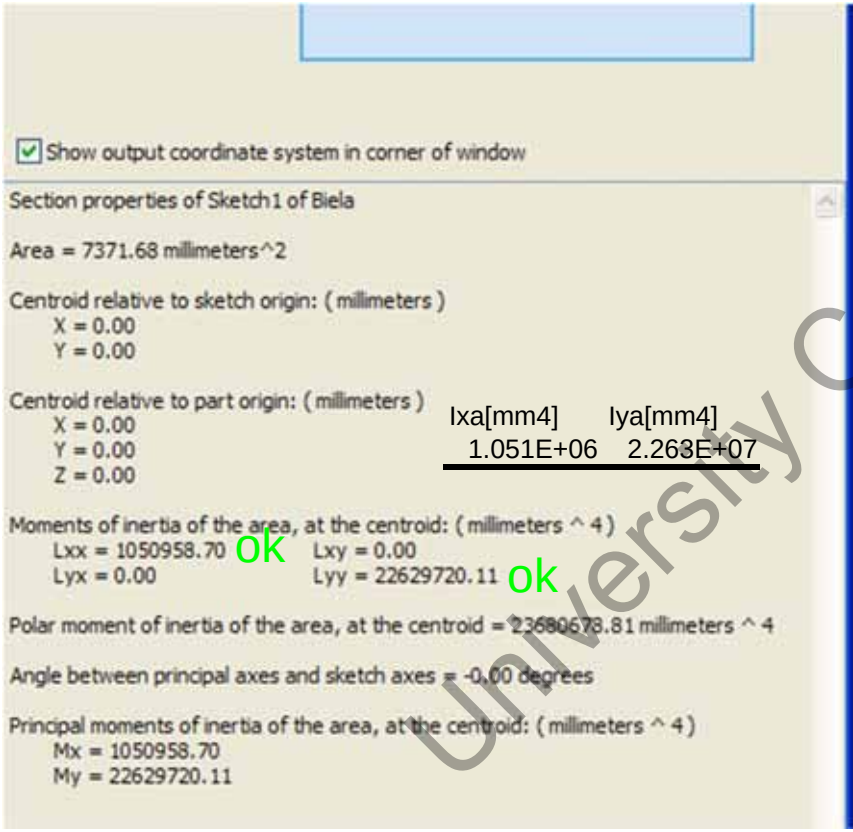
University Copy For Library Use

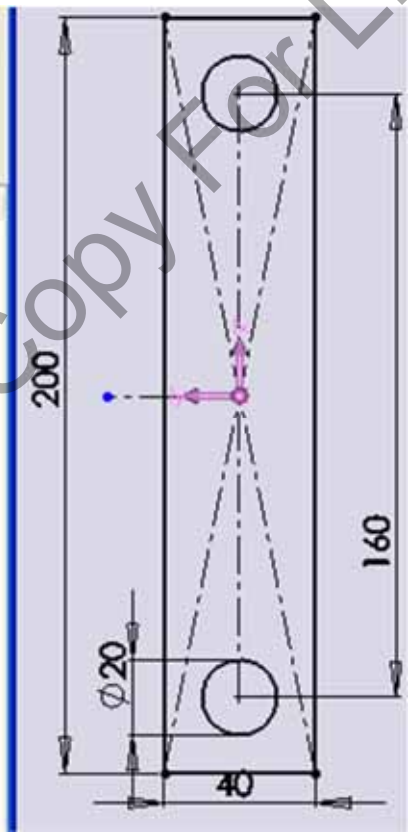
• Comprobación para valores definidos-Superficie.

Comprobamos las ecuaciones obtenidas para l=200, a=40, d=160, r=10.

$I_{xA}=l*a^3/12+0-\pi*r^4/4+0-\pi*r^4/4+0 = l*a^3/12-\pi*r^4/2=$ 1.051e6 [mm^4].

$I_{yA}=a*l^3/12+0-\pi r^4/4-(d/2)^2*\pi r^2 0-\pi r^4/4-(d/2)^2*\pi r^2 = a*l^3/12-\pi r^4/2-d^2*\pi r^2/2=$ 2.263e7 [mm^4].



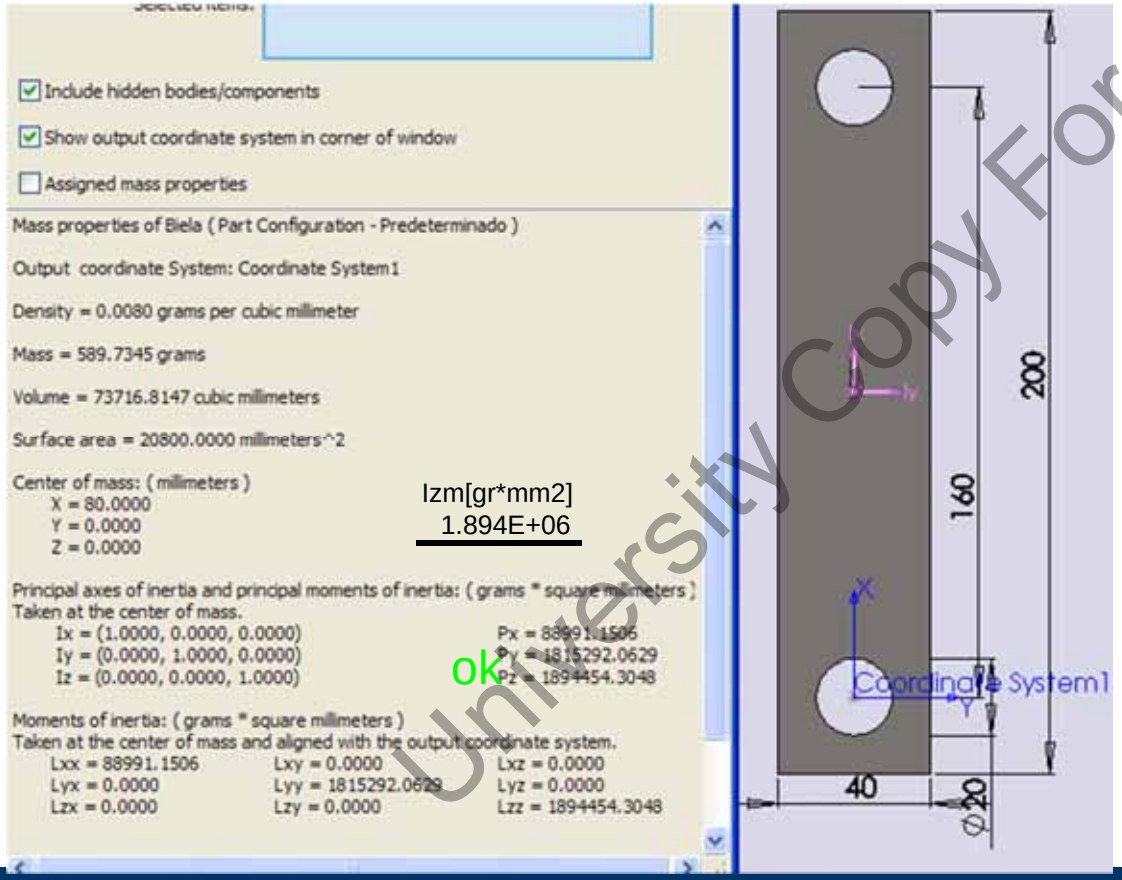


University Copy For Library Use

• Comprobación para valores definidos-Sólido c.m.

Comprobamos las ecuaciones obtenidas para l=200, a=40, d=160, r=10, t1=10, ρ=8e.3.

$I_{zm}=\rho*t*(I_{xA}+I_{yA})=\rho*t*(l*a^3/12-\pi*r^4/2 + a*l^3/12-\pi r^4/2-d^2*\pi r^2/2)=$ 1.894e6 [gr·mm^2].



University Copy For Library Use

• Comprobación para valores definidos-Sólido c.rot.

Comprobamos las ecuaciones obtenidas para l=200, a=40, d=160, r=10, t1=10, ρ=8e-3.

$I_{z'm}=I_{zm}+(d/2)^2*m=\rho*t*(l*a^3/12-\pi*r^4/2 + a*l^3/12-\pi r^4/2-d^2*\pi r^2/2)+(d/2)^2*\rho*t*(a*l-2*\pi*r^2)=$
$5.669e6\ [gr\cdot mm^2]$.

Show output coordinate system in corner of window

Assigned mass properties

Mass = 589.7345 grams

Volume = 73716.8147 cubic millimeters

Surface area = 20800.0000 millimeters^2

Center of mass: (millimeters)
X = 80.0000
Y = 0.0000
Z = 0.0000

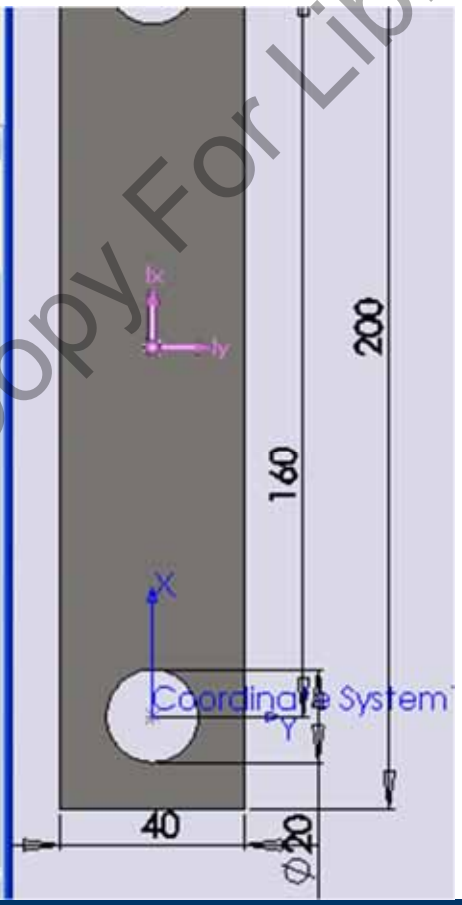
Principal axes of inertia and principal moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the center of mass.
Ix = (1.0000, 0.0000, 0.0000) Px = 88991.1506
Iy = (0.0000, 1.0000, 0.0000) Py = 1815292.0629
Iz = (0.0000, 0.0000, 1.0000) Pz = 1894454.3048

Moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the center of mass and aligned with the output coordinate system.
Lxx = 88991.1506 Lxy = 0.0000 Lxz = 0.0000
Lyx = 0.0000 Lyy = 1815292.0629 Lyz = 0.0000
Lzx = 0.0000 Lzy = 0.0000 Lzz = 1894454.3048

Moments of inertia: (grams * square millimeters)
Taken at the output coordinate system.
Ixx = 88991.1506 Ixy = 0.0000 Ixz = 0.0000
Iyx = 0.0000 Iyy = 5589592.9751 Iyz = 0.0000
Izx = 0.0000 Izy = 0.0000 Izz = 5668755.2171

Iz'm[gr*mm2]
5.669E+06

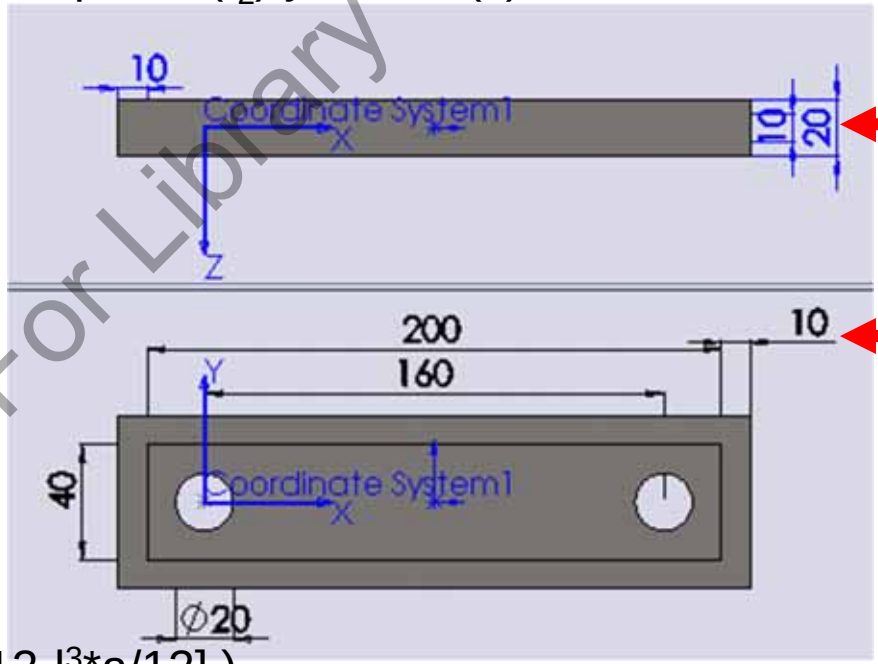
ok



University Copy For Library Use

- Introducción de un borde de más espesor.

Calcular la influencia de añadir un borde de más espesor (t_2) y ancho (s).



Suponemos dos cuerpos que se suman:

$I_{zm}=I_{z1m}+ I_{z2}=$

$\rho*t_1*(l*a^3/12-\pi*r^4/2 + a*l^3/12-\pi r^4/2-d^2*\pi r^2/2) +$

$\rho*t_2*([(l+2s)*(a+2s)^3/12-l*a^3/12] +[(l+2s)^3*(a+2s)/12-l^3*a/12]).$

$I_{z'm}=I_{z1'm}+(d/2)^2*m1 + I_{z2'm}+(d/2)^2*m2 =$

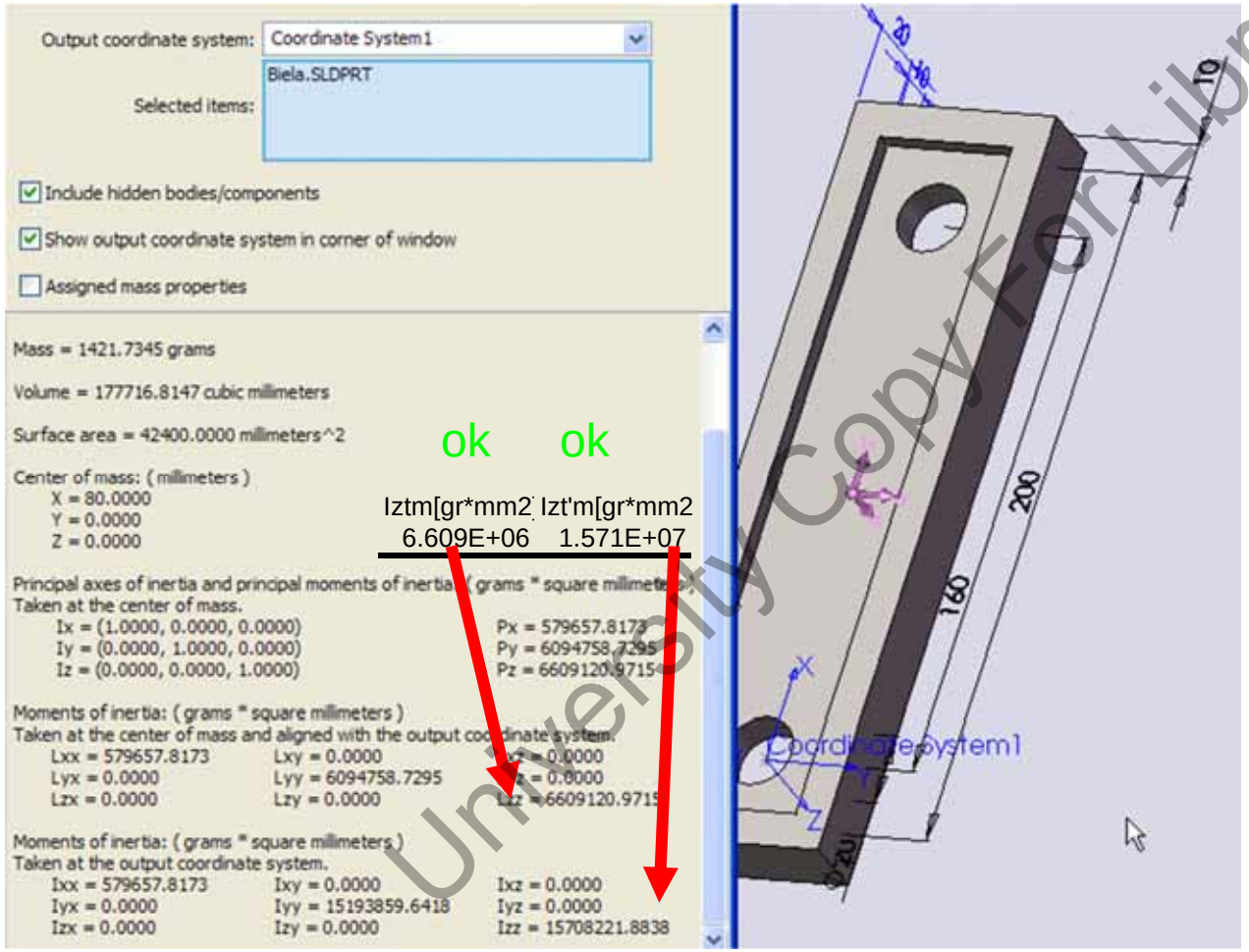
$\rho*t_1*(l*a^3/12-\pi*r^4/2 + a*l^3/12-\pi r^4/2-d^2*\pi r^2/2)+(d/2)^2*\rho*t_1*(a*l-2*\pi*r^2) +$

$\rho*t_2*([(l+2s)*(a+2s)^3/12-l*a^3/12] - [(l+2s)^3*(a+2s)/12-l^3*a/12])+(d/2)^2*\rho*t_2*([(l+2s)*(a+2s)-l*a]).$

University Copy For Library Use

- Comprobación de un borde de más espesor.

Comprobamos las ecuaciones obtenidas para l=200, a=40, d=160, r=10, t1=10, t2=20, s=10, ρ=8e-3.



University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicio de cálculo de momentos de inercia 3D con dos espesores diferentes y grandes respecto al área.

University Copy For Library Use

S31t.- Cinética del Sólido Rígido. Ejercicios de movimiento plano con fuerzas.

University Copy For Library Use

Mejora 1314 …

- Repaso sesión anterior.

➢ Tercer control de cuatro evaluado con 0.80 puntos de 3.50 del total de los controles.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos sesión.

➢ Comprender las ecuaciones cinéticas en caso de traslaciones y rotaciones de sólido rígido.

➢ Saber simplificar las ecuaciones para casos de simetría y movimiento plano.

➢ Analizar las ecuaciones para situaciones comunes de movimiento.

➢ Entender procedimiento para sistemas de sólidos conectados.

➢ Analizar fuerzas de ejercicio básico de barra trasladándose y rotando.

$$M_{Ax} = -a_{Ay} z - \alpha I_{Azx} + \omega^2 I_{Ayz}$$

$$M_{Ay} = a_{Ax} z - \alpha I_{Ayz} - \omega^2 I_{Axz}$$

$$M_{Az} = a_{Ay} \bar{x} - a_{Ax} \bar{y} + \alpha I_{Azz}$$

University Copy For Library Use

- Cinética del sólido rígido.

Relación entre el movimiento de sólidos rígidos y la causa de dicho movimiento.

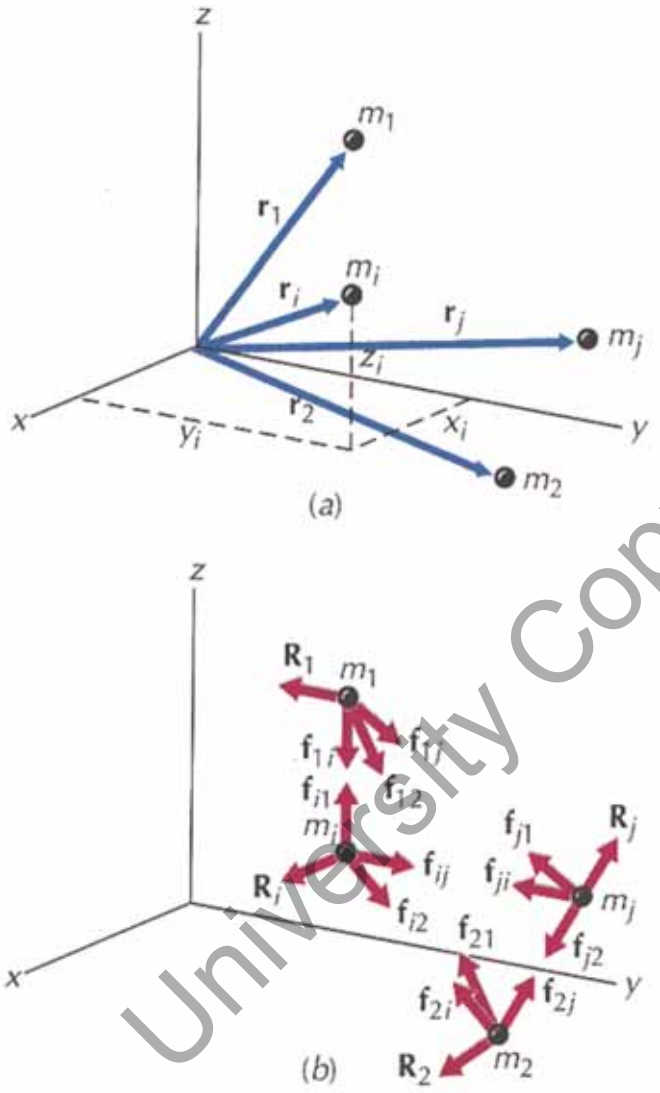
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

El sólido ya no está en equilibrio estático

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

University Copy For Library Use

- Cinética de un conjunto de puntos.



$$\sum \mathbf{R}_i + \sum \mathbf{f}_{ij} = m_i \mathbf{a}_i, \text{ pero } \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = 0;$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i = \sum_{i=1}^{n} m\mathbf{a}_i$$

Como que:

$$m\mathbf{r}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i;$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i;$$

$$m\mathbf{a}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i;$$

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}_G$$

University Copy For Library Use

- Ejemplos en movimiento recto y curvo.

Rectilíneo

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\mathbf{i}$$

$$\sum \mathbf{F}_x = m\mathbf{a}_x$$

$$\sum \mathbf{F}_y = 0$$

$$\sum \mathbf{F}_z = 0$$

Curvilíneo

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$$

$$\sum \mathbf{F}_x = m\mathbf{a}_x$$

$$\sum \mathbf{F}_y = m\mathbf{a}_y$$

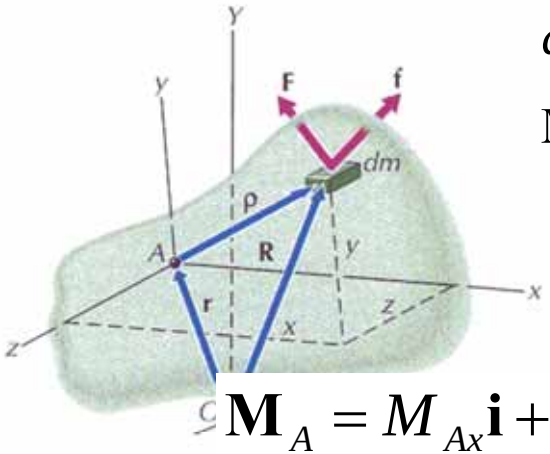
$$\sum \mathbf{F}_z = 0$$

University Copy For Library Use

• Movimiento plano del sólido en plano xy rotando en z.

Las ecuaciones de un movimiento plano se pueden descomponer en traslación en x e y más rotación en z.

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}_G$$



$$d\mathbf{M}_A = \boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{F} + \mathbf{f});$$

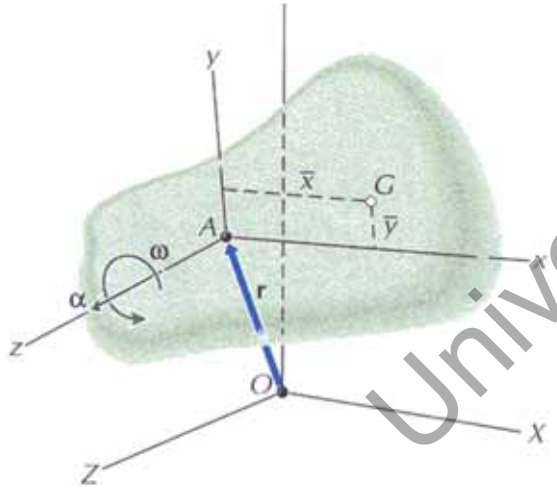
$$\mathbf{M}_A = \int_m (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{a}_A)dm + \int [\boldsymbol{\rho} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho})]dm + \int \{\boldsymbol{\rho} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})]\}dm$$

$$M_{Ax} = -a_{A_y} \int_m z\,dm - \alpha \int_m zx\,dm + \omega^2 \int_m yz\,dm$$

$$M_{Ay} = a_{A_x} \int_m z\,dm - \alpha \int_m yz\,dm - \omega^2 \int_m zx\,dm$$

$$M_{Az} = a_{A_y} \int_m x\,dm - a_{Ax} \int_m y\,dm + \alpha \int_m (x^2 + y^2)\,dm$$

$$\mathbf{M}_A = M_{Ax}\mathbf{i} + M_{Ay}\mathbf{j} + M_{Az}\mathbf{k}$$



$$M_{Ax} = -ma_{A_y} z - \alpha I_{Azx} + \omega^2 I_{Ayz}$$

$$M_{Ay} = ma_{A_x} z - \alpha I_{Ayz} - \omega^2 I_{Axz}$$

$$M_{Az} = ma_{A_y} \bar{x} - ma_{Ax} \bar{y} + \alpha I_{Azz}$$

University Copy For Library Use

• Ecuaciones de movimiento en el plano.

Como que G está contenido en el plano de movimiento xy:

$\bar{z} = 0;$

$$M_{Ax} = -\alpha I_{Azx} + \omega^2 I_{Ayz}$$

$$M_{Ay} = -\alpha I_{Ayz} - \omega^2 I_{Azx}$$

$$M_{Az} = a_{Ay}\bar{x}m - a_{Ax}\bar{y}m + \alpha I_{Az}$$

Si el cuerpo es simétrico a unos ejes centroidales, simétrico en plano de movimiento xy (No usar si no es simétrico!!):

$$I_{Azx} = I_{Ayz} = 0;$$

$$M_{Ax} = 0$$

$$M_{Ay} = 0$$

$$M_{Az} = a_{Ay}\bar{x}m - a_{Ax}\bar{y}m + \alpha I_{Az}$$

Si además de ser simétrica el momento es respecto a G:

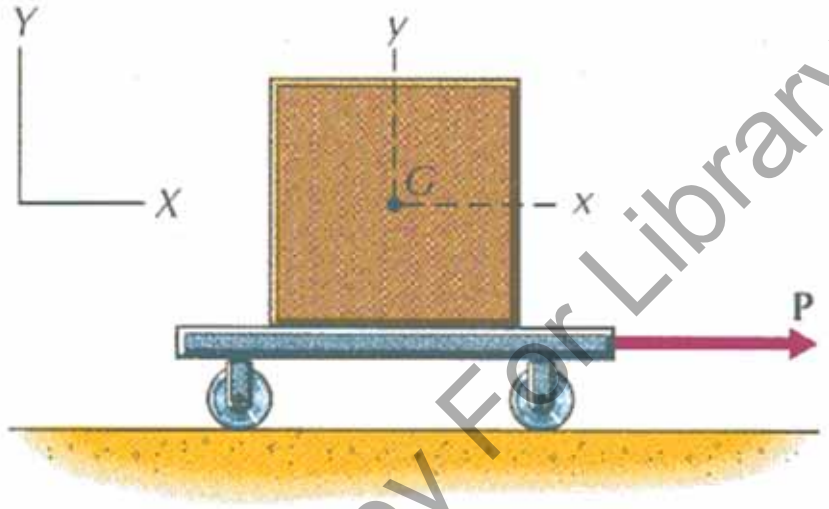
$$M_{Gx} = -\alpha I_{Gzx} + \omega^2 I_{Gyz} = 0$$

$$M_{Gy} = -\alpha I_{Gyz} - \omega^2 I_{Gzx} = 0$$

$$M_{Gz} = a_{Gy}\bar{x}m - a_{Gx}\bar{y}m + \alpha I_{Gz} = \alpha I_{Gz}$$

University Copy For Library Use

- Traslación plana rectilínea.

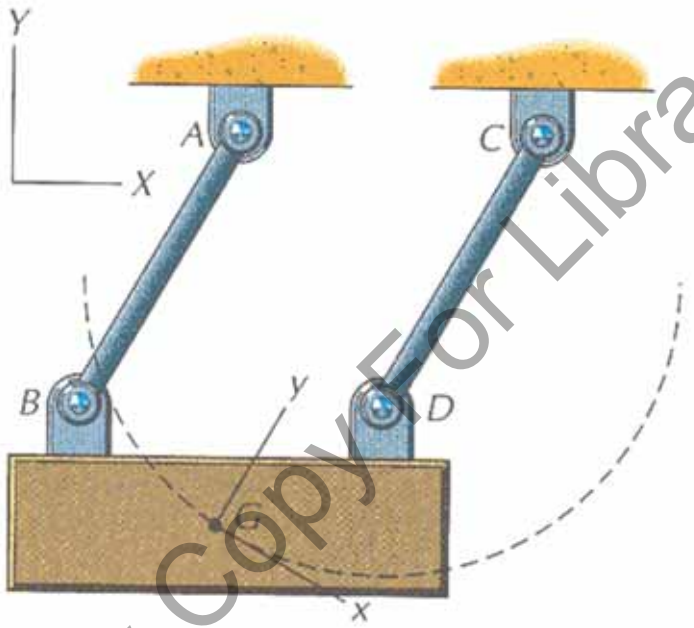


$$\sum F_x = ma_{Gx}$$
$$\sum F_y = ma_{Gy} = 0$$
$$\sum F_z = ma_{Gz} = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_G = 0$$

University Copy For Library Use

- Traslación plana curvilínea.



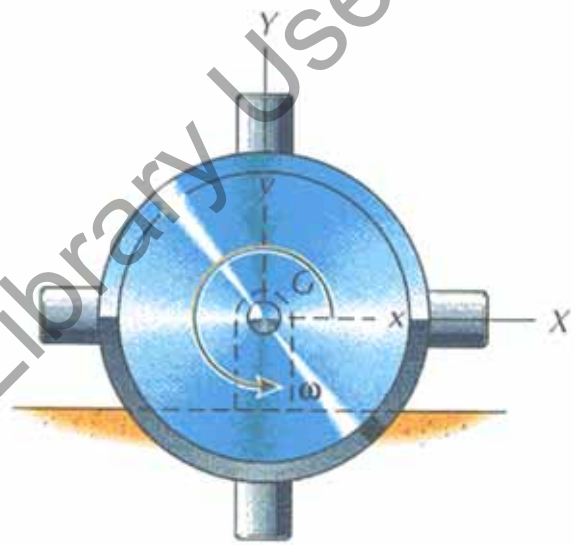
$$\sum F_x = ma_{Gx}$$
$$\sum F_y = ma_{Gy}$$
$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_{Az} = a_{Gy}\bar{x}m - a_{Gx}\bar{y}m$$

University Copy For Library Use

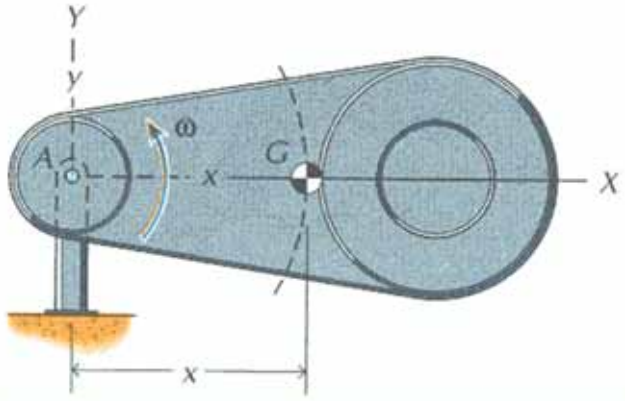
- Rotación alrededor eje fijo.

$$\sum \mathbf{F} = 0$$
$$\sum M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$



$$\sum F_x = ma_{Gx} = -m\bar{x}\omega^2$$
$$\sum F_y = ma_{Gy} = m\bar{x}\alpha$$
$$\sum M_{Az} = I_{Az}\alpha = \left(I_{Gz} + m\bar{x}^2\right)\alpha$$

$$M_{Az} = a_{Ay}\bar{x}m - a_{Ax}\bar{y}m + \alpha I_{Az}$$



University Copy For Library Use

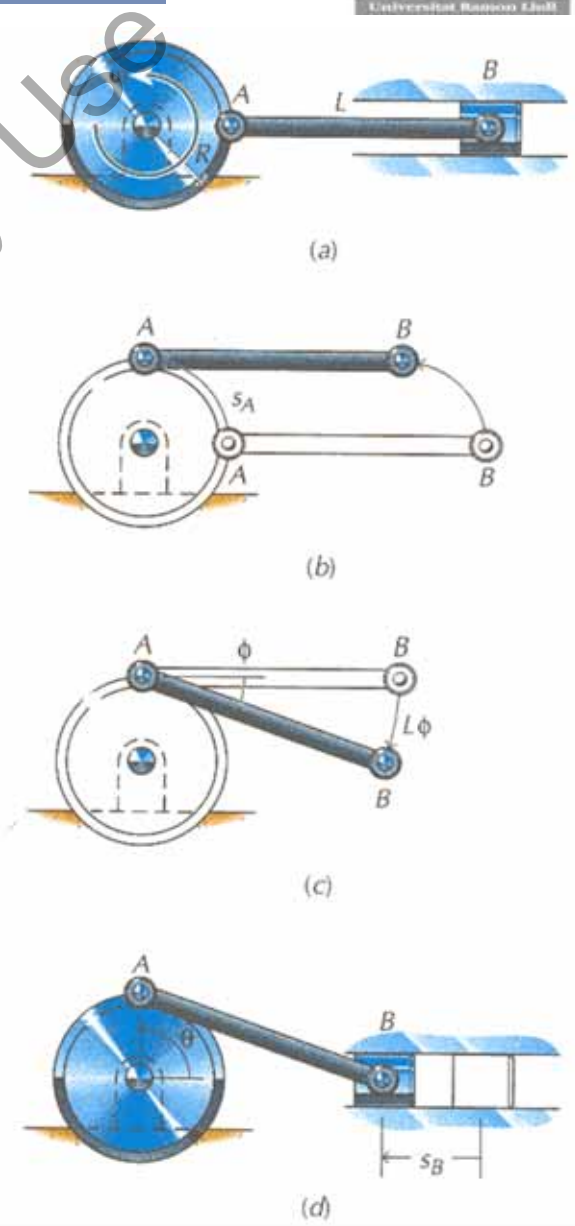
- Movimiento plano de sistema de SR.

Para la biela:

$$\sum F_x = ma_{Gx}$$

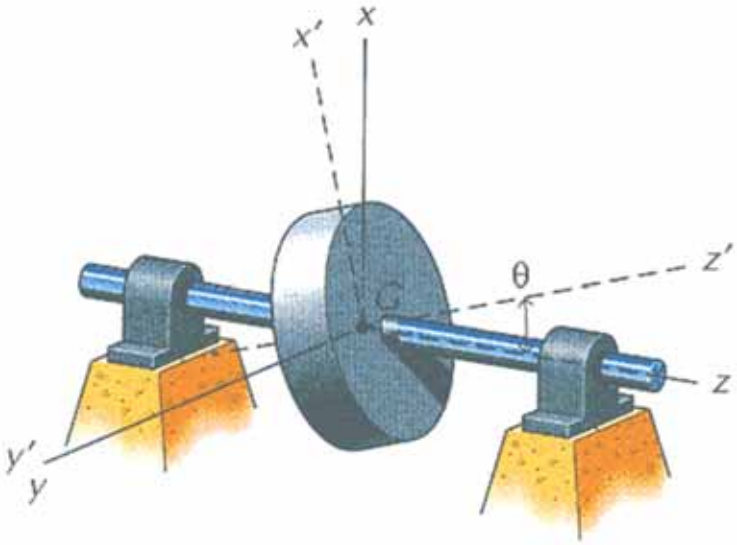
$$\sum F_y = ma_{Gy}$$

$$\sum M_G = I_{Gz}\alpha$$



University Copy For Library Use

- Cuerpos no simétricos al plano movimiento.

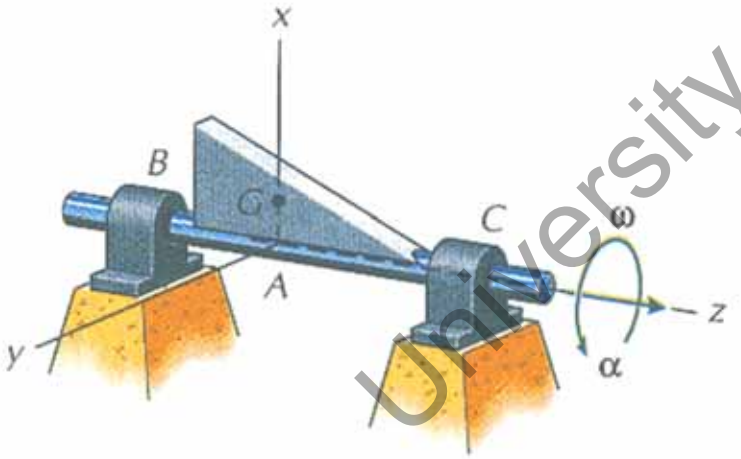


$$\sum \mathbf{F} = 0$$

$$\sum M_{Gx} = -I_{Gzx}\alpha$$

$$\sum M_{Gy} = -I_{Gzx}\omega^2$$

$$\sum M_{Gz} = I_{Gz}\alpha$$



$$\sum F_x = ma_{Gx}$$

$$\sum F_y = ma_{Gy}$$

$$\sum M_{Ax} = -I_{Azx}\alpha$$

$$\sum M_{Ay} = -I_{Azx}\omega^2$$

$$\sum M_{Az} = I_{Az}\alpha$$

University Copy For Library Use

- Ejemplo conjunto SR.

Cigüeñal A →

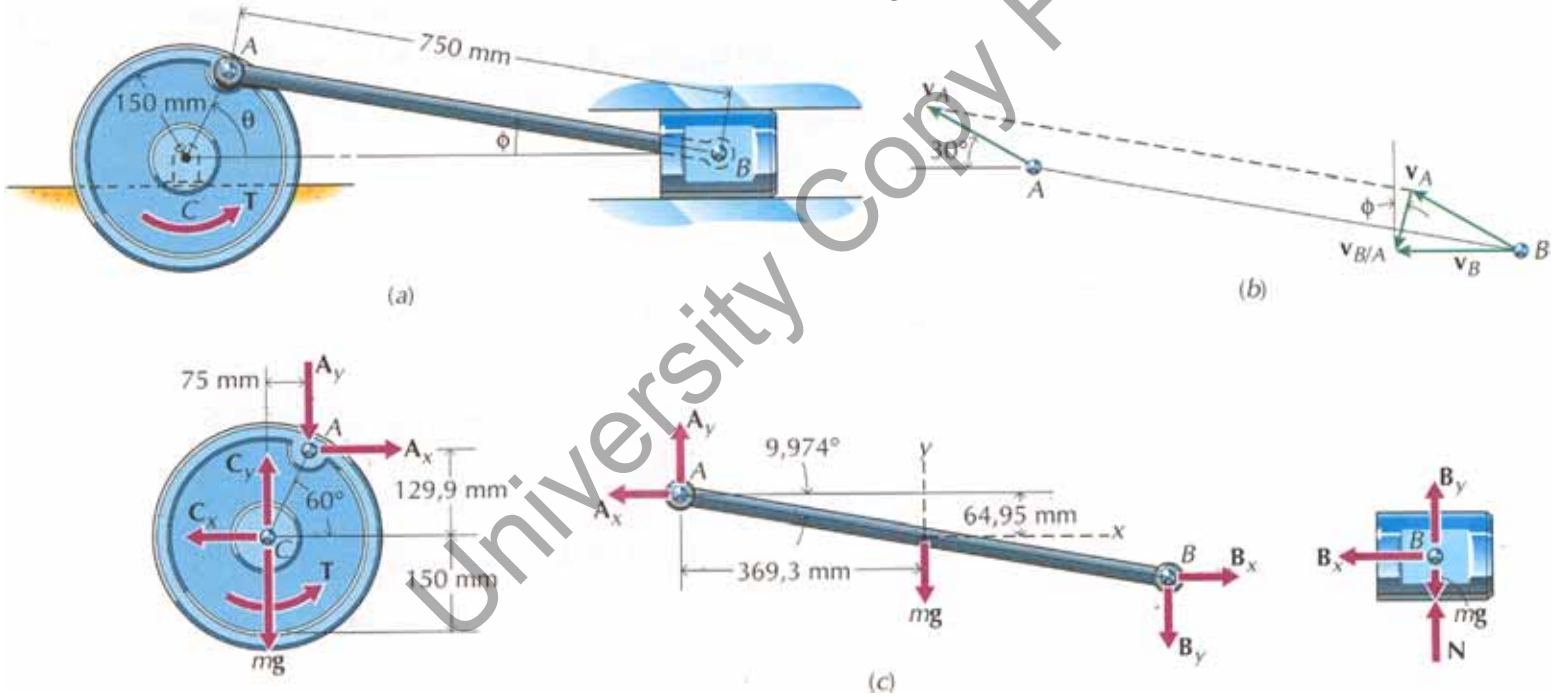
$$\sum F_{Gx} = 0; A_x - C_x = 0$$
$$\sum F_{Gy} = 0; -A_y + C_y - mg = 0$$
$$\sum M_{Gz} = I_{Gz}\alpha; T - A_y(75) - A_x(129.9) = I_{Gz}\alpha$$

Pistón B

$$\sum F_x = ma_{Gx}; -B_x = ma_{Gx}$$
$$\sum F_y = ma_{Gy}; B_y - mg + N = ma_{Gy}$$
$$\sum M_{Gz} = I_{Gz}\alpha; 0 = 0$$

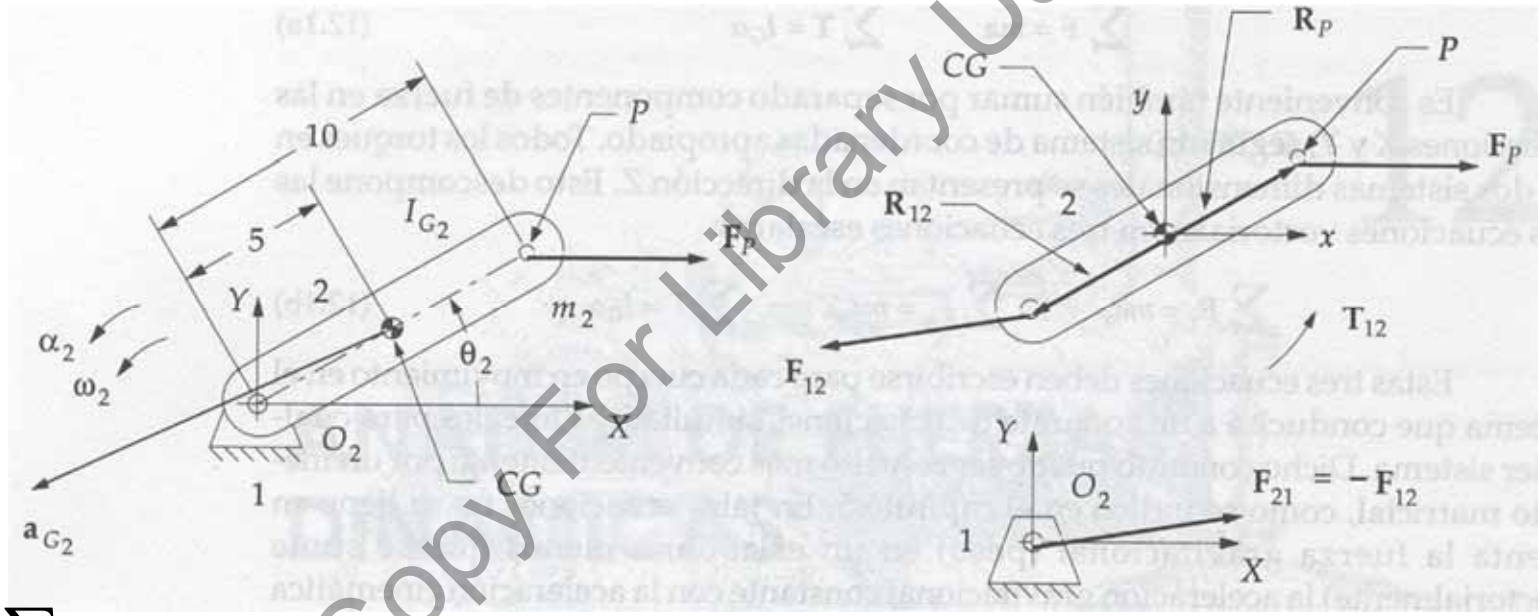
Biela

$$\sum F_x = ma_{Gx}; -A_x + B_x = ma_{Gx}$$
$$\sum F_y = ma_{Gy}; A_y - mg - B_y = ma_{Gy}$$
$$\sum M_{Gz} = I_{Gz}\alpha; A_x(64.95) - A_y(369.3) + B_x(64.95) - B_y(369.3) = I_{Gz}\alpha$$



University Copy For Library Use

- Solución matricial.



$$\sum F_x = m_2 a_{Gx}; F_{Px} + F_{12x} = m_2 a_{Gx}$$

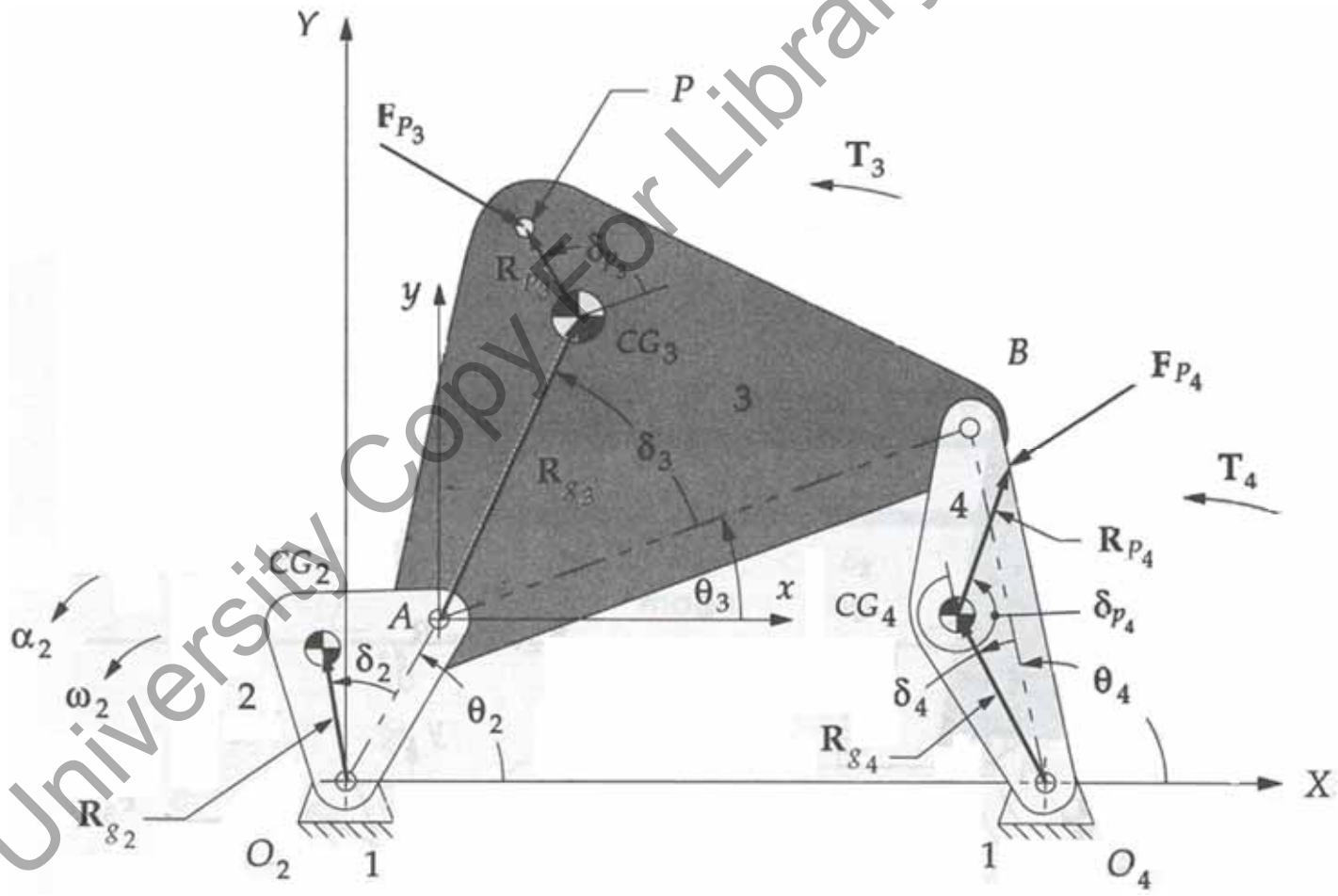
$$\sum F_y = m_2 a_{Gy}; F_{Py} + F_{12y} = m_2 a_{Gy}$$

$$\sum M = I_{Gz}\alpha; T_{12} + \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{Px}F_{Py} - R_{Py}F_{Px}\right) = I_{Gz}\alpha$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -R_{12y} & R_{12x} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 a_{Gx} - F_{Px} \\ m_2 a_{Gy} - F_{Py} \\ I_G\alpha - \left(R_{Px}F_{Py} - R_{Py}F_{Px}\right) \end{bmatrix}$$

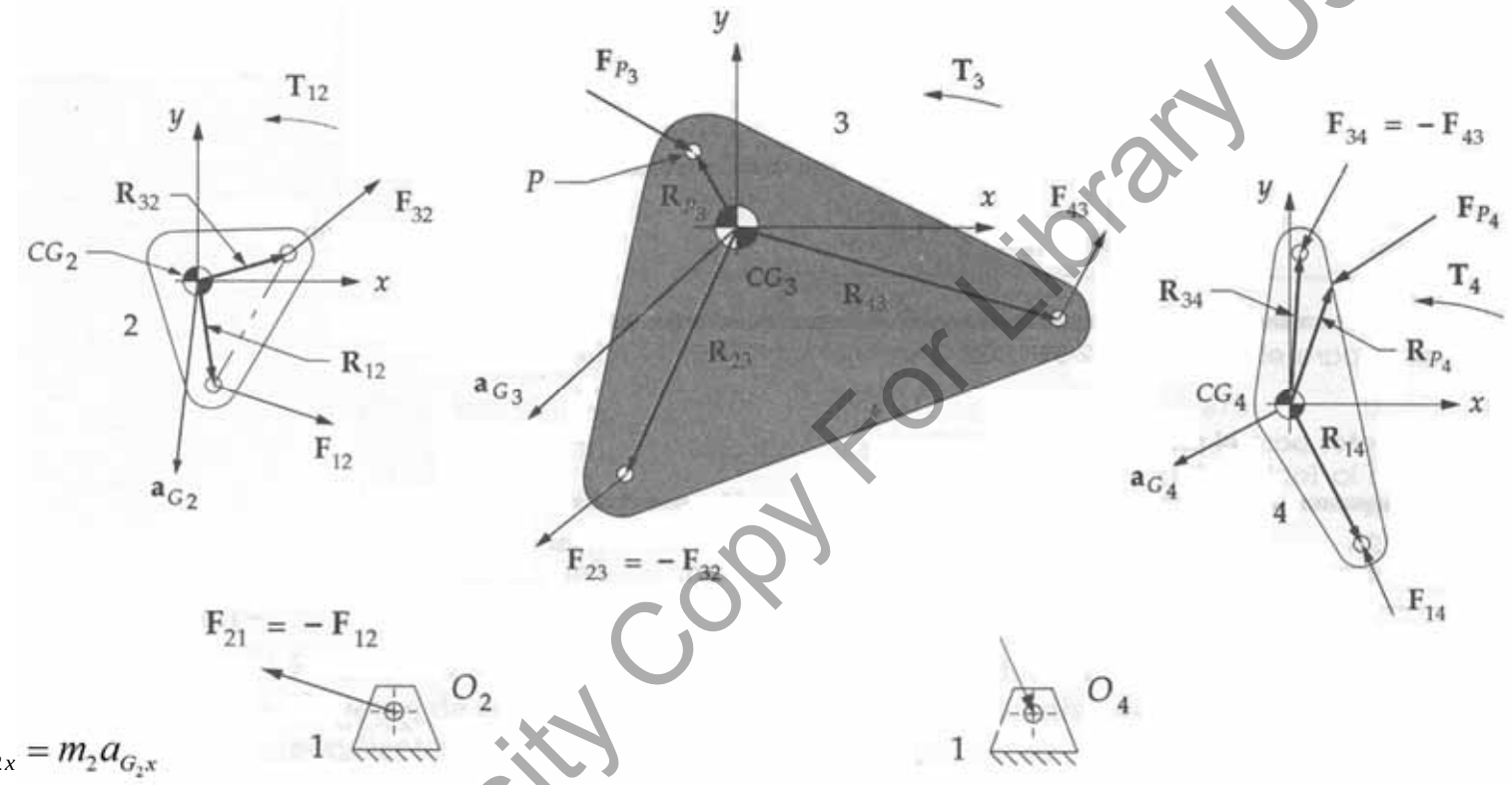
University Copy For Library Use

- Mecanismos.



University Copy For Library Use

- Ecuaciones en mecanismos.



$$F_{12x} + F_{32x} = m_2 a_{G_2 x}$$

$$F_{12y} + F_{32y} = m_2 a_{G_2 y}$$

$$T_{12} + \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}\right) = I_{G_2 z}\alpha_2$$

$$F_{43x} - F_{32x} + F_{Px} = m_3 a_{G_3 x}$$

$$F_{43y} - F_{32y} + F_{Py} = m_3 a_{G_3 y}$$

$$\left(R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}\right) + \left(R_{23x}F_{32y} - R_{23y}F_{32x}\right) + \left(R_{Px}F_{Py} - R_{Py}F_{Px}\right) = I_{G_3 z}\alpha_3$$

$$F_{14x} - F_{43x} = m_4 a_{G_4 x}$$

$$F_{14y} - F_{43y} = m_4 a_{G_4 y}$$

$$\left(R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x}\right) - \left(R_{34x}F_{43y} - R_{34y}F_{43x}\right) + T_4 = I_{G_4 z}\alpha_4$$

University Copy For Library Use

- Solución matricial.

$$F_{12x} + F_{32x} = m_2 a_{G_2 x}$$
$$F_{12y} + F_{32y} = m_2 a_{G_2 y}$$
$$T_{12} + \left(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}\right) + \left(R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}\right) = I_{G_2 z}\alpha_2$$

$$F_{14x} - F_{43x} = m_4 a_{G_4 x}$$
$$F_{14y} - F_{43y} = m_4 a_{G_4 y}$$
$$\left(R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x}\right) - \left(R_{34x}F_{43y} - R_{34y}F_{43x}\right) + T_4 = I_{G_4 z}\alpha_4$$

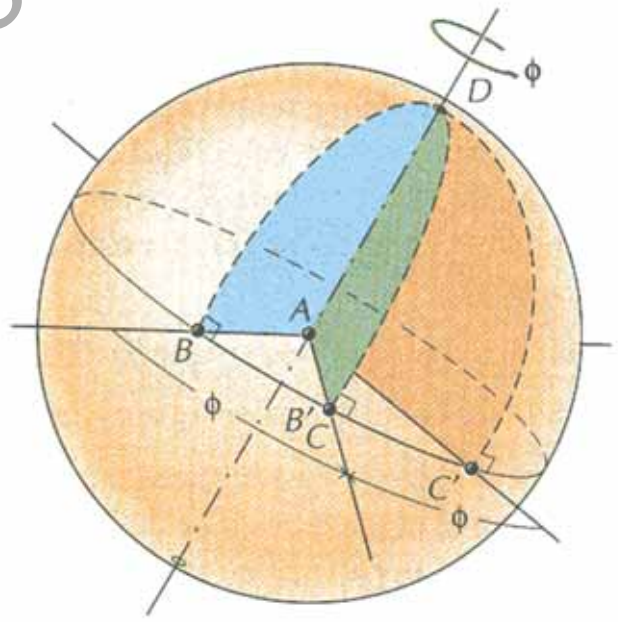
$$F_{43x} - F_{32x} + F_{Px} = m_3 a_{G_3 x}$$
$$F_{43y} - F_{32y} + F_{Py} = m_3 a_{G_3 y}$$
$$\left(R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}\right) + \left(R_{23x}F_{32y} - R_{23y}F_{32x}\right) + \left(R_{Px}F_{Py} - R_{Py}F_{Px}\right) = I_{G_3 z}\alpha_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & -R_{43y} & R_{43x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34y} & -R_{34x} & -R_{14y} & R_{14x} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{32y} \\ F_{43x} \\ F_{43y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 a_{G_2 x} \\ m_2 a_{G_2 y} \\ I_{G_2 z}\alpha_2 \\ m_3 a_{G_3 x} - F_{Px} \\ m_3 a_{G_3 y} - F_{Py} \\ I_{G_3 z}\alpha_3 - R_{Px}F_{Py} + R_{Py}F_{Px} \\ m_4 a_{G_4 x} \\ m_4 a_{G_4 y} \\ I_{G_4 z}\alpha_4 - T_4 \end{bmatrix}$$

University Copy For Library Use

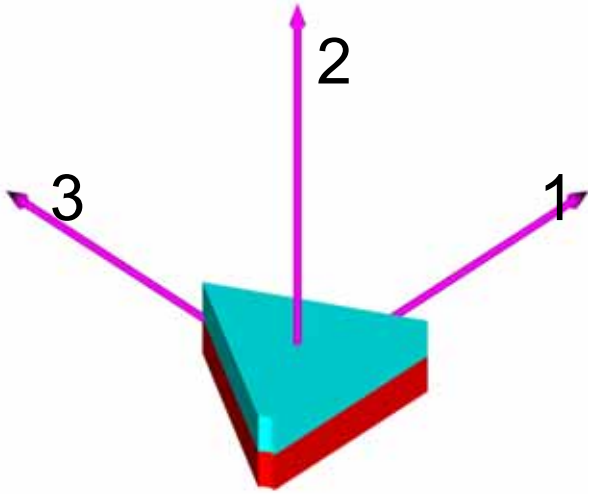
- Teorema de Euler.

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un punto fijo, toda posición del cuerpo se puede obtener a partir de cualquier otra posición mediante una sola rotación en torno a un cierto eje que pasa por dicho punto fijo.

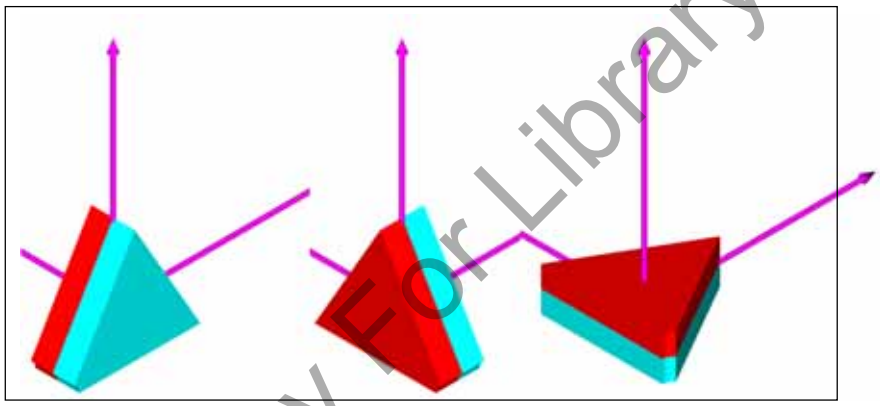


University Copy For Library Use

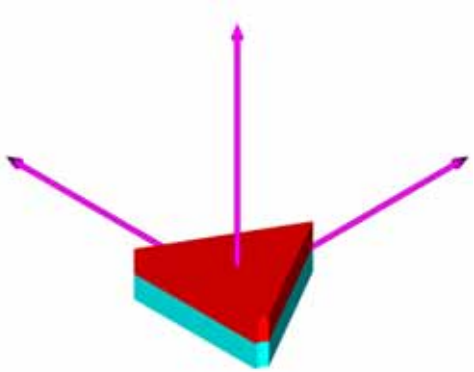
- Rotaciones finitas.



1-2-3

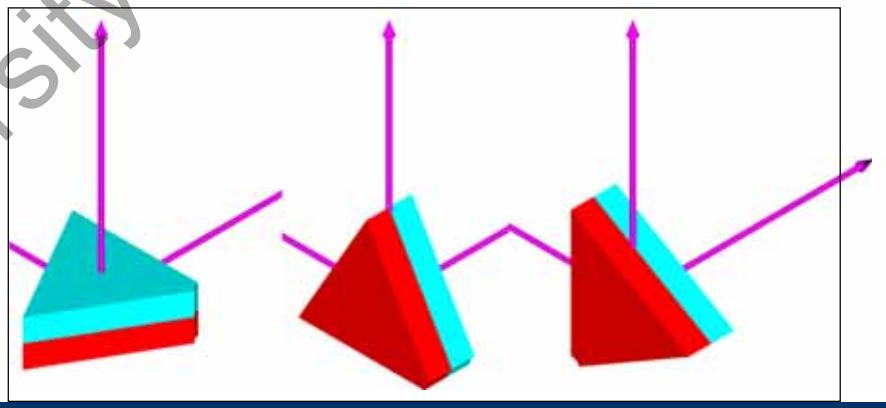


1-2-3

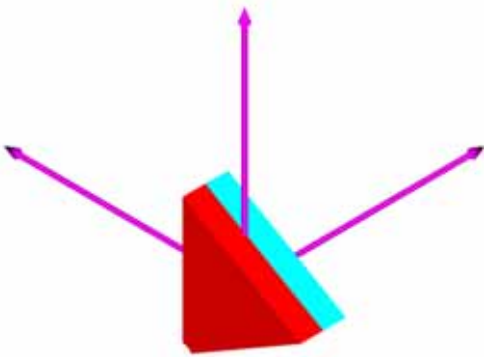


Las rotaciones finitas no son vectores, y por tanto no obedecen a las reglas de adición de vectores.

2-3-1

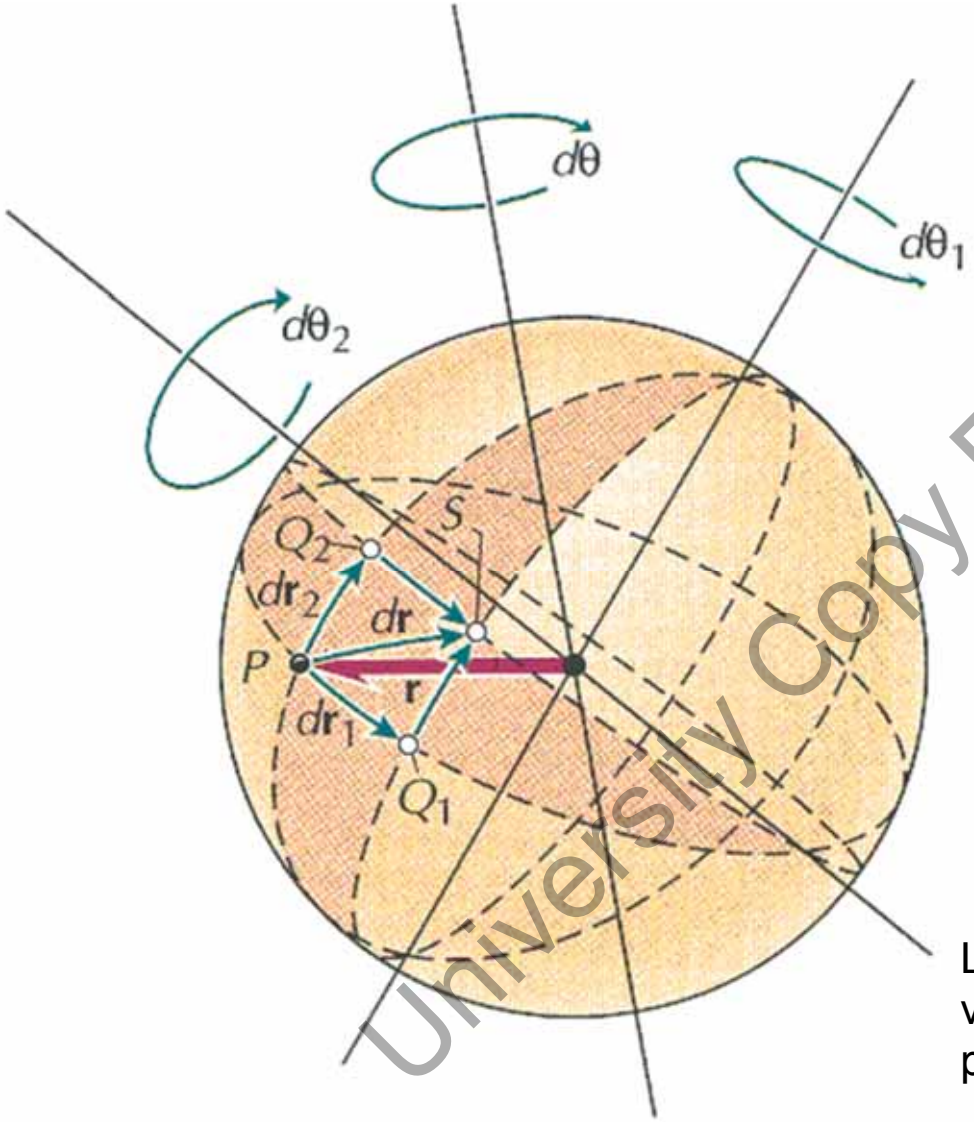


2-3-1



University Copy For Library Use

- Rotaciones infinitesimales.



Las rotaciones infinitesimales pueden tratarse como vectores

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r};$$

$$d\boldsymbol{\theta} = d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2 :$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt};$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}};$$

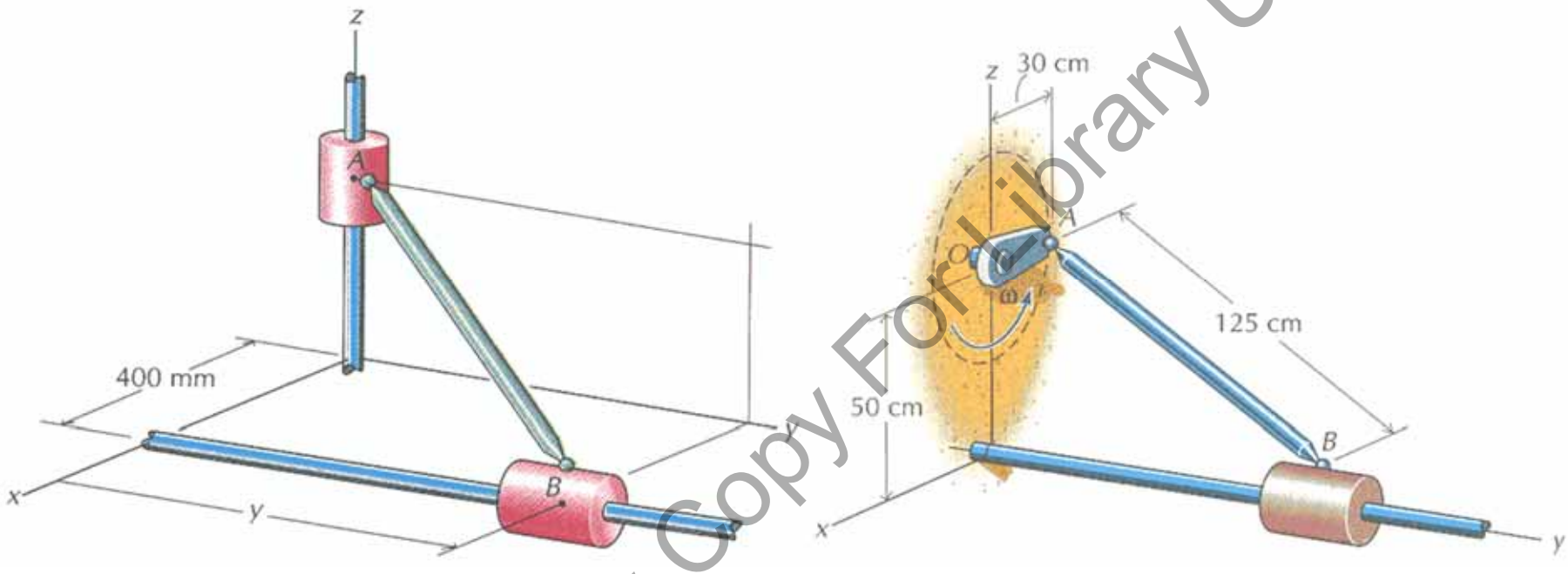
$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P;$$

$$\mathbf{a}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P\right)$$

Los módulos y direcciones de α y ω varían en el tiempo (no es movimiento plano).

University Copy For Library Use

- Movimiento general de sólidos.



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A};$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Debe tenerse en cuenta que las direcciones de α y ω no son constantes.

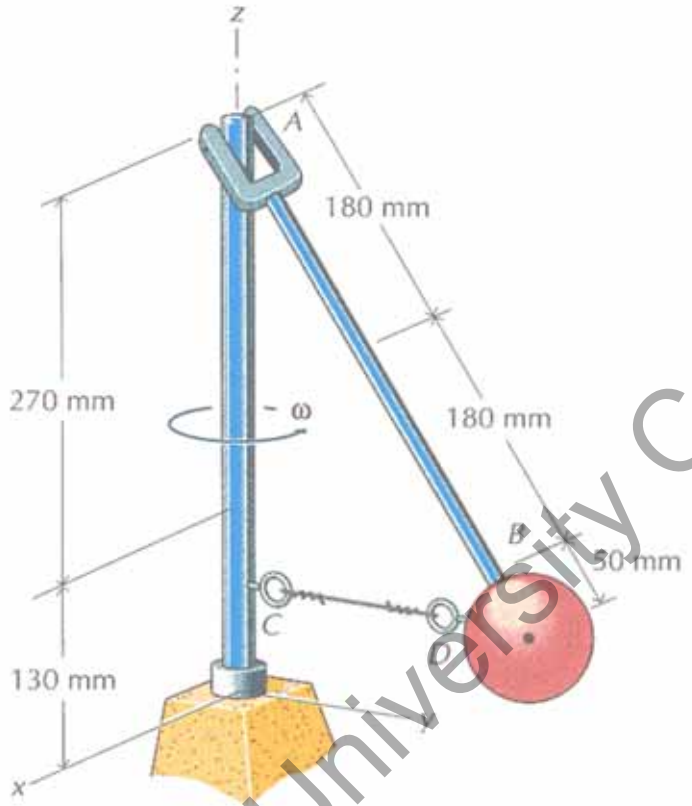
University Copy For Library Use

- Cinética del SR en 3D.

$$
\begin{aligned}
M_{Ax} &= a_{Az}\bar{y}m - a_{Ay}\bar{z}m + I_{Ax}\dot{\omega}_x \\
&\quad -\left(I_{Ay} - I_{Az}\right)\omega_y\omega_z + I_{Axy}\left(\omega_z\omega_x - \dot{\omega}_y\right) \\
&\quad - I_{Ayz}\left(\omega_y^2 - \omega_z^2\right) - I_{Azx}\left(\omega_x\omega_y + \dot{\omega}_z\right) \\
M_{Ay} &= a_{Ax}\bar{z}m - a_{Az}\bar{x}m + I_{Ay}\dot{\omega}_y \\
&\quad -\left(I_{Az} - I_{Ax}\right)\omega_x\omega_z + I_{Ayz}\left(\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z\right) \\
&\quad - I_{Azx}\left(\omega_z^2 - \omega_x^2\right) - I_{Axy}\left(\omega_y\omega_z + \dot{\omega}_x\right) \\
M_{Az} &= a_{Ay}\bar{x}m - a_{Ax}\bar{y}m + I_{Az}\dot{\omega}_z \\
&\quad -\left(I_{Ax} - I_{Ay}\right)\omega_x\omega_y + I_{Azx}\left(\omega_y\omega_z - \dot{\omega}_x\right) \\
&\quad - I_{Axy}\left(\omega_x^2 - \omega_y^2\right) - I_{Ayz}\left(\omega_z\omega_x + \dot{\omega}_y\right)
\end{aligned}
$$

University Copy For Library Use

- Ejemplo 3D.



University Copy For Library Use

• Ejercicio básico.

Sabemos del estudio cinemático que $V_{A1}=V_{A2}=(0,-6)$, $V_{B1}=(8,0)$, $\omega_1=2[r/s]$, $V_{B2}=(4.5,0)$, $\omega_2=1.5[r/s]$, $a_{G1}=(0,-16.66)$, $\alpha_1=-5.333[r/s^2]$, $a_{G2}=(0,-7.03)$, $\alpha_2=-1.688[r/s^2]$.

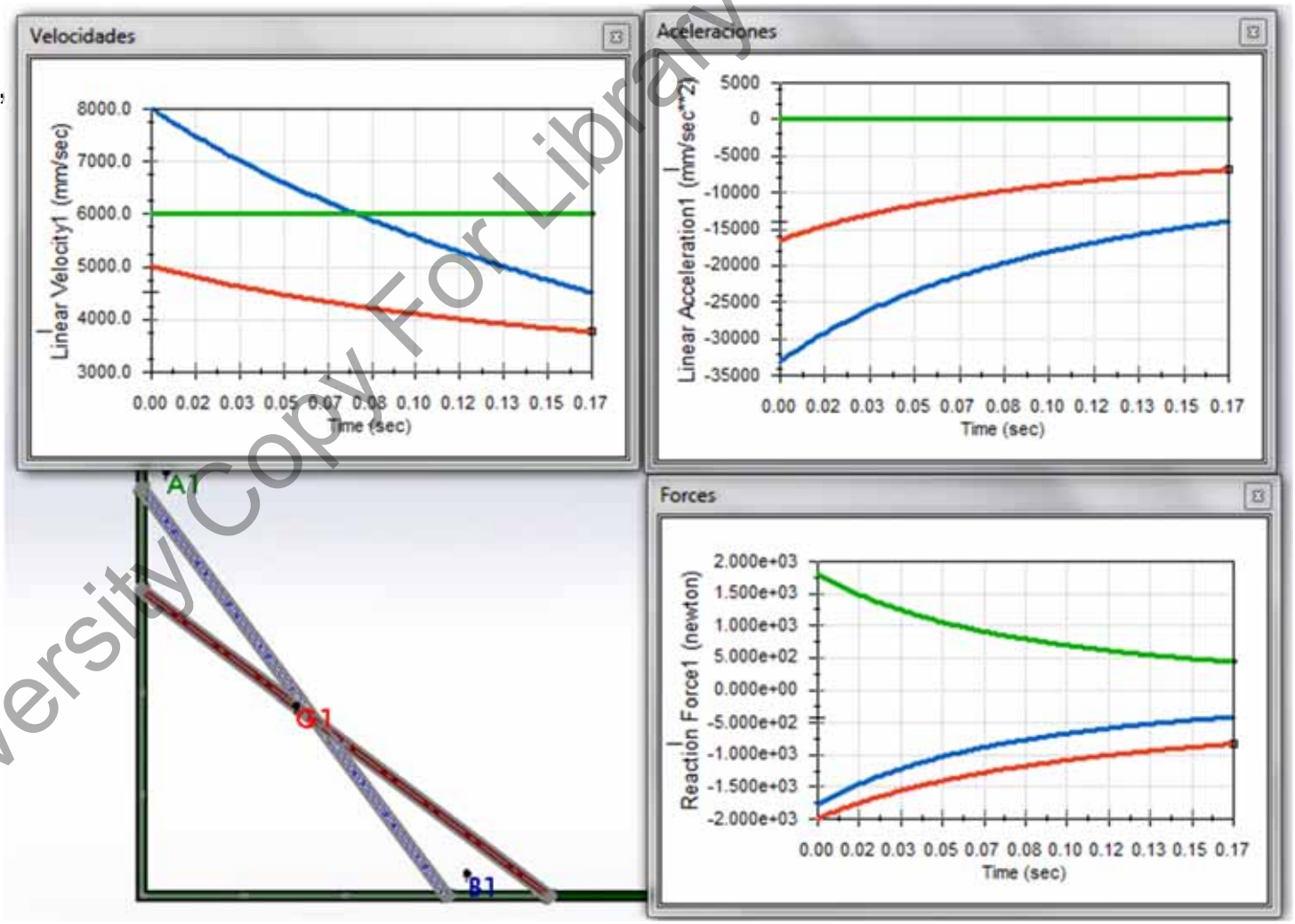
Si la masa es 120[kg]
$I_A=mL^3/3=1000[kg.m^2]$

$F_{A1x}=-120*16.66=-2000[N]$

$F_{A2x}=-120*7.03=-843[N]$

$F_{A1y}=-F_{B1y}=1000*5.333/3=1777.7[N]$

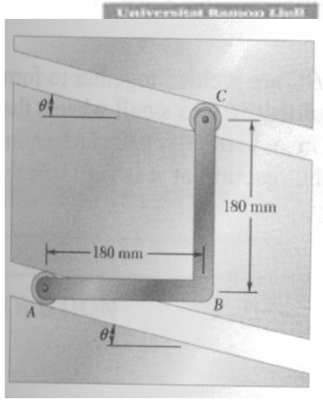
$F_{A2y}=-F_{B2y}=1000*1.688/3=562.7[N]$



University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 16_001 .

Dos barras AB y BC de 0.4 [kg] soldadas para hacer una "L" deslizan por unas guías de inclinación θ=30º considerando la gravedad. Determinar la aceleración y reacciones en A y C.

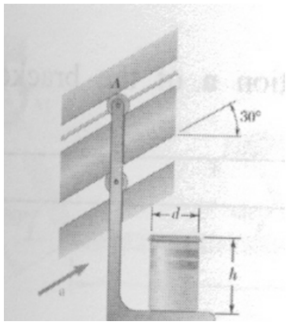


University Copy For Library Use

Sol: (a) $a=g*\sin\theta*(\cos\theta,-\sin\theta)$ (b) $Ra=2.94(\sin\theta,\cos\theta)$, $Rc=9.74(\sin\theta,\cos\theta)$

- Ejercicio casa Beer 16_009.

Se transporta el barril con una fricción μ=0.3 por una rampa de pendiente θ=30º. Determinar la aceleración de subida que hará que deslice el barril y (b) el menor ratio "h/d" para que vuelque antes de deslizar.

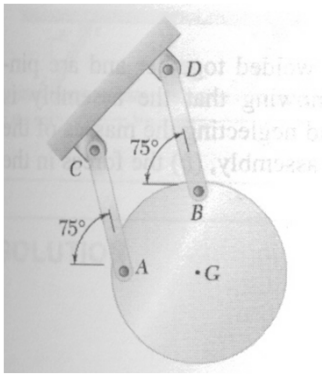


University Copy For Library Use

Sol: (a) $a=\mu g/(\cos 30º-\mu \sin 30º)=0.429g$ (b) $h/d=1/\mu=0.33$

- Ejercicio casa Beer 16_013.

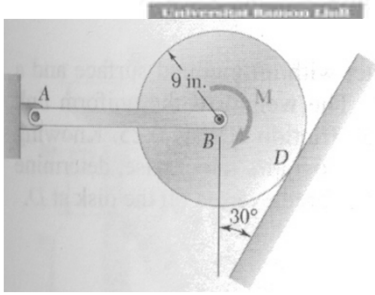
El disco de masa 6[kg] está unido a dos barras AC y BD de igual longitud. Se suelta el disco en el ángulo de la figura de 75º en que AG es horizontal y BG vertical. Determinar (a) la aceleración y (b) la tensión en las barras (suponer sólo tensión-compresión).



University Copy For Library Use

Sol: (a) $a=g\cos 75^{o}=2.54[m/s^{2}]$ (b) Fa=12.01 y Fb=44.8 [N]

- Ejercicio casa Beer 16_023.



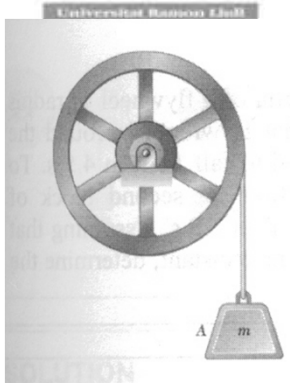
Un disco de 20[lb] tiene contacto con plano inclinado y una par de 7.5 [lb·ft]. El peso de la barra AB es despreciable. El coeficiente de fricción en D es μ=0.4. Determinar (a) la aceleración angular del disco y (b) la fuerza en el link AB.

University Copy For Library Use

Sol: (a) $a=-2.35[rad/s^2]\circlearrowright$ (b) $F_B=15.74[lb]$ compresión

- Ejercicio casa Beer 16_027.

La rueda tiene radio r=600[mm] y masa 144[kg] con radio de giro inercial de k=450[mm]. El bloque A de 18[kg] se libera. Determinar (a) la aceleración del bloque y (b) la velocidad al bajar 1.8[m] .

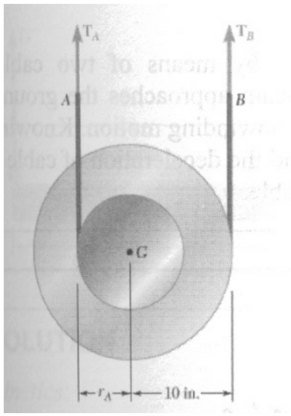


University Copy For Library Use

Sol: (a) $a=m_A g/(m_A+m_R*(k/r)^2)=1.784[m/s^2]$ (b) $v_A=2as=2*1.784*1.8=2.53[m/s]$

- Ejercicio casa Beer 16_051.

Dos tambores de radio r_A=6.92[in] y rB=10[in] pesan en total 12[lb]. Si la aceleración del punto B de la cuerda es cero y que la tensión de la cuerda a es 10[lb] y de l a cuerda b es de 5[lb] dar el radio de giro inercial de los dos tambores.

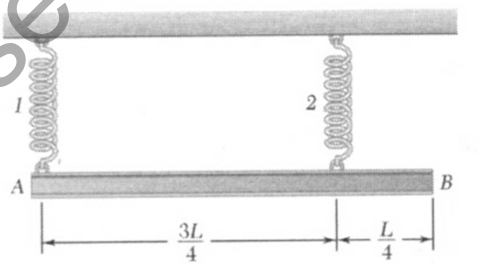


University Copy For Library Use

Sol: (a) k=8[in]=0.6667[ft]

- Ejercicio casa Beer 16_060.

Una viga AB de masa m se sujeta por muelles y en un momento dado se rompe el muelle 2. Dar (a) la aceleración de punto A y (b) aceleración ed punto B .



Sol: (a) $a_A = g/3\uparrow$ (b) $a_B = 5g/3\downarrow$

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Conceptos de teoría de cinética en sólidos rígido.

➢ Ejercicios propuestos con cálculo de fuerzas en movimiento plano.

University Copy For Library Use

S32t.- Energía Cinética del Sólido Rígido.

Mejora 1314 ...

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.
  - Conceptos de teoría de cinética en sólidos rígido.
  - Ejercicios propuestos con cálculo de fuerzas en movimiento plano.

University Copy For Library Use

• Objetivos sesión.

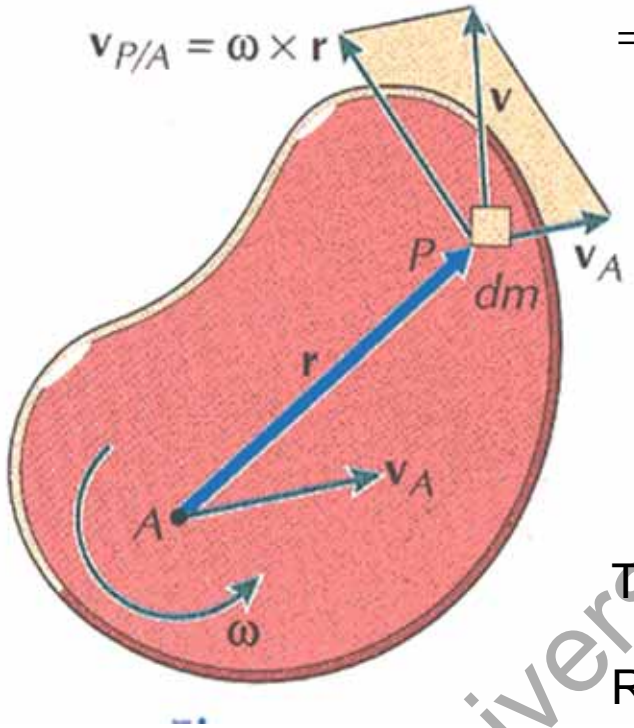
➢ Comprender las ecuaciones de energía cinética y cantidad de movimiento para sólido rígido.

➢ Realizar ejercicios básicos comparando partícula, barra y otras formas para analizar velocidades, aceleraciones y fuerzas.

$$Ec = \tfrac{1}{2} m v_A^2 + m\mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}\right) + \tfrac{1}{2} \omega^2 I_{Az}$$

University Copy For Library Use

- Energía cinética de cuerpo con mov. plano general.



$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$dEc = \tfrac{1}{2} dm v^2 = \tfrac{1}{2} dm \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2} dm (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$= \tfrac{1}{2} dm v_A^2 + dm \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \tfrac{1}{2} dm \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\omega^2 (x^2 + y^2)}$$

$$Ec = \tfrac{1}{2} v_A^2 \int dm + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int \mathbf{r} dm \right) + \tfrac{1}{2} \omega^2 \int (x^2 + y^2) dm$$

$$Ec = \tfrac{1}{2} m v_A^2 + m \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}) + \tfrac{1}{2} \omega^2 I_{Az}$$

Traslación: $\boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow Ec = \tfrac{1}{2} m v^2$

Rotación: $\mathbf{v}_A = 0 \Rightarrow Ec = \tfrac{1}{2} I_{Az} \omega^2$

MPG: $\mathbf{r}_{G/A} = 0 \Rightarrow Ec = \tfrac{1}{2} m v_G^2 + \tfrac{1}{2} I_{Gz} \omega^2$

University Copy For Library Use

- Conservación de la energía.

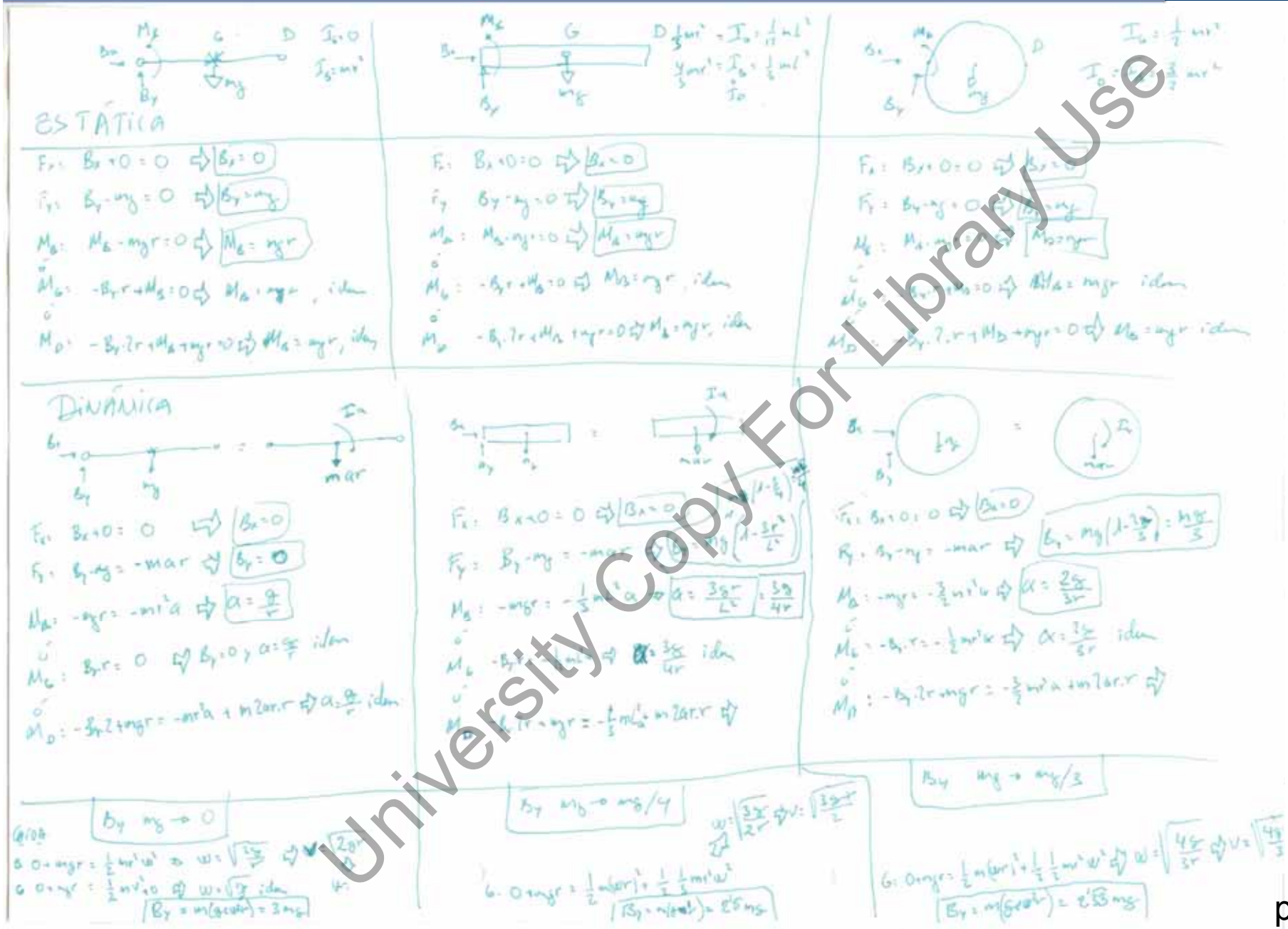
Si usamos criterios de conservación de la energía se pueden hallar la potencia sin olvidar el Par M y velocidad angular ω. Con estos criterios podemos obtener una solución rápida sin necesidad de desarmar el mecanismo.

$$Ec_1 + U^{c}_{1\to 2} + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2$$

$$Ec_1 + Ep_1 + U^{nc}_{1\to 2} = Ec_2 + Ep_2$$

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega}$$

University Copy For Library Use



University Copy For Library Use

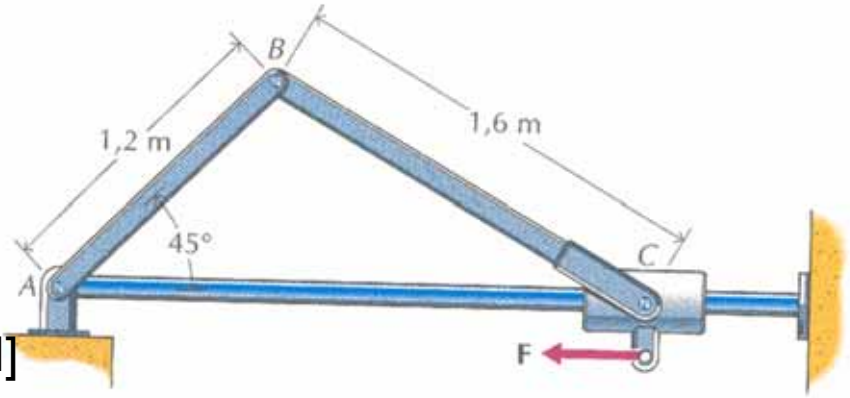
• Riley 16.76 pág. 245.

Las barras AB y BC de la figura tienen sección uniforme y masas de 10 y 15 kg. En la posición representada el collar C se está moviendo hacia la izquierda con una celeridad de 1 m/s, aumentando su celeridad a razón de 2 m/s^2. Determinar:

- ➢ La velocidad del punto B.
- ➢ La aceleración angular de la barra AB
- ➢ La fuerza F necesaria para mantener el mecanismo funcionando en las condiciones especificadas
- ➢ Las fuerzas que ejercen sobre la barra AB los pasadores en A y B

.

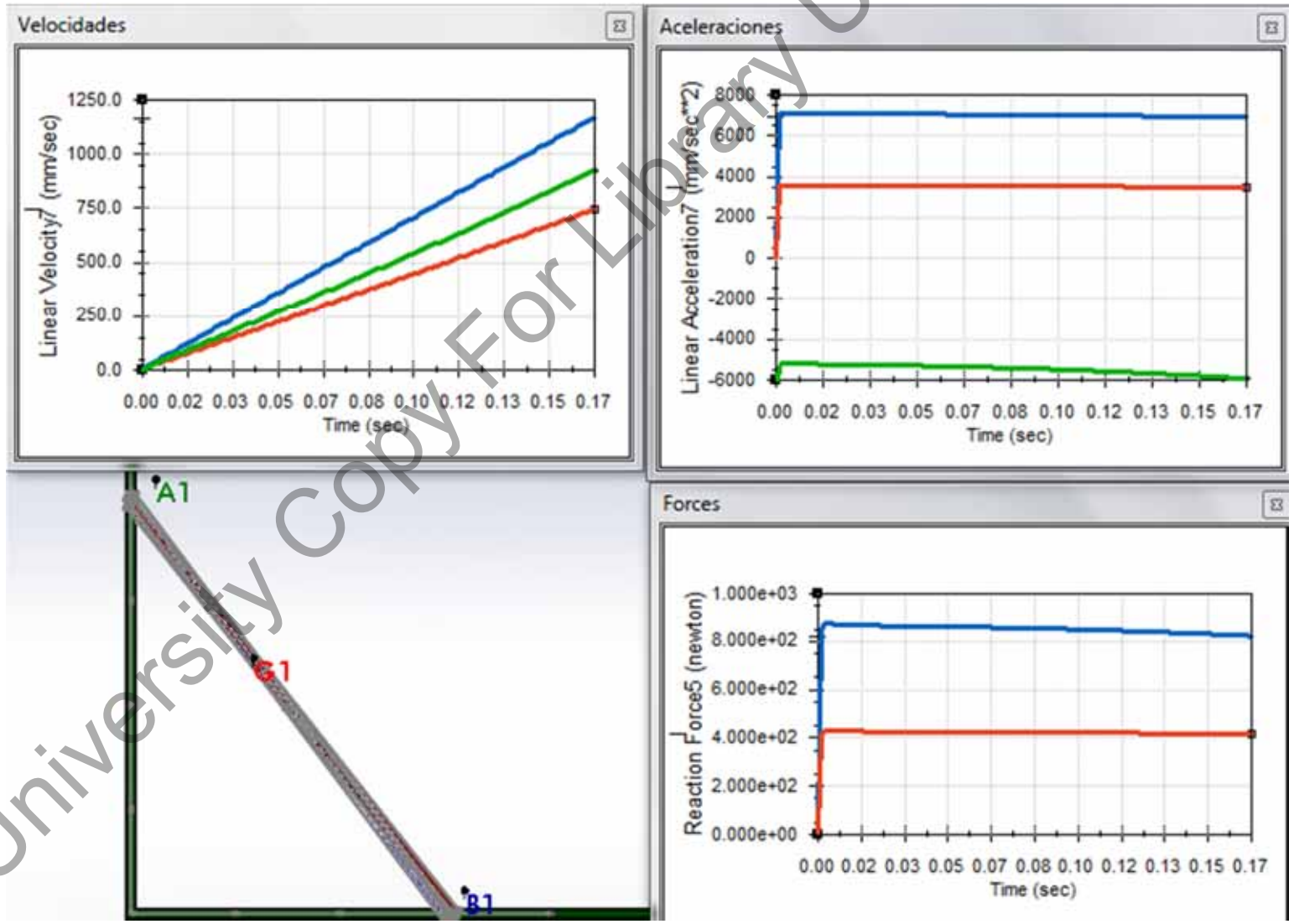
Sol: (a) V_B=(-0.6157,0.6157) [m/s],
(b) α_{AB}=1.048 [rad/s^2],
(c) F_C=(-100.5,129.4) [N]
(d) F_A=(69.45,121.5) [N], F_B=(-76.12,-21.15)[N]



University Copy For Library Use

- Ejercicio básico.

.



University Copy For Library Use

• Ejercicio básico.

Calcular para pasar de 4/3 a 3/4.

$mgh=0.5mv^2+0.5I\omega^2$.

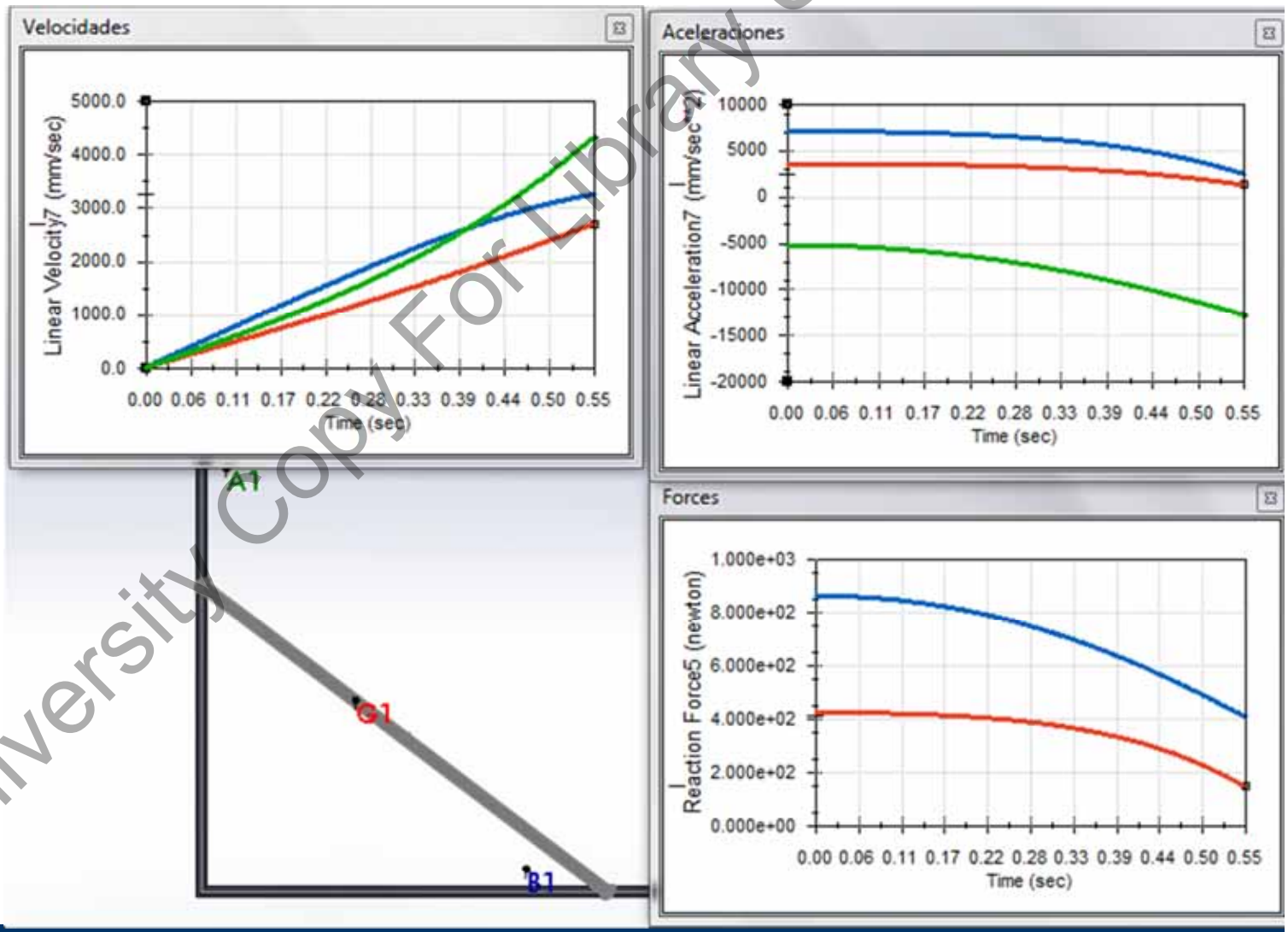
Como al bajar A de 4 a 3 el punto G baja 0.5 y $v=\omega*L/2$ y $I=mL^2/12$ para L=5 y m=120[kg] entonces:

$mg0.5=m\omega^2 5^2(1/8+1/24)$

$\omega=1.085$[rad/s]

$v_A=4.338$[m/s]↓

$v_B=3.254$[m/s]→



University Copy For Library Use

- Riley 16.76 pág. 245.

$\sin\beta=1.2\sin45^o/1.6 \Rightarrow \beta=32.03^o$

$x=1.6\sin(180-45-\beta)/\sin45^o=2.205$

$\omega_{BC}=-1/2.205=-0.4535[r/s]$ ↻

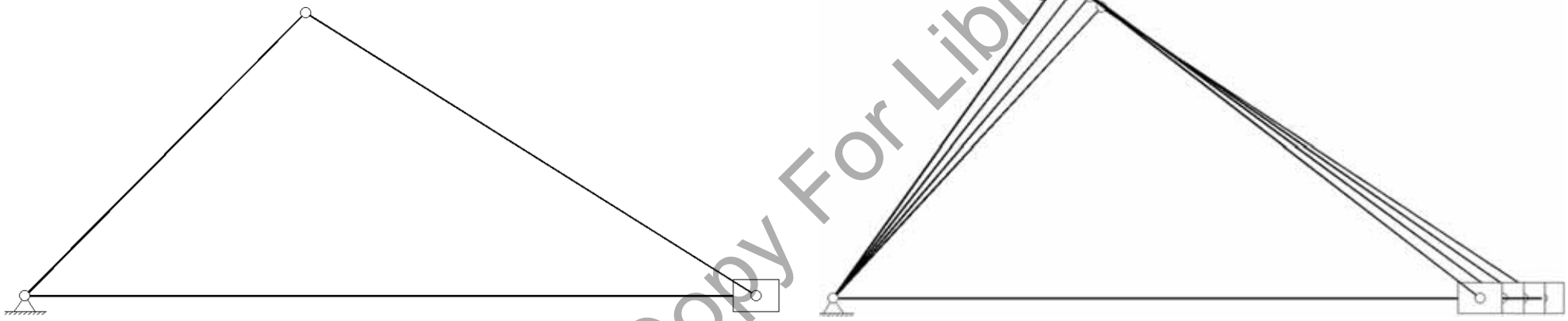
$v_B=\omega_{BC}*(2.205-1.2\cos45^o)/\cos45^o=0.8699$

$\omega_{AB}=v_B/1.2=0.7250[r/s]$ ↺

University Copy For Library Use

- Riley 16.76 pág. 245.

Solución con PAM: "http://www.em.upc.edu/docencia/estudis_grau/etseib/teoria_maquines/programa-d-analisi-de-mecanismes-pam-1/" .



temps	fi Manivela	Dfi Manivela	DDfi Manivel	fi Biela	Dx Biela	Dy Biela	Dfi Biela	DDx Biela	DDy Biela	DDfi Biela
0.000E+00	7.890E-01	7.230E-01	1.051E+00	5.722E+00	-6.157E-01	6.113E-01	-4.513E-01	-1.337E+00	4.430E-01	-4.551E-01

x Piston	Dx Piston	DDx Piston	Fx Fijo	Fy Fijo	Mz Fijo	Fx A	Fy A	Fx B	Fy B	Fx C	Fy C
2.200E+00	-1.000E+00	-2.000E+00	-3.171E+01	2.507E+02	2.848E+02	6.876E+01	1.213E+02	7.544E+01	2.099E+01	1.005E+02	-1.294E+02

Fnormal Ban	Força actuad
1.294E+02	-1.005E+02

Sol: (a) V_B=(-0.6157,0.6157) [m/s],

(b) α_{AB}=1.048 [rad/s^2],

(c) F_C=(-100.5,129.4) [N]

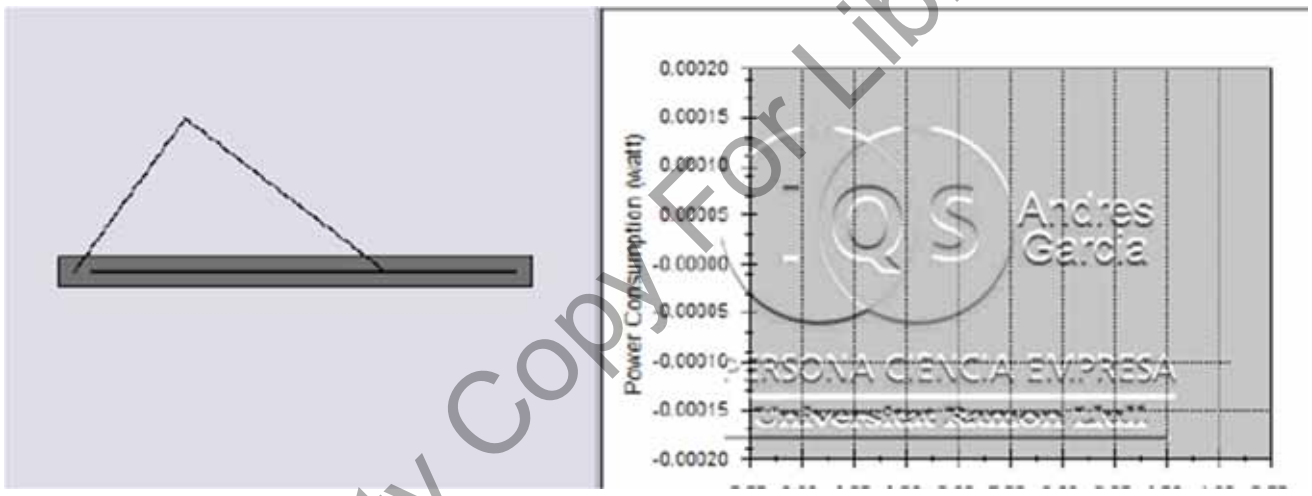
(d) F_A=(69.45,121.5) [N], F_B=(-76.12,-21.15)[N]

University Copy For Library Use

- Riley 16.76 pág. 245.

Solución con SolidWorks - CosmosMotion:

Todavía no se ha podido hacer el colocar un motor lineal con velocidad inicial y aceleración inicial.



University Copy For Library Use

- # Beer 16.155 pág. 1077.

El varillaje *ABCD* se forma conectando la barra *BC* de 3 kg a las barras *AB* y *CD* de 1.5 kg. El movimiento del varillaje se controla mediante un par **M** aplicado en la barra *AB*. Si se sabe que en el instante indicado la barra *AB* tiene una velocidad angular de 24 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y ninguna aceleración angular, determine:

- La velocidad y aceleración angular de la barra *CD*
- El par **M** necesario para que el mecanismo funcione con los datos especificados
- La fuerza ejercida en *B* sobre la barra *BC*.

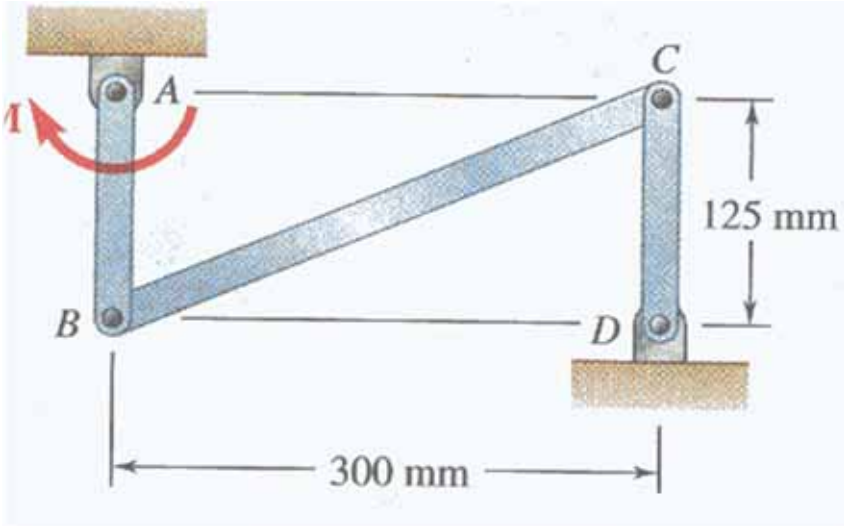
Sol:

(a) $\omega_{CD}=-\omega_{AB}=24[rad/s]\circlearrowleft$

$\alpha_{BC}=\alpha_{CD}=-480\ [rad/s^2]$

(b) M=14.94 N·m

(c) $F_B=(119.5,88.01)\ [N]$



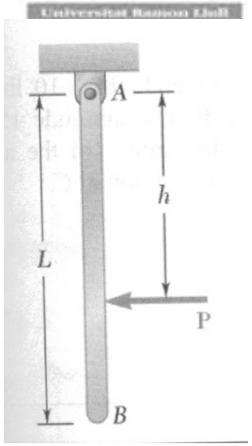
University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios de movimiento plano en mecanismos con fuerzas y momentos de inercia.

University Copy For Library Use

- Beer 16_071.



Una barra de L=0.9[m] y m=1[kg] cuelga de A. Si se aplica una fuerza P=3.5[N] en B (h=L) determinar (a) aceleración angular y (b) reacciones en A.

ΣM_A: $-PL=m(\alpha L/2)*L/2+mL^2/12\alpha \Rightarrow \alpha=-3P/mL=-11.67$ [rad/s]

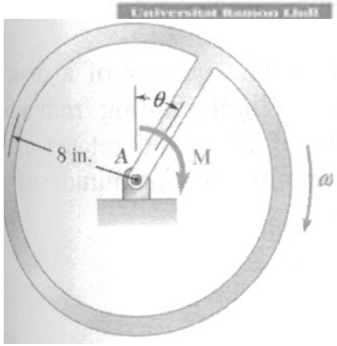
ΣF_x: $A_x-P=m\alpha L/2 \Rightarrow A_x=3.5+1*(-11.67)*0.9/2=-1.75$[N]

ΣF_y: $A_y-mg=0 \Rightarrow A_y=9.81$[N]

Sol: (a) $\alpha=-11.67[rad/s^2]\circlearrowright$, (b) $A_x=-1.75[N]\leftarrow$, $A_y=9.81[N]\uparrow$

University Copy For Library Use

- Beer 16_077.



La rueda formada por alambre de densidad 0.24 [lb/ft] rota con ω=-120[rpm] considerando la gravedad y el para M. Calcular M y las reacciones en A para (a) θ=90º y (b) θ=180º.

Peso barra w_b: 0.24[lb/ft]*8[in]*1/12[ft/in]=0.160[lb]

Peso circunferencia w_c: 0.24[lb/ft]*2π8[in]*1/12[ft/in]=1.005[lb]

ΣF_x: $A_x=-w_b\omega^2(r/2)/(g)$, g=32.2[ft/s^2]⇨ A_x=-0.2616[lb]

ΣF_y: $A_y=w_b+w_c$⇨ A_y=1.1653[lb]

ΣM_A: $M=w_b r/2$⇨ M=0.64[lb·in]

ΣF_x: A_x=0[lb]

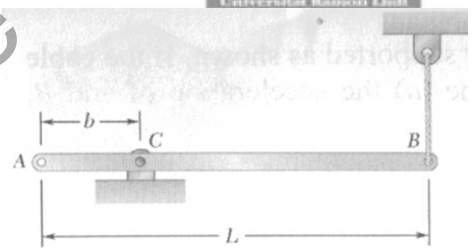
ΣF_y: $A_y-w_b-w_c= w_b\omega^2(r/2)/(g)$, ⇨ A_y=1.1653+0.2616=1.427[lb]

ΣM_A: M=0[lb·in]

Sol: (a) M=0.64[lb·in]↺, A=(-0.2616,1.165) (b) M=0, A=(0,1.427)

University Copy For Library Use

- Beer 16_080.



La barra está en equilibrio hasta que se rompe el cable en B. Considerando b=0.2L determinar en el momento de la rotura (a) aceleración de B y (b) reacciones en apoyo.

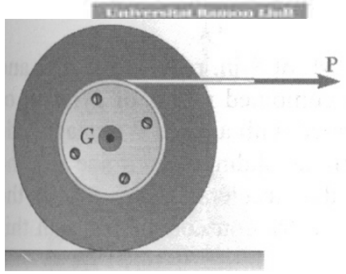
ΣM_C: $mg(0.3L)=mL^2\alpha/12+m(0.3L)^2\alpha \Rightarrow \alpha=45/26\ (g/L)\ [rad/s^2]$

ΣF_y: $R_y-mg=-m\alpha 0.3L \Rightarrow R_y=25/42\ mg\ [N]$

Sol: (a) $a_B=18g/13\downarrow$ (b) $R=(0, 25mg/52)$

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 16_098.



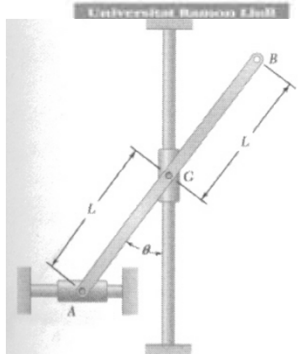
Un disco de r=4[in] junto a otro de r=8[in] pesan en conjunto 10[lb] y un radio de giro k=6[in]. Se usa una cuerda en el radio menor con P=5[lb]. Determinar si no desliza (a) α y a_G, (b) el coeficiente de fricción mínimo para este movimiento.

University Copy For Library Use

Sol: (a) α=23.2[rad/s^2]↻ y a_G=15.46[ft/s^2]→ (b) μ_{min}=0.02

- Ej. casa Beer 16_113.

La barra AB de masa m y longitud 2L une collares e masa y fricción despreciables. Si se libera en esta posición con ángulo θ la barra dar una expresión para (a) α_{AB} y (b) reacciones en A y en G.

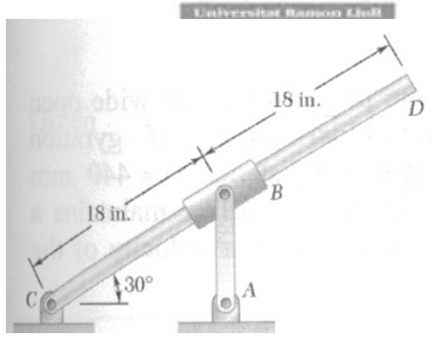


Sol: (a) $\alpha_{AB}=g/L * \sin\theta/(1/3+\sin^2\theta)$ ↻ (b) $A_y=mg/(1+3\sin^2\theta)$, $G_x=0$

University Copy For Library Use

- Ej. casa Beer 16_123.

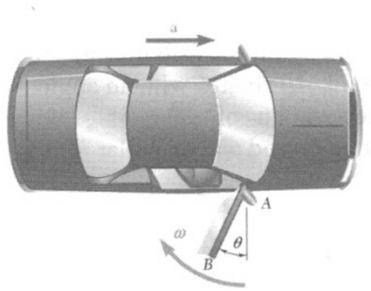
La barra CD pesa 8[lb] y AB rota con ω_{AB}=5[rad/s] y α_{AB}=60[rad/s^2]. Dar la fuerza del collar en B.



Sol: (a) B=11.69[lb]

University Copy For Library Use

- Ej. casa Beer 16_124.



El coche acelera con la puerta abierta θ=0º con a=2[m/s^2]. La puerta pesa 36[kg] y tiene un radio de giro k=0.25[m] y su centro de masas está a r=0.44[m] de bisagras. Dar la velocidad angular cuando la puerta se cierra θ=90º.

"x" y

Sol: (a) $\omega(\pi/2)$=2.62[rad/s]↻

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios con fueras y rotaciones en movimiento plano.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

S33t.- Ejercicios de métodos de energía en movimiento plano general.

University Copy For Library Use

Mejora 1314 ...

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios con fueras y rotaciones en movimiento plano.

University Copy For Library Use

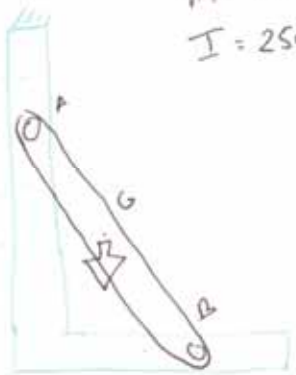
Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Objetivos sesión.

➢ Realizar ejercicios de sólido rígido con método de energías.

University Copy For Library Use

- Ejercicio básico.



$m = 120\ kg$

$I = 250\ kg/m^2 = \frac{m}{12} \cdot L^2$

$\sum F_{x_G}: \quad F_A = m a_{Gx} = m\,\alpha \cdot 2$

$\sum F_{y_G}: \quad F_B - mg = -m\,\alpha\,1'5 \Rightarrow F_B = mg - m\alpha\,1'5$

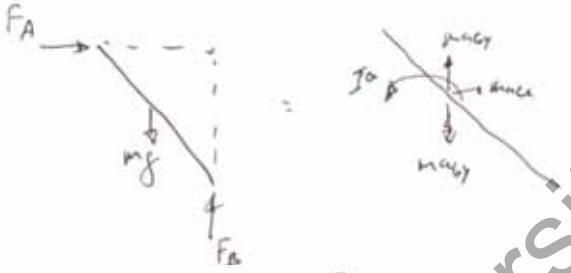
$\sum M_G: \quad -F_A \cdot 2 + F_B \cdot 1'5 = I_G\,\alpha \Rightarrow -m\alpha \cdot 2^2 + mg\,1'5 - m\alpha\,1'5^2 = \frac{m}{12} \cdot 5^2 \cdot \alpha$

$\Rightarrow 8 \cdot 1'5 = \left(\frac{25}{12} + 4 + 1'5^2\right)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{8 \cdot 1'5}{\left(\frac{25}{12} + 4 + 1'5^2\right)} = 1'765\ [r/s^2]$

$\Rightarrow F_A = 4236$

$\Rightarrow F_B = 8589$

① a_G, F_A, F_B



inicio $v = 0$, $\omega = 0$

$\sum M_{A_z}: +a_{Ay}\,\bar{x} - a_{Ax}\,\bar{y} + \alpha\,I_{A_{zz}}$

$F_B \cdot 3 - mg\,1'5 = 0 - m(a3)(-1'5) + 0 + \alpha\,\frac{m}{3}5^2 \Rightarrow \alpha = \frac{8 \cdot 1'5}{\frac{5^2}{3} - 0} = +1'7649\ [r/s^2]$ idem

$(mg + ma_{Gy})$

$\Rightarrow F_A = ma_2 =$

$F_B =$

$a_{Ay} = -a \cdot 3 =$

$a_{Bx} = a \cdot 4 =$

$\sum M_{B_z}: ma_{By}\,\bar{x} - ma_{Bx}\,\bar{y} + \alpha\,I_{B_{zz}}$

$F_A \cdot 4 + mg \cdot 1'5 = 0 - m(a4)(+2) + \alpha\,\frac{m}{3}5^2 \Rightarrow \alpha = \frac{8 \cdot 1'5}{\frac{25}{3} + 8 \cdot 8} = 1'7649$ idem

$F_A = ma_2$

$a_{Bx} = 0 + a4 \Rightarrow a_{Bx} = 7060$

$0 = a_{Ay} + a \cdot 3 \Rightarrow a_{Ay} = -5'295$

$a_{Gx} = +3'530$

$a_{Gx} = 0 + a \cdot 2$

$a_{Gy} = a_{Ay} + a \cdot 1'5 \Rightarrow a_{Gy} = a_{Ay}/2 = -2 \cdot 1'5 = -2'647$

University Copy For Library Use

- Beer 17_001.

Un disco de 2720[kg] necesita 1500 vueltas para pararse desde 300[rpm] al frenar con un par M. Se sabe que el disco tiene un radio de giro de k=914[mm]. Clacular el par M aplicado en la frenada.

$E_{c1}=1/2*I*\omega^2=1/2*m*k^2*\omega^2=0.5*2720*0.914^2*(10\pi)^2=1.12e6$[J.]

$E_{c2}=0$[J.]

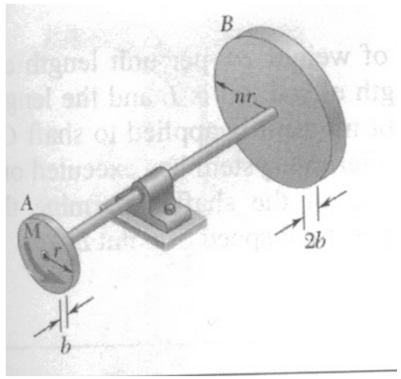
$U_{1-2}=-M\theta=-M*1500*2\pi$ [J.]

$E_{c1}+U_{12}=E_{c2}$ ⇨$M=1.12e6/(3000\pi)=$ 119.0 [N·m]

Sol: (a) M=119.0 [N·m]

University Copy For Library Use

- Beer 17_005.



El disco A de 20[kg] y radio r=150[mm] está unido a otro disco de doble espesor y radio mayor. Sabemos que se aplica el par M=30[N·m] y que tras 5[vueltas] la velocidad de giro es de 480[rpm] .

$I_a=0.5*m_a*r_a^2=0.225$ [kg·m^2]

$m_b=m_a*(t_b/t_a)*(r_b/r_a)^2=20*2*n^2 = 40n^2$ [kg] ⇨ $I_b=0.45n^4$ [kg·m^2]

$E_{c1}=0$[J.]

$E_{c2}=1/2*I*\omega^2=1/2*(I_a+I_b)*\omega^2=0.5*(0.225+0.45n^4)*(480*2\pi/60)^2$

$U_{1\text{-}2}=M\theta=30*5*2\pi=300\pi$ [J.]

$E_{c1}+U_{12}=E_{c2}$ ⇨$0.225+0.45n^4=0.7460$

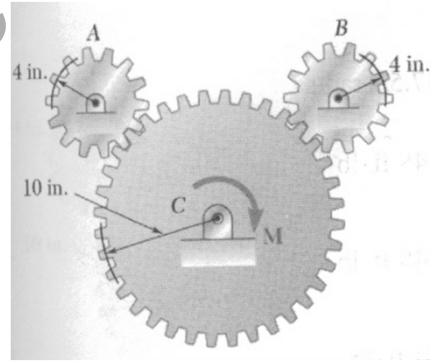
⇨$n=1.037$

⇨$r_b=n*r_a=155.6$[mm]

Sol: (a) $r_B=155.6$[mm]

University Copy For Library Use

- Beer 17_009.



Los engranajes A y B pesan 5[lb] y tienen un radio de giro k=4[in]. El engranaje C pesa 25[lb] y tiene un radio de giro k=7.5[in]. En C se aplica un par M=6.75[lb·ft]. Determinar (a) número de vueltas para pasar de 100 a 450 [rpm] y (b) la fuerza tangencial actuando en A.

$I_a=I_b=mk^2=0.009705$ [lb·s^2·ft]

$I_c=mk^2=0.3033$ [lb·s^2·ft]

$\omega_\alpha=\omega_b=\omega_c*10/4 \Rightarrow \theta_\alpha=\theta_b=\theta_c*10/4$

$E_{c1}=0.5*(I_a*\omega_a^2+ I_b*\omega_b^2+ I_c*\omega_c^2)=0.5*\omega_c^2*(2*0.009705*(10/4)^2+0.3033)=$
$0.5*(100*2\pi/60)^2*0.4246= 23.28$ [ft·lb]

$E_{c2}=0.5*(450*2\pi/60)^2*0.4246= 471.4$ [ft·lb]

$U_{1\text{-}2}=M\theta= 6.75\theta$ [ft·lb]

$E_{c1}+U_{12}=E_{c2} \Rightarrow 23.28 + 6.75\theta = 471.4 \Rightarrow \theta=66.38$[rad] = 10.57 [rev]

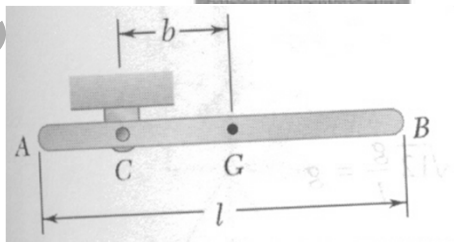
$E_{c1a}+U_{12a}=E_{c2a} \Rightarrow 0.5*(100*2\pi/60)^2*0.009705 + M_a*66.38*10/4)= 0.5*(450*2\pi/60)^2*0.009705$

$M_a=0.3858$[lb·ft] $\Rightarrow F_{ta}=M_a/r_a= 0.38576/(4/12) = 1.157$ [lb]

Sol: (a) $\theta_C=10.57$[rev] (b) $F_{tA}=1.157$[lb]

University Copy For Library Use

- Ej. casa Beer 17_016.



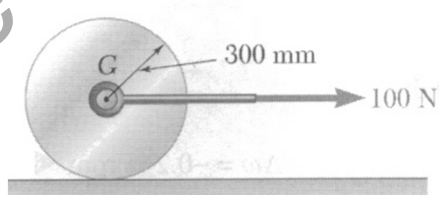
Soltamos la barra. Encontrar (a) la distancia "b" para que la velocidad angular sea máxima al pasar por la vertical y (b) la velocidad máxima que se puede tener y reacciones en C.

Sol: (a) $b=L/\sqrt{12}$ (b) $\omega=12^{0.25}\sqrt{g/L}=1.861\sqrt{g/L}$. C=(0,2mg)

University Copy For Library Use

- Ej. casa Beer 17_020.

Un cilindro de 24[kg] y r=0.3[m] recibe una fuerza de 100[N]. Si no desliza calcular (a) velocidad del centro al recorrer 1.8[m] y (b) la fricción necesaria para evitar deslizamiento.

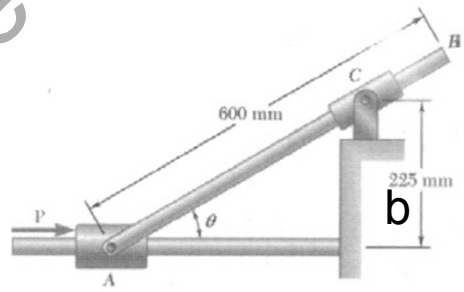


Sol: (a) v_G=3.16[m/s] (b) F_f=33.3[N]

University Copy For Library Use

- Ej casa Beer 17_031.

La barra AB de 2.4[kg] se libera en θ=45º. Si P=0 calcular la velocidad angular al tener θ=30º.

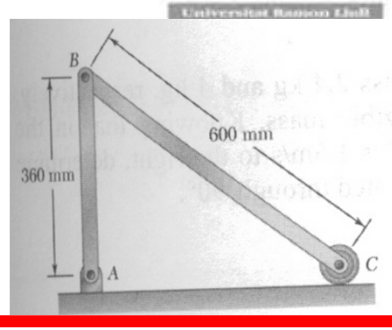


Sol: (a) ω=1.359[rad/s]

University Copy For Library Use

- Ej. casa Beer 17_035.

La barra AB de 2.4[kg] y BC de 4[kg] se liberan. Calcular la velocidad de B cuando AB esté plano.



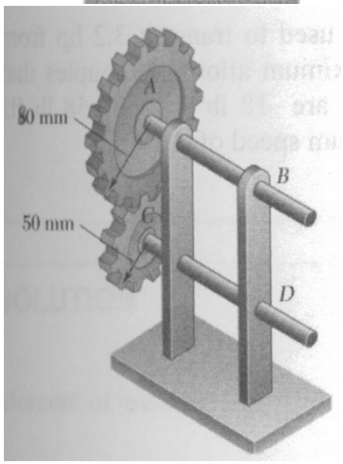
$F_x = 0$

Sol: (a) $v_B = 3.25$[m/s]

University Copy For Library Use

- Ej casa Beer 17_041.

Un motor unido a AB desarrolla 3.36[kW] a 720[rpm]. Determinar (a) el par en AB y (b) el par en CD.



University Copy For Library Use

Sol: (a) M_{AB}=44.6[N·m] (b) M_{CD}=27.9[N·m]

- Resumen.

➢ Ejercicios de movimiento plano general usando método de energías.

University Copy For Library Use

S34t.- Ejercicios con métodos de momentos en movimiento plano general.

Mejora 1314 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios con métodos de energía en movimiento plano general.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos sesión.

➢ Comparar métodos de resolución por cinética, energía o cantidad de movimiento para traslaciones y rotaciones.

$$F_{ext} = \frac{\partial(mv)}{\partial t}$$

$$M_{ext} = \frac{\partial(I\omega)}{\partial t}$$

Si *m* constante

Si *I* constante

$$mv_1 + \int_1^2 F_{ext}\partial t = mv_2$$

$$I\omega_1 + \int_1^2 M_{ext}\partial t = I\omega_2$$

$$F_{ext}\partial s = \frac{\partial(mv)\partial s}{\partial t}$$

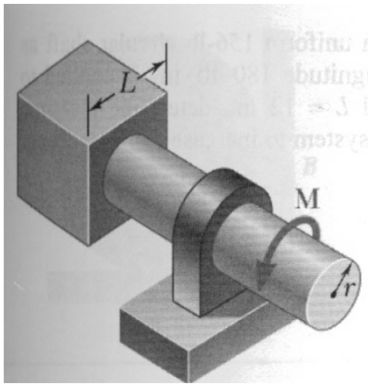
$$M_{ext}\partial\theta = \frac{\partial(I\omega)\partial\theta}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \int_1^2 F_{ext}\partial s = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\frac{1}{2}I\omega_1^2 + \int_1^2 M_{ext}\partial\theta = \frac{1}{2}I\omega_2^2$$

University Copy For Library Use

- Beer 17_045.



Un cubo de lado L=0.3[m] de 72[kg] se une a eje de radio r=0.1[m] de 68[kg] sobre el que actúa un par M y se consigue un giro de 960[rpm] tras 4 segundos. Hallar M.

Primero calculamos la inercia de cubo: $I_c=1/12*m_c*(L^2+L^2)=1.08[kg\cdot m^2]$

Calculamos la inercia de eje: $I_e=1/2*m_e*(r^2)=0.34[kg\cdot m^2]$

Calculamos el momento del sistema inicial $MS_1=I\omega_1=0$

Calculamos el momento del sistema final $MS_2=I\omega_2=(1.08+0.34)*(960*2\pi/60)= 142.8\ [N\cdot m\cdot s]$

Calculamos el momento aplicado exterior $EI=Mt=M*4$

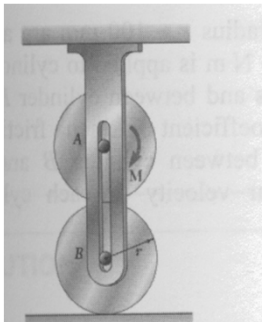
$MS_1+EI=MS_2 \Rightarrow M*4=142.8 \Rightarrow M=35.68\ [N\cdot m]$

Comparar con energías suponiendo acel. constante

Sol: (a) M=35.7[N·m]

University Copy For Library Use

- Beer 17_054.



Dos discos idénticos de masa "m" y radio "r" están en reposo cuando se aplica en A un par M<mgr. Se sabe que la fricción μ<M/(2mgr). Dar la expresión para la velocidad angular de B.

Los discos son idénticos de inercia $0.5*m*r^2$. $I_t=2I=mr^2$.

Como no desliza la velocidad angular de los discos es la misma: $v_A=v_B=\omega*r$

A: $0+(M-F_{ra}*r)t=0.5*m_a*r^{2}*\omega$.

B: $0+(F_{ra}-F_{rb})*r*t=0.5*m_b*r^{2}*\omega$.

A+B: $0+(M-F_{rb}*r)*t=1*m*r^{2}*\omega$.

Calculamos el momento del sistema inicial $MS_1=I\omega_1=0$

Calculamos el momento del sistema final $MS_2=I\omega_2=m*r^{2}*\omega_2$.

Calculamos el momento aplicado exterior $EI=Mt-(\mu Nr)t=M*t-\mu*(2mg)*r*t$

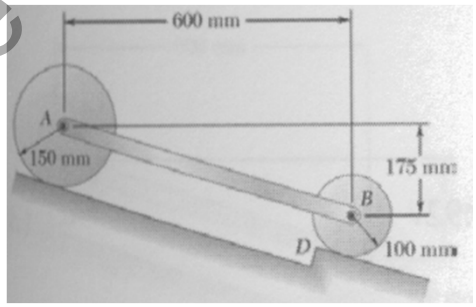
$MS_1+EI=MS_2 \Rightarrow M*t-\mu*(2mg)*r*t=m*r^{2}*\omega_2 \Rightarrow$

$\omega_2=(M-\mu*(2mg)*r)*t/(m*r^2)$

Sol: (a) $\omega_B=(M/mr^2 - 2\mu g/r)\,t$

University Copy For Library Use

- Beer 17_063.



La barra AB de masa despreciable une el disco A de 6[kg] y radio de giro k=90[mm] r=150[mm] con el B de 3[kg] y radio de giro k=80[mm] r=100[mm].Determinar (a) la velocidad de la barra AB a los 0.6[s] y (b) el impulso ejercido por el disco A en la barra.

$v_B=v_A=v$ $\omega_A*r_A=v_A \Rightarrow \omega_A=v/r_A$, $\omega_B*r_B=v_B \Rightarrow \omega_B=v/r_B$,

$I_A=m_A*k_A^2$ $I_B=m_B*k_B^2$ $I_B=I_A*(m_B/m_A)*(k_B/k_A)^2$

Fuerzas en dirección movimiento:

A: $0 + (m_A g\sin\beta * t - \text{integral}(AB.dt) - F_A * t) = (m_A * v_A) \Rightarrow$ impulso integral(AB.dt)

B: $0 + (m_B g\sin\beta * t + \text{integral}(AB.dt) - F_B * t) = (m_B * v_B)$

Total: $(m_A+m_B)g\sin\beta * t - (F_A+F_B)* t) = ((m_A+m_B) * v)$

Momentos:

A: $0 + (- F_A * r_A * t) = (- I_A * \omega_A) \Rightarrow F_A=m_A*(k_A/r_A)^2*v/t$

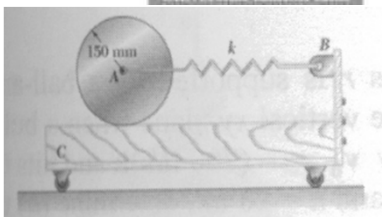
B: $0 + (- F_B * r_B * t) = (- I_B * \omega_B) \Rightarrow F_B=m_B*(k_B/r_B)^2*v/t$

Juntando: $(m_A+m_B)g\sin\beta * t -(m_A*(k_A/r_A)^2+m_B*(k_B/r_B)^2)*v) = ((m_A+m_B) * v) \Rightarrow$

$v(t)= (m_A+m_B)g\sin\beta * t / (m_A+m_B+ m_A*(k_A/r_A)^2+m_B*(k_B/r_B)^2)$

Sol: (a) v(0.6)=1.134[m/s] (b) Impulso de ecuación A sustituyendo v da 0.635 [N·s]

University Copy For Library Use



- Beer 17_085.

Un cilindro A de 3[kg] puede rodar sin deslizar sobre un carro C de 5[kg]. Se estira el muelle de k=100[N/m] hasta 20[mm] y se libera. Determinar (a) la velocidad del carro cuando el muelle está en posición sin deformar y (b) la velocidad angular del cilindro en dicha posición.

Como las fuerzas externas son verticales el momento lineal en "x" se conserva:

$0=m_a v_a+m_c v_c \Rightarrow v_a=-v_c(m_c/m_a)$.

Estudiando el cilindro:

$v_a=v_c+\omega r \Rightarrow \quad \omega_a=(v_a-v_c)/r= -v_c/r *(1+m_c/m_a) = -17.77\ v_c.$

Energía muelle inicial: $0.5*k*x^2=0.02$[J.]

Energía final: $0.5*m_c v_c^2+ 0.5*m_a v_a^2 + 0.5*I_a \omega_a^2 =$

$0.5*5*v_c^2+0.5*3*(5/3*v_c)^2+0.5*0.5*3*0.15^2*(17.77*v_c)^2 = 12v_c^2$[J.]

Conservación energía: $0.02=12v_c^2 \Rightarrow v_c=0.0408$[m/s]←

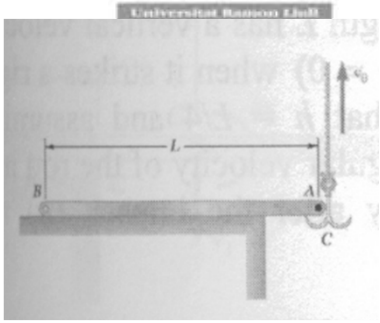
$w=17.77*v_c=0.726$[rad/s]↻

Sol: (a) $v_C=40.8$[mm/s]← (b) $\omega=0.726$[rad/s]↻.

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 17_093.

Un gancho sube con v_o e impacta con la barra AB de masa "m" de manera perfectamente plástica (coeficiente restitución e=0). Si no cambia la velocidad dar (a) impulso de fuerza en A y (b) impulso de fuerza en B.

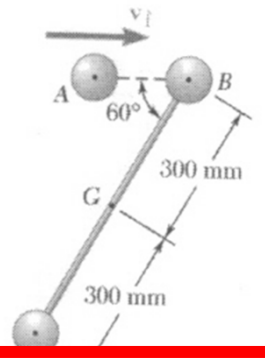


Sol: (a) impulso en A= $mv_o/3 \uparrow$. (b) impulso en B= $mv_o/6 \uparrow$.

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 17_110.

Un cuerpo rígido BD de 9[kg] está formado por dos bolas de r=60[mm]. El radio de giro de BD es de 250[mm]. La bola A de 3[kg] impacta con v_1=4[m/s]. Hallar (a) ω_{BD} para impacto plástico e=0 y elástico e=1, (b) la velocidad de G en ambos casos.

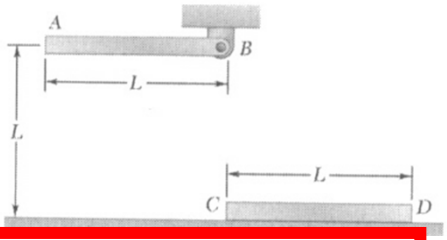


Sol: (a) $\omega_{BD(e=0)}$=3.27[rad/s], $\omega_{BD(e=1)}$=6.55[rad/s], (b) $v_{G(e=0)}$=0.787[m/s], $v_{G(e=1)}$=1.575[m/s]

University Copy For Library Use

- Beer 17_111.

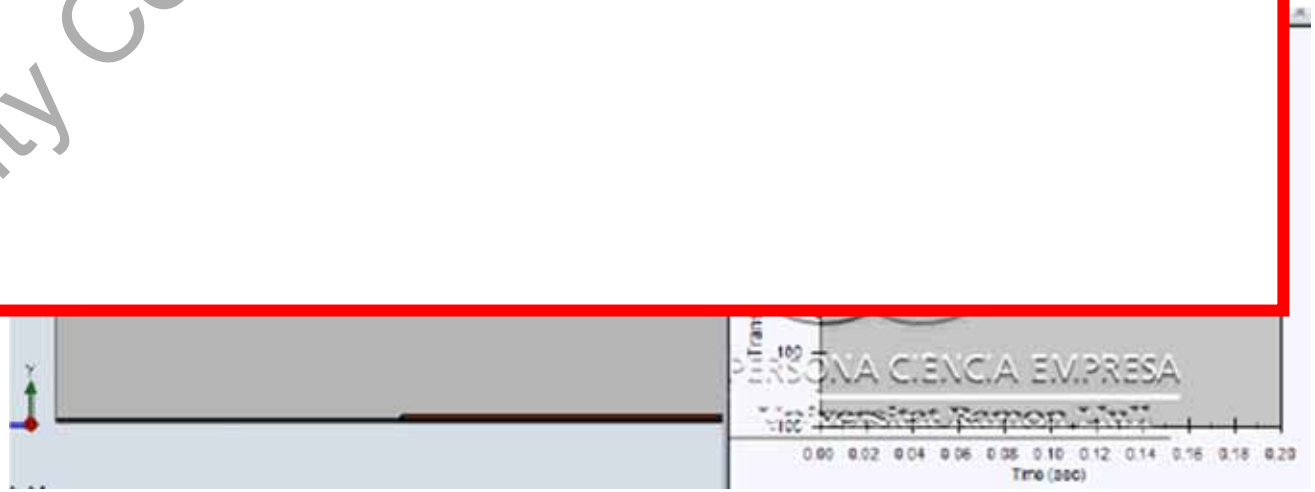
Una barra AB se libera e impacta en CD. Dar la velocidad de CD después del impacto si (a) e=1, (b) e=0.4, (c) e=0.



Sol: (a) $v_{C(e=1)}=0.866\sqrt{gL}$

(b) $v_{C(e=0.4)}=0.606\sqrt{gL}$

(c) $v_{C(e=0)}=0.433\sqrt{gL}$



University Copy For Library Use

- Teoría.

$$F_{ext} = \frac{\partial(mv)}{\partial t}$$

Si *m* constante

$$mv_1 + \int_1^2 F_{ext}\partial t = mv_2$$

$$M_{ext} = \frac{\partial(I\omega)}{\partial t} = H'$$

Si *I* constante

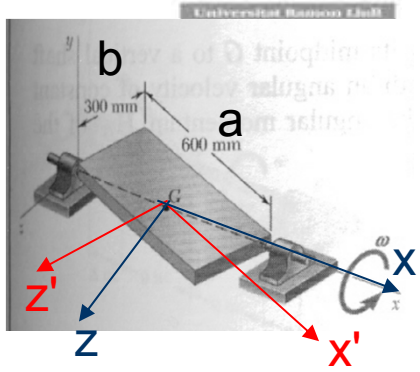
$$I\omega_1 + \int_1^2 M_{ext}\partial t = I\omega_2 = H$$

En 3D por cambio de ejes:

$$H'_{Gxyz'} = H'_{Gxyz} + \Omega \times H_G$$

University Copy For Library Use

- Beer 18_001 y 18_055.



Una placa rectangular de 8[kg] gira con ω=5[rad/s]. Dar (a) H_G y (b) H'_G.

Por geometría los ejes del rectángulo forman una ángulo β con el eje "x" de giro: $\tan\beta=0.3/0.6 \Rightarrow \beta=26.57º$.

Descomponemos el giro en los ejes del rectángulo x',y',z':

$w_{xyz'}=(\omega\cos\beta,0,-\omega\sin\beta)$

Para estos ejes si se conocen las inercias: $I_{x'}=mb^2/12$, $I_{y'}=m(a^2+b^2)/12$, $I_{z'}=ma^2/12$

Calculamos $H_{Gxyz'}=(I_{x'}\omega_{x'}, I_{y'}\omega_{y'}, I_{z'}\omega_{z'})=(\omega\cos\beta*mb^2/12, 0, -\omega\sin\beta*ma^2/12)$ y pasamos a xyz:

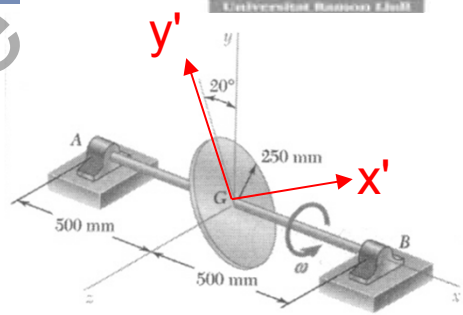
$H_{Gxyz}=(I_{x'}\omega_{x'}\cos\beta-I_{z'}\omega_{z'}\sin\beta, 0, I_{y'}\omega_{y'}, I_{x'}\omega_{x'}\sin\beta+I_{z'}\omega_{z'}\cos\beta) =(0.480,0,-0.360)$ [kg·m²/s]

Calculamos $H'_{Gxyz}=H'_{Gxyz'}+\Omega x H_{Gxyz}= 0 + (\omega,0,0)x(0.480,0,-0.360)=(0,1.8,0)$ [N·m]

Sol: (a) $H_G=(0.480,0,-0.360)$ [kg·m²/s] (b) $H'_G=(0,1.8,0)$ [kg·m²/s²]=[N·m]

University Copy For Library Use

•Beer 18_063.



Un disco de 4 [kg] está montado con un ángulo de 20º y gira a 10[rad/s]. Dar reacciones en apoyos.

Las inercias respecto ejes xyz' son: $I_{y'}=I_{z'}=mr^2/4$, $I_{x'}=mr^2/2$

La velocidad angular es: $\omega=(\omega\cos\theta,-\omega\sin\theta,0)$ [rad/s]

Se calcula $H_{Gxyz'}=(I_{x'}\omega_{x'}, I_{y'}\omega_{y'}, I_{z'}\omega_{z'})=(0.5mr^2\omega\cos\theta,-0.25mr^2\omega\sin\theta,0)$ [kg·m²/s]

Se calcula $H'_{Gxyz'}=0+(\omega\cos\theta,-\omega\sin\theta,0)x(0.5mr^2\omega\cos\theta,-0.25mr^2\omega\sin\theta,0)=$
$(0,0, 0.25mr^2\omega^2\sin\theta\cos\theta)$ [N·m]

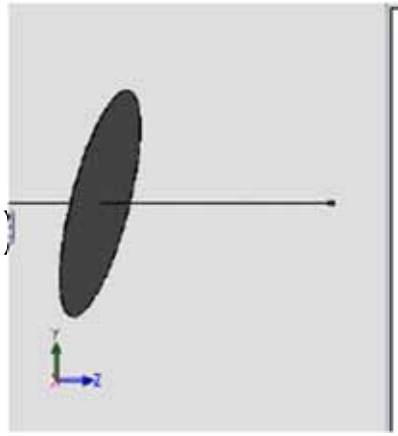
Como el centro de gravedad está en el eje $v_g=0$, $a_g=0$

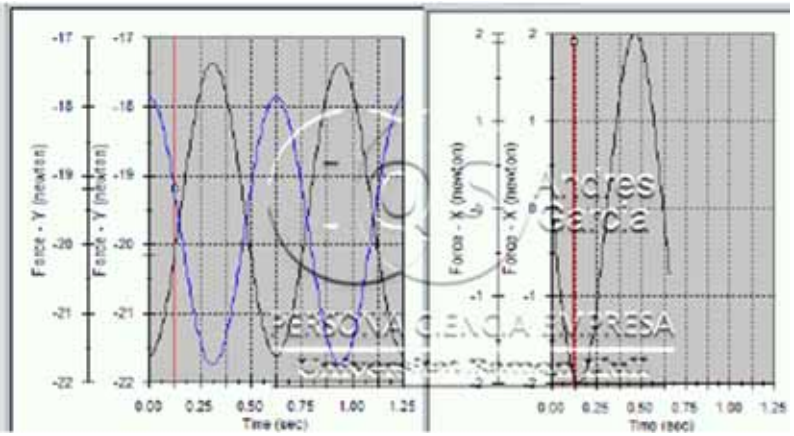
$\Sigma F=ma$ ⇨ $(A_x,A_y,A_z)+(B_x,B_y,B_z)=0$,

$\Sigma M_g=H'_G$ ⇨ $(-a,0,0)x(A_x,A_y,A_z)+(a,0,0)x(-A_x,-A_y,-A_z)=(0,2aA_z,-2aA_y)=(0,0, 0.25mr^2\omega^2\sin\theta\cos\theta)$

⇨ A=(0,-2.01,0), B=(0,2.01,0) [N] que rotan con el disco y por lo tanto oscilan en A y B.

(CosmosMotion considerando gravedad)

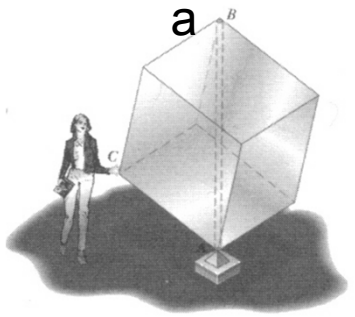




Sol: (a) A=(0,-2.01,0) [N],
B=(0,2.01,0) [N]

University Copy For Library Use

- Beer 18_021.



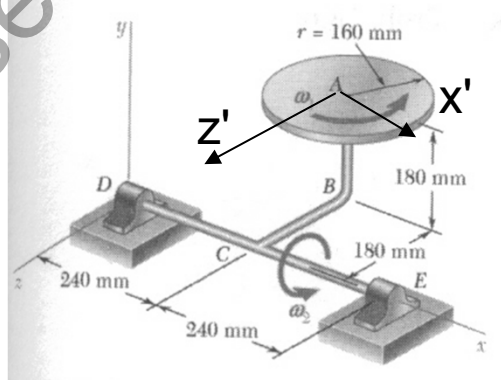
El cubo de lado 1.5[m] está formado por seis paneles soldados de lado "a". Se empuja dicho cubo en C con 50[N] durante 1.2[s] y se observa que se completa una vuelta en 5 segundos. Determinar la masa del cubo (pista: la distancia de C al eje de giro es $b=a\sqrt{2}/3$).
La inercia se calcula y es idéntica en todas direcciones: $I_x=I_y=I_z=I_v=5ma^2/18$

Sabemos por impulsos:
$0+F_C*b*t=H_G=I\omega \Rightarrow 50*a\sqrt{2}/3*1.2=5ma^2/18*\omega$
Si calculamos la velocidad cuando se ha acabado el impulso suponiendo que una vuelta se hace en cinco segundos: $\omega=2\pi/5$ se puede despejar la masa:
$m=18*\omega*F_C*b*t/5a^2 = 93.6$ [kg]

Sol: (a) m=93.6[kg]

University Copy For Library Use

- Beer 18_005 y 18_043 y 18_059.



Un disco de masa 6[kg] gira con ω_1=16[rad/s]. El eje gira con ω_2=8[rad/s]. Determinar (a) H_A y H'_A y (b) energía cinética.

Las inercias respecto ejes xyz' son: $I_{x'}=I_{z'}=mr^2/4$, $I_{y'}=mr^2/2$

La velocidad angular es: $\omega=(\omega_2,\omega_1,0)$ [rad/s]

La distancia de "a" a "c" es: $r_{ac}=(0,0.18,-0.18)$ [m]

Se calcula $H_{Axyz'}=(I_{x'}\omega_{x'}, I_{y'}\omega_{y'}, I_{z'}\omega_{z'})=(0.307,1.229,0)$ [kg·m²/s]

Se calcula $H'_{Axyz'}=0+(\omega_2,0,0)x(0.307,1.229,0)=(0,0,9.83)$ [N·m]

La velocidad de "a" $v_a=(\omega_2,0,0)x(0,0.18,-0.18)=(0,1.44,1.44)$ [m/s]

Se calcula la energía cinética:

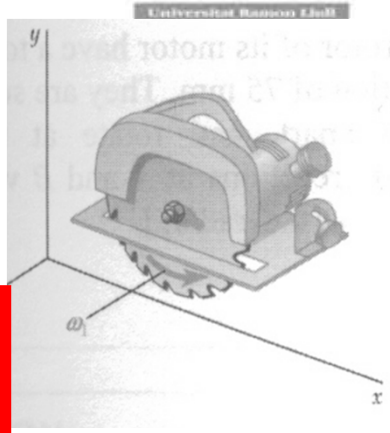
$0.5*m*v^2+0.5*I_{x'}\omega_{x'}^2+0.5*I_{y'}\omega_{y'}^2+0.5*I_{z'}\omega_{z'}^2=23.5$[J.]

Sol: (a) $H_A=(0.307,1.229,0)$ [kg·m²/s] (b) 23.5[J]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 18_079.

La sierra tiene un disco de 1.75[kg] con radio de giro de 30[mm] y ω_z=2500[rpm]. Calcular el para M para poder girar la sierra con ω_y=-



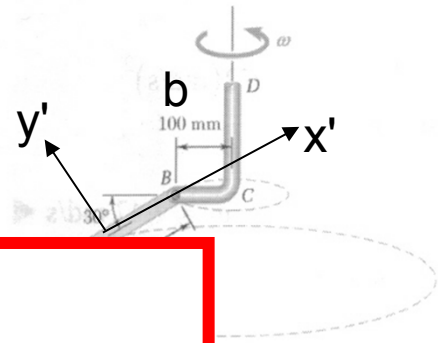
·m]

Sol: (a) $M=H'_G=(-0.99,0,0)$ [N·m]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 18_087.

La barra está en equilibrio a 30º al girar con velocidad constante.
Determinar dicha velocidad.

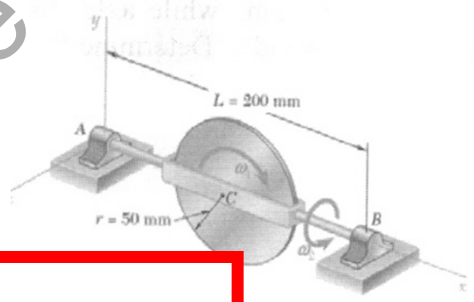


Sol: (a) ω=7.89[rad/s]

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 18_092.

Un disco de 0.3[kg] gira con ω_z=-750[rpm] mientras el eje AB gira con ω_x. Determinar ω_x para que las fuerzas en A y en B no superen 1[N].



Sol: (a) ω_x<6.79[rad/s]

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios con métodos de momentos en movimiento plano general.

➢ Ejercicios de cinética en 3D con uso de momento angular.

University Copy For Library Use

S35t.- Oscilaciones Libres.

University Copy For Library Use

Mejora 1314 ....

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios de cinética en 3D con uso de momento angular.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Objetivos sesión.

➢ Entender las ecuaciones de movimiento oscilatorio con y sin amortiguamiento y aplicarlas a barras rotando.

➢ Comprender problemática resonancia.

$$x(t) = D_1 e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} + D_2 e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}};$$

$c_{crit}=2\sqrt{(mk)}$

$$x(t) = (D_1 + D_2 t)e^{-\omega_n t}$$

$$x(t) = \chi e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_d t + \phi);$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2};$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{x_0\omega_d}{v_0 + \zeta\omega_n x_0};$$

$$\chi = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}$$

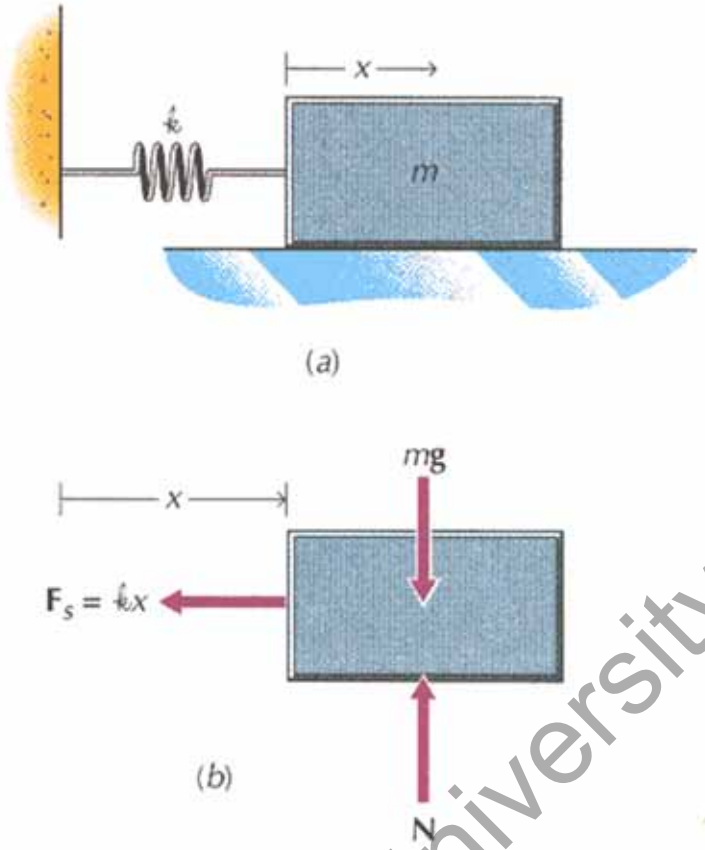
$$\delta = \ln\frac{\chi_1}{\chi_n} \approx \zeta 2(n-1)\pi$$

$$\chi_n \approx \frac{\chi_1}{e^{\zeta 2(n-1)\pi}}$$

University Copy. For Library Use

• Vibración libre no amortiguada.

Movimiento armónico simple (M.A.S.).



Equilibrio estático

$$\sum \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0; \quad N = mg$$

Movimiento oscilatorio

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a};$$

$$-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0;$$

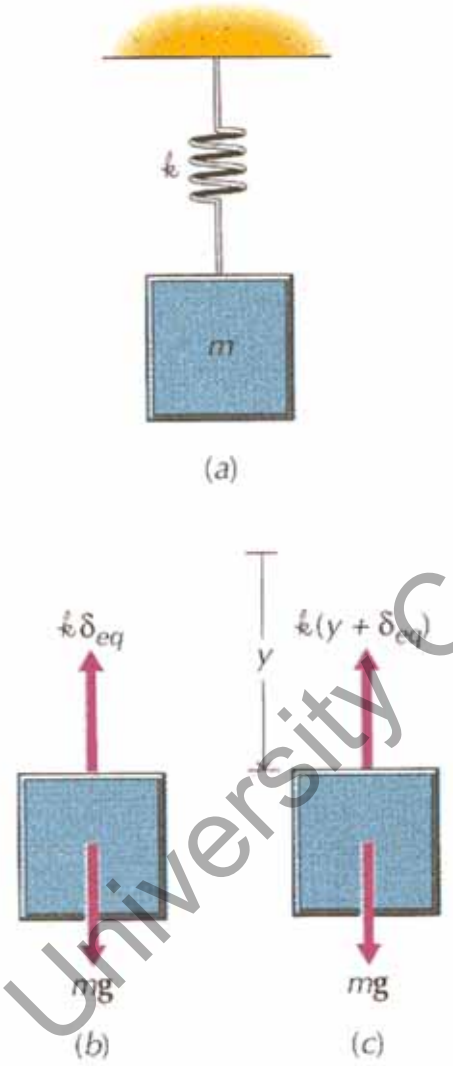
$$\text{si } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

Ecuación que describe el movimiento armónico simple (aceleración proporcional al desplazamiento respecto a un punto fijo y dirigida a él)

University Copy For Library Use

- Vibración con gravedad.



Equilibrio estático

$$\sum \mathbf{F} = 0;$$

$$-k\delta_{eq} + mg = 0$$

$$mg = k\delta_{eq}$$

Movimiento oscilatorio

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a};$$

$$-k(\delta_{eq} + y) + mg = m\ddot{y}$$

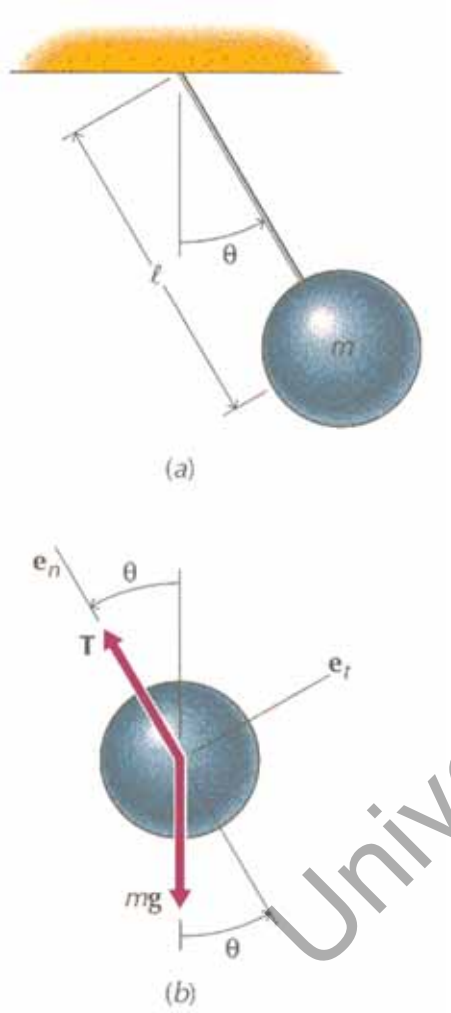
$$-k\delta_{eq} - ky + k\delta_{eq} = m\ddot{y};$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0 \Rightarrow \ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

University Copy For Library Use

• Oscilación libre.

Las oscilaciones libres las podemos aproximar a un M.A.S.



Condiciones iniciales $\theta_0 ; \dot{\theta}_0 = 0$

$$\sum F_t = ma_t ;$$

$$-m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta = m \cdot l \cdot \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Para $\theta \to 0$; $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad \text{si } \omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}};$$

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$$

University Copy For Library Use

• Ecuación del M.A.S.

Ecuación diferencial homogénea de 2º orden de coeficientes constantes.

$$\ddot{y}+\omega_n^2 y=0 \text{ con } y=y(t)$$

$$y(t)=De^{st};De^{st}\left(s^2+\omega_n^2\right)=0$$

Ecuación característica y sus raíces

$$s^2+0\cdot s+\omega_n^2=0\Rightarrow s_{1,2}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\omega_n^2}}{2}\Rightarrow\frac{-0\pm i\sqrt{4\omega_n^2-0^2}}{2}$$

$$\text{con } f=\frac{-0}{2};g=\frac{i\sqrt{4\omega_n^2}}{2}=i\omega_n;$$

$$y(t)=D_1e^{(f+g)t}+D_2e^{(f-g)t}=e^{f\cdot t}\left(D_1e^{g\cdot t}+D_2e^{-g\cdot t}\right)$$

$$=D_1e^{i\omega_n\cdot t}+D_2e^{-i\omega_n\cdot t}\text{, pues } f=0 \text{ y } g=i\omega_n$$

$$\ddot{x}+\omega_n^2 x=0\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\ddot{y}+\omega_n^2 y=0\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\ddot{\theta}+\omega_n^2\theta=0\quad \omega_n=\sqrt{\frac{g}{l}};$$

University Copy For Library Use

• Solución ecuación diferencial.

Según la fórmula de Euler:

$$y(t) = D_1(\cos\omega_n t + i\,\mathrm{sen}\,\omega_n t) + D_2(\cos\omega_n t - i\,\mathrm{sen}\,\omega_n t);$$
$$y(t) = (D_1 + D_2)\cos\omega_n t + i(D_1 - D_2)\mathrm{sen}\,\omega_n t;$$
$$\text{con } D_1 + D_2 = A; i(D_1 - D_2) = B;$$
$$y(t) = A\cos\omega_n t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_n t;$$

Se buscan las constantes A y B para las condiciones de frontera:

$$t = 0; y(0) = y_0; \dot{y}(0) = v_0;$$

$$A = y_0; B = \frac{v_0}{\omega_n}; \text{ con un ángulo } \phi \text{ tal que :}$$

$$\mathrm{sen}\,\phi = y_0; \cos\phi = \frac{v_0}{\omega_n}$$

$$\chi = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + y_0^2}; \phi = \tan^{-1}\frac{y_0\omega_n}{v_0}; \text{ y aplicando id. trig.}$$

$$y(t) = \chi\,\mathrm{sen}(\omega_n t + \phi)$$

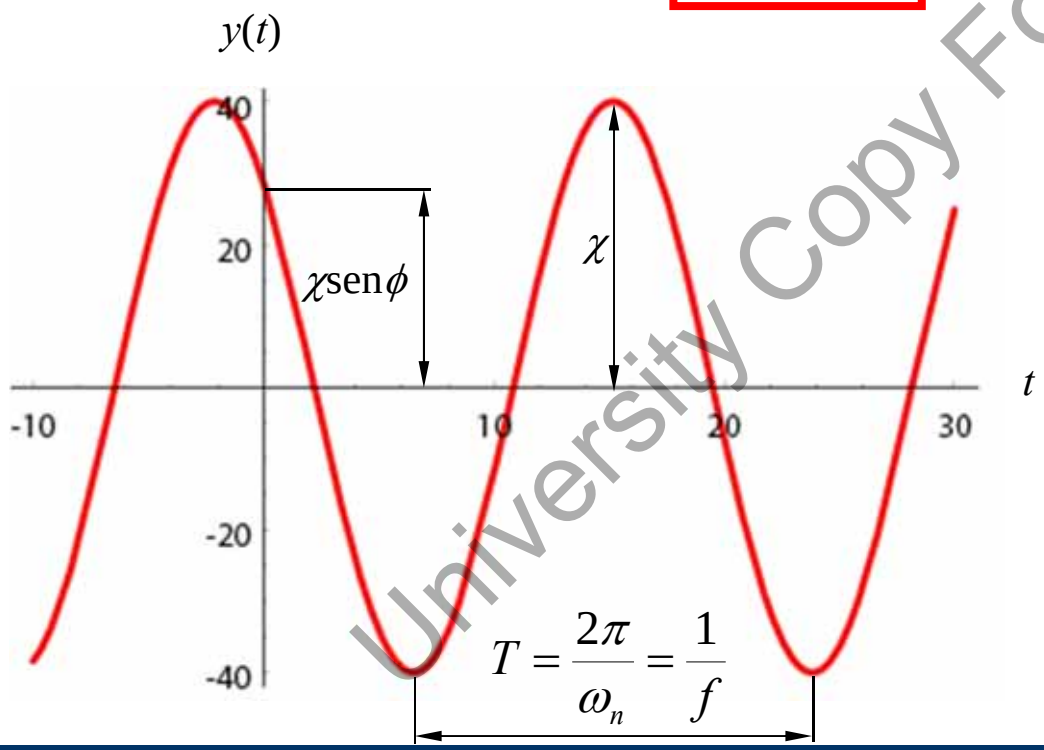
University Copy For Library Use

- Representación de la oscilación.

$$y(t) = \chi \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)$$

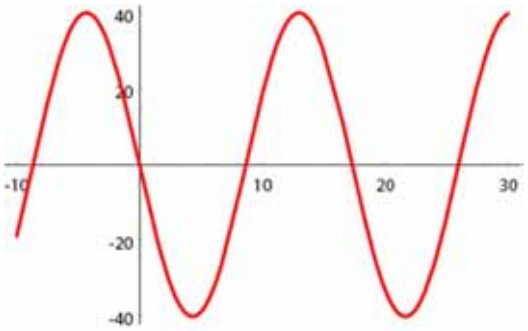
ϕ: Ángulo de fase
χ: Amplitud de las oscilaciones
T: Periodo de las oscilaciones
f: Frecuencia de las oscilaciones

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi}$$



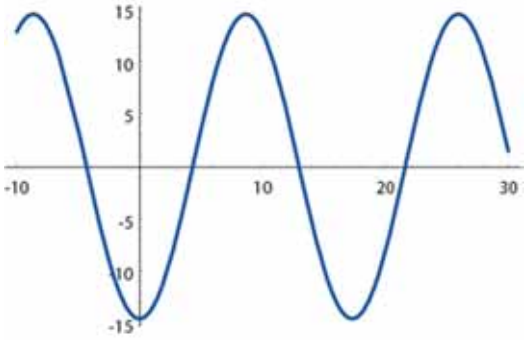
University Copy For Library Use

- Representación velocidades y aceleraciones.

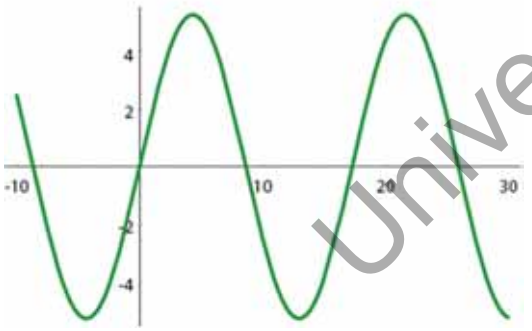


$$y(t) = \chi sen(\omega_n t + \phi)$$

$$y_0 = 40mm; k = 3.3N/m; v_0 = 0; m = 25g;$$



$$v(t) = \dot{y}(t) = \chi\omega_n \cos(\omega_n t + \phi)$$

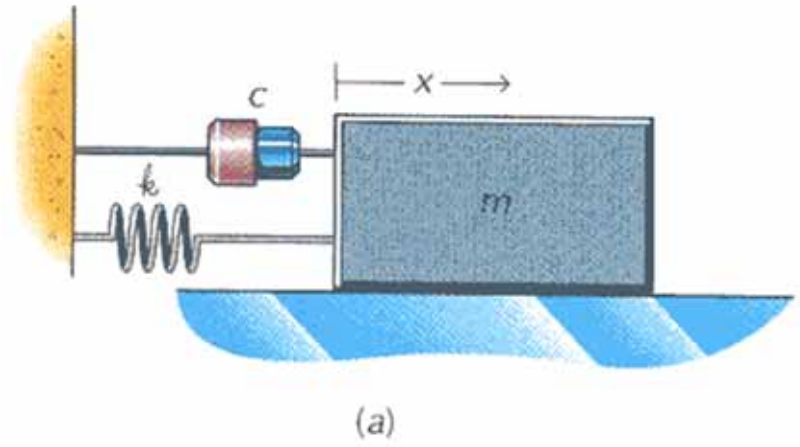


$$a(t) = \ddot{y}(t) = -\chi\omega_n^2 \text{sen}(\omega_n t + \phi)$$

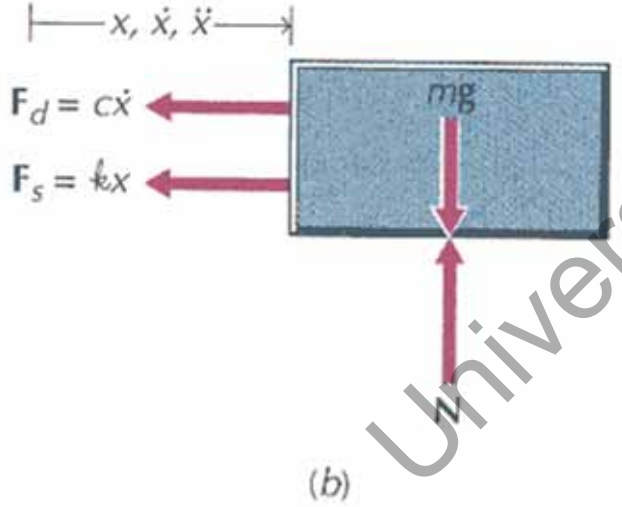
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

University Copy For Library Use

- Vibración libre amortiguada.



(a)



(b)

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a};$$

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0;$$

$$x(t) = De^{st}; De^{st}\left(ms^2 + cs + k\right) = 0;$$

Raices:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m};$$

$$x(t) = D_1 e^{s_1 t} + D_2 e^{s_2 t};$$

$$t = 0; x(0) = x_0 = D_1 + D_2; \dot{x}(0) = v_0 = D_1 s_1 + D_2 s_2;$$

reescribiendo con coef. de amort. relativa ζ:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_{crít.}};$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1};$$

University Copy For Library Use

- Clasificación amortiguaciones.

Las soluciones dependen del valor de ζ:

$c_{crit}=2\sqrt{(mk)}$

$$\text{caso } 1\,(\text{sobreamortiguado}): \zeta > 1 \Rightarrow \sqrt{\zeta^2 - 1} > 0, \text{sucede si } c_{crít.} < c;$$

$$\text{caso } 2\,(\text{crít. amortiguado}): \zeta = 1 \Rightarrow \sqrt{\zeta^2 - 1} = 0, \text{sucede si } c_{crít.} = c;$$

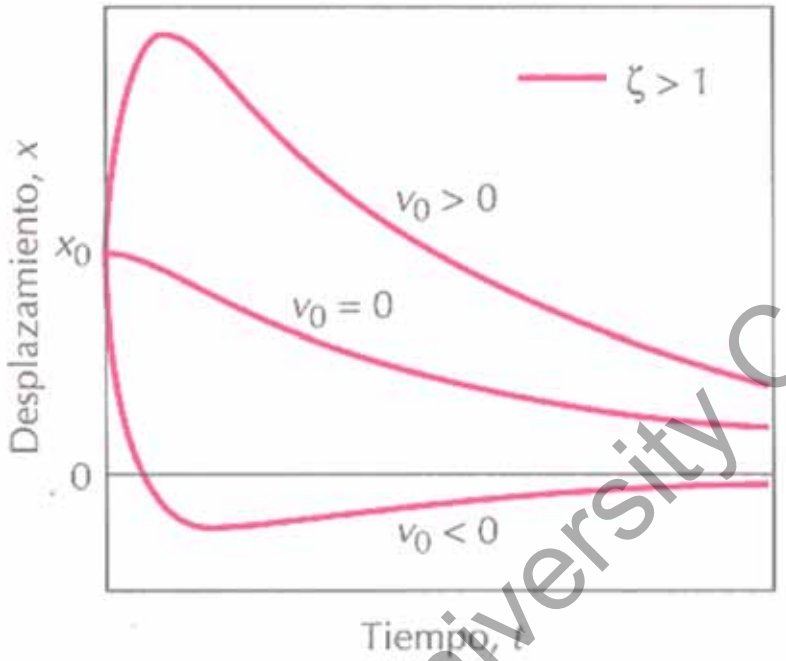
$$\text{caso } 3\,(\text{subamortiguado}): \zeta < 1 \Rightarrow \sqrt{\zeta^2 - 1} < 0, \text{sucede si } c_{crít.} > c;$$

University Copy For Library Use

- Sobreamortiguamiento.

$c > c_{crit} = 2\sqrt{(mk)}$

$$\zeta > 1 \Rightarrow \sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$$



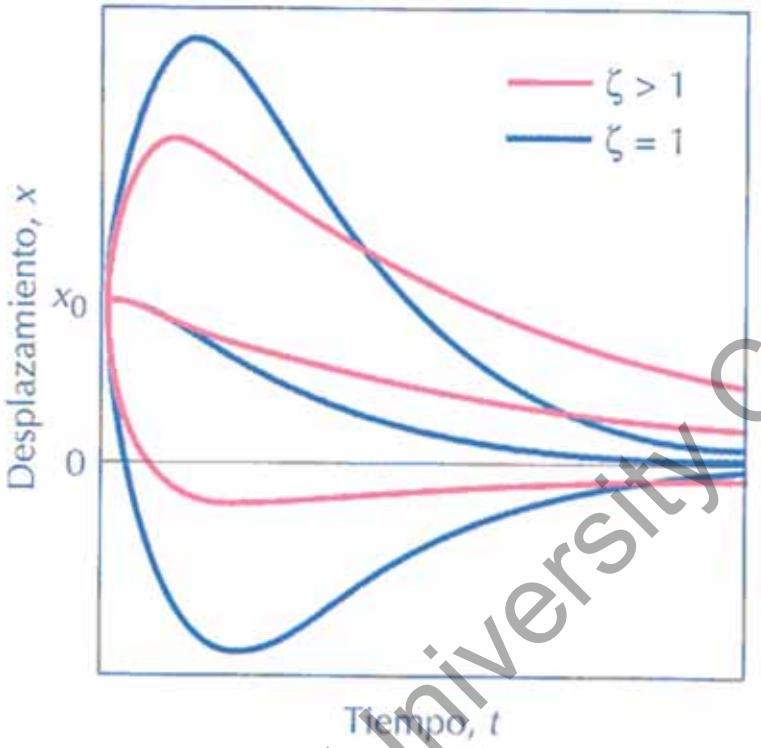
$$x(t) = D_1 e^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} + D_2 e^{\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t}$$

University Copy For Library Use

- Amortiguamiento crítico.

$c=c_{crit}=2\sqrt{(mk)}$

$$\zeta = 1 \Rightarrow \sqrt{\zeta^2 - 1} = 0$$



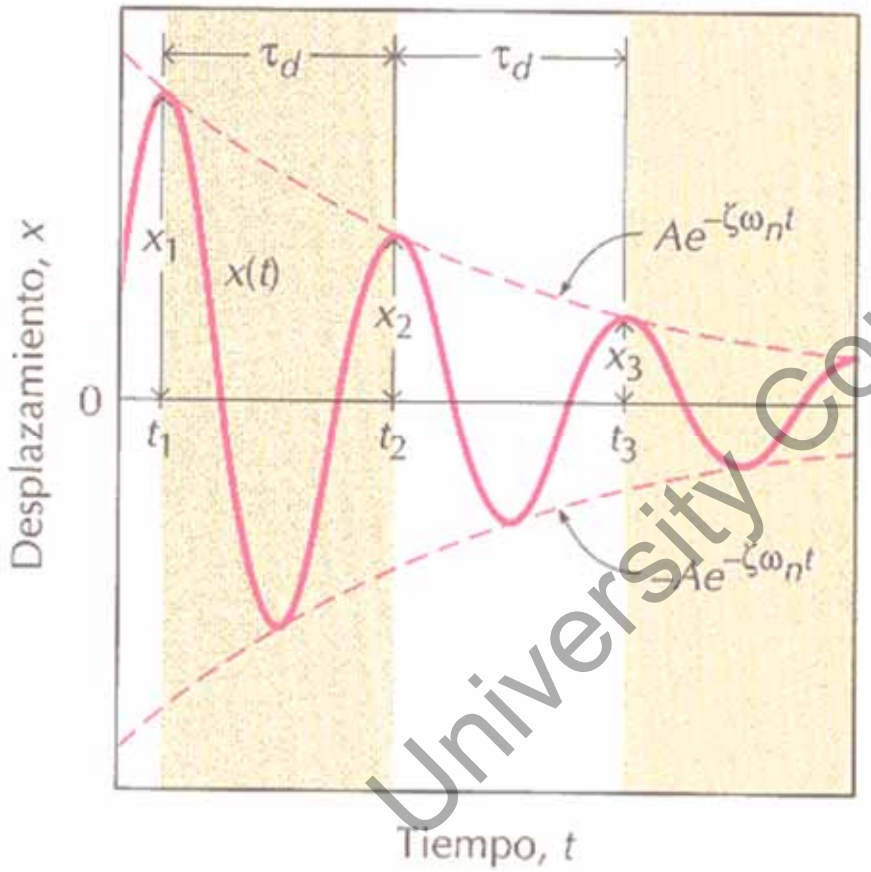
$$x(t) = (D_1 + D_2 t)e^{-\omega_n t}$$

University Copy For Library Use

- Subamortiguada (1/2).

$c<c_{crit}=2\sqrt{(mk)}$

$$\zeta<1\Rightarrow\sqrt{\zeta^2-1}<0$$



$$x(t)=\chi e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_d t+\phi);$$

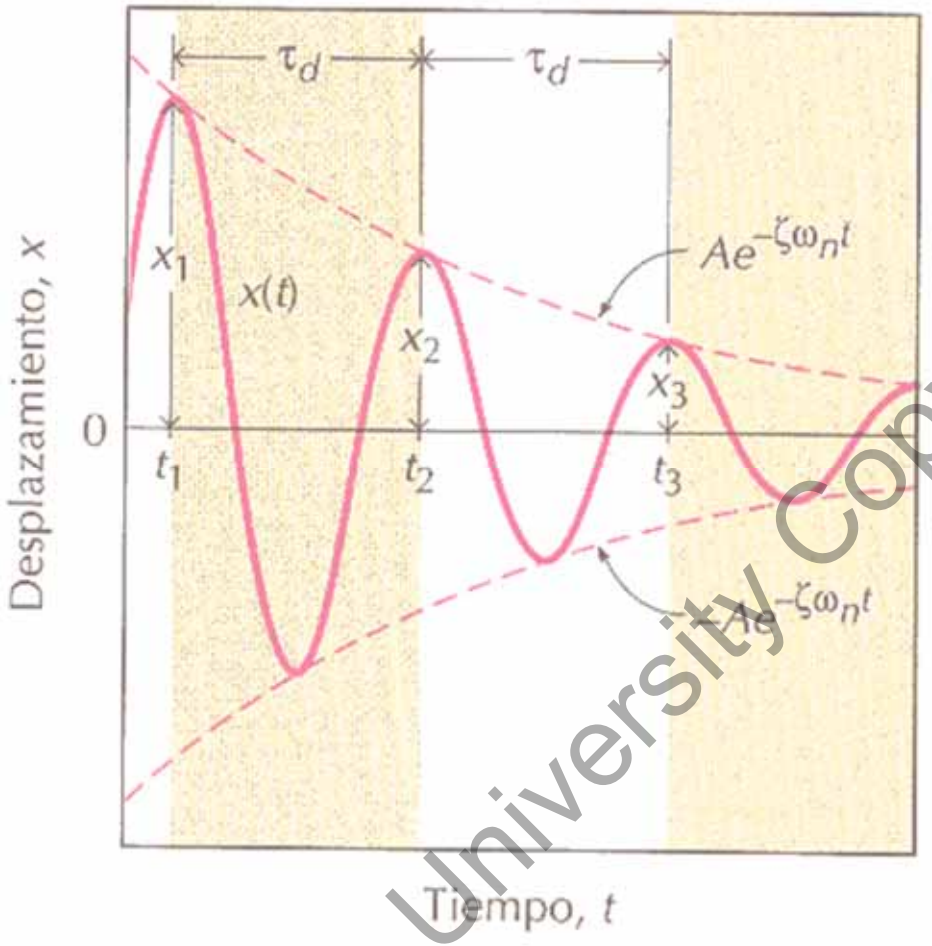
$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2};$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{x_0\omega_d}{v_0+\zeta\omega_n x_0};$$

$$\chi=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}$$

University Copy For Library Use

- Subamortiguada (2/2).



$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi};$$

$$T_d = \frac{1}{f_d}$$

$$\frac{\chi_1}{\chi_2} = e^{\zeta\omega_n T_d};$$

Con decremento logarítmico :

$$\delta = \ln\frac{\chi_1}{\chi_2} = \zeta\omega_n T_d;$$

$$\delta = \ln\frac{\chi_1}{\chi_n} \approx \zeta\, 2(n-1)\pi$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}};$$

$$\chi_n \approx \frac{\chi_1}{e^{\zeta\, 2(n-1)\pi}}$$

con amortiguamiento pequeño :

$$\chi_1 \cong \chi_2 \Rightarrow \delta \to 0; \zeta \approx \frac{\delta}{2\pi}$$

University Copy For Library Use

- Beer 19_001.

Una partícula oscila con amplitud x_{max}=400[mm] y período de T=1.4[s]. Dar la (a) máxima velocidad de la partícula y (b) la máxima aceleración.

$x=x_{max}\sin(\omega t+\phi)=x_{max}*\sin((2\pi/T)t+\phi)=0.4*\sin((2\pi/1.4)t+\phi)$

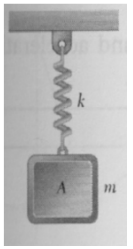
$v=x'=\omega x_{max}\cos(\omega t+\phi)=(2\pi/T)*x_{max}*\cos((2\pi/T)t+\phi)=(2\pi/1.4)*0.4*\cos((2\pi/1.4)t+\phi)\Rightarrow$
$v_{max}=(2\pi/1.4)*0.4= 4.488[rad/s]*0.4[m]= 1.795[m/s]$

$a=x''=v'=-\omega^2 x_{max}\sin(\omega t+\phi)=-(2\pi/T)^2*x_{max}*\sin((2\pi/T)t+\phi)=-(2\pi/1.4)^2*0.4*\sin((2\pi/1.4)t+\phi)\Rightarrow$
$a_{max}=(2\pi/1.4)^2*0.4= 4.488^2[rad/s]^2*0.4[m]= 8.06[m/s^2]$

University Copy For Library Use

Sol: (a) v_{max}=1.795[m/s] (b) a_{max}=8.06[m/s^2].

- Beer 19_013.



Una masa de 1.4[kg] cuelga de un muelle de 400[N/m]. Desde equilibrio se le impacta partiendo con velocidad 2.5[m/s]. Hallar (a) tiempo para subir 60[mm] (b) velocidad y aceleración en ese instante.

La frecuencia de una masa con un muelle se calcula:

$\omega=\sqrt{(k/m)}=\sqrt{(400[kg*m/s^2/m]/1.4[kg])}= 16.90[rad/s]$

Suponemos para t=0 x(0)=0 y sustituimos:

$x=x_{max}\sin(\omega t+\phi) \Rightarrow 0=x_{max}*\sin(0+\phi) \Rightarrow \phi=0$

Suponemos para t=0 x'(0)=2.5[m/s] y sustituimos:

$v=x'=\omega x_{max}\cos(\omega t+\phi) \Rightarrow 2.5=16.90*x_{max}*\cos(0+0) \Rightarrow x_{max}=2.5/16.90=0.1479[m]$

Suponemos para x=0.06 y sustituimos:

$x=x_{max}\sin(\omega t+\phi) \Rightarrow 0.06=0.1479*\sin(16.90*t) \Rightarrow t=\arcsin(0.06/0.1479) / 16.90 = 0.0247[s]$

Sustituimos t=0.0247 en velocidad y aceleración:

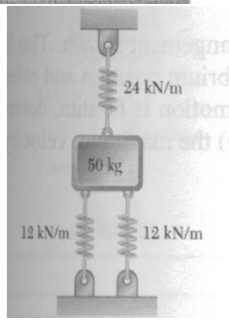
$v=x'=\omega x_{max}\cos(\omega t+\phi) \Rightarrow v_{0.06m}=16.90*0.1479*\cos(16.90*0.0247) \Rightarrow v_{0.06m}=2.29[m/s]\uparrow$

$a=x''=-\omega^2 x_{max}\sin(\omega t+\phi)=-\omega^2 x \Rightarrow v_{0.06m}=-16.90^2*0.06 \Rightarrow a_{0.06m}=-17.14[m/s]\uparrow$, o sea $17.14[m/s]\downarrow$

Sol: (a) $t_{0.06m}=0.0247[s]$ (b) $v_{0.06m}=2.29[m/s]\uparrow$, $a_{0.06m}=17.14[m/s^2]\downarrow$

University Copy For Library Use

- Beer 19_018.



Una masa de 50[kg] cuelga de un muelle de k=24[kN/m] y apoyado sobre 2 muelles de k=12[kN/m]. Se desplaza la masa y se observa que el movimiento tiene amplitud 60mm. Hallar (a) periodo y (b) velocidad y aceleración máxima.

La fuerza para subir la masa una distancia x es:

F [kN]=24*x+12*x+12*x=48*x.

O sea se puede tratar como un muelle de k=48[kN/m]

La frecuencia de una masa con un muelle se calcula:

$\omega=\sqrt{(k/m)}=\sqrt{(48000[kg*m/s^2/m]/50[kg])}= 30.98[rad/s]$

Periodo: $T=2\pi/\omega= 0.203[s]$

Frecuencia: $f=\omega/2\pi=1/T= 4.931$ [Hz]=[ciclo/segundo]

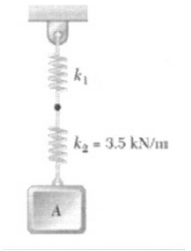
$v_{max}=\omega*x_{max}= 30.98[rad/s]*0.06[m]= 1.859[m/s]$

$a_{max}=\omega^2*x_{max}= 30.98^2[rad/s]^2*0.06[m]= 57.6[m/s^2]$

Sol: (a) T=0.203[s] o f=1/T=4.93[Hz] (b) v_{max}=1.859[m/s], a_{max}=57.6[m/s^2]

University Copy For Library Use

- Beer 19_026.



Se sabe que el periodo de vibración de k1+k2 es T=0.2[s]. Si se quita k2 que sabemos es de 3.5[kN/m] y se deja tan sólo k1 el periodo es de 0.12[s]. Hallar (a) k1 (b) m.

Cuando tenemos los dos muelles una fuerza F=ke*x=k1*x1=k2*x2 y además x=x1+x2. Por lo tanto para muelles en serie: ke=F/x=(k1*k2)/(k1+k2) y por tanto:

$T_{12}=2\pi/\sqrt{(k/m)} \Rightarrow 0.2=2\pi/\sqrt{((k1*3500)/(k1+3500)/m)}$

Cuando tenemos tan sólo k1:

$T_1=2\pi/\sqrt{(k/m)} \Rightarrow 0.12=2\pi/\sqrt{(k1/m)}$

Si dividimos los periodos eliminamos la masa como incógnita:

$(T_{12}/T_1)^2=k1/((k1*k2)/(k1+k2))=(k1+k2)/k2 \Rightarrow (0.2/0.12)^2=(k1+3500)/3500$

$\Rightarrow$ k1=6222 [N/m]

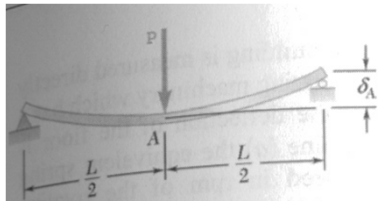
Sustituimos k1 en T_1:

$m=(T_1/2\pi)^2*k1 \Rightarrow$ m=2.27[kg]

Sol: (a) k1=6.22[kN/m] (b) m=2.27[kg]

University Copy For Library Use

- Beer 19_029.



Una viga apoyada con una carga central se deforma $d=PL^3/48EI$. Para la barra de la figura $E_{acero}=2e11[N/m^2]$, L=5[m], $I=2e\text{-}5[m^4]$. Halla (a) muelle que equivale a la viga, (b) la frecuencia que oscila una masa de 750[kg] colocada en el centro de la viga (despreciar masa viga).

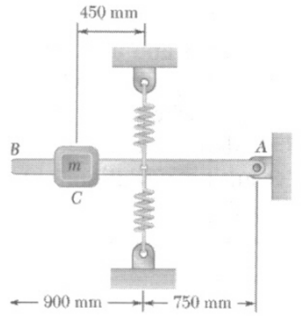
El muelle de constante $k=P/d=P/(PL^3/48EI)=48EI/L^3=$
$48*2e11[N/m^2]*2e\text{-}5[m^4]/5^3[m^3] = 1536000\ [N/m] = 1.536\ [kN/mm]$

Una vez conocemos la masa y constante del muelle se calculan frecuencias:
$\omega=\sqrt{(k/m)}=\sqrt{(1.536e6\ [kg*m/s^2/m]/750[kg])}=45.25\ [rad/s]$
$f=\omega/2\pi= 7.20\ [Hz]$

Sol: (a) k=1536[kN/m] (b) f=7.20[Hz]

University Copy For Library Use

- Beer 19_041.



La barra AB de 1.2[kg] está unido con muelles de k=450[N/m]. Hallar (a) la masa de C si el periodo de pequeñas oscilaciones de 0.6[s]. (b) Si se baja el punto B 60[mm] dar la velocidad máxima de C.

Estudiamos todas las fuerzas y hacemos equilibrio de momentos respecto a A: $\alpha=\omega'=\theta''$

$1.2*m_c g+0.825*m_{ab}*g-2*0.75*(k*(0.75\theta+\delta))=I\alpha+0.825*m_{ab}*(\alpha*0.825)+1.2*m_c*(\alpha*1.2)$

En el punto de equilibrio $\alpha=0$ y $\theta=0$ y por tanto:

$1.2*m_c g+0.825*m_{ab}*g-2*0.75*(k*(0+\delta))=0$ y sustituimos en la ecuación general:

$-2*0.75*(k*(0.75\theta))=m_{ab}L^2/12*\theta''+0.825*m_{ab}*(\theta''*0.825)+1.2*m_c*(\theta''*1.2)$ ⇨

$(0.2725+0.825^2*1.2+1.2^2*m_c)\theta'' + 506.25\theta = 0$ ⇨ $(1.0893+1.44m_c)\theta'' + 506.25\theta = 0$ ⇨

$\omega=\sqrt{506.25/(1.0893+1.44m_c)}$

$\omega=2\pi/T=2\pi/0.6=10.47=\sqrt{109.66}$ ⇨ $506.25 = 109.66(1.0893+1.44m_c)$ ⇨ $m_c=2.45$[kg]

Sin necesidad de tener la masa se puede hacer el segundo apartado:

$v_{cmax}=1.2*\theta'_{max}=1.2*\omega*\theta_{max}=1.2*\omega*y_{max}/1.65=1.2*10.47*0.06/1.65=0.4568$[m/s]

Sol: (a) $m_c=2.45$[kg] (b) $v_{cmax}=457$[mm/s]

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Teoría con ejercicios sencillos de vibraciones libres.

University Copy For Library Use

S36t.- Vibraciones Forzadas.

University Copy For Library Use

Mejora 1314 ....

- Repaso sesión anterior.

➢ Teoría y ejercicios sencillos de vibraciones libres.

University Copy For Library Use

- Objetivos sesión.

➢ Comprender problemática resonancia.

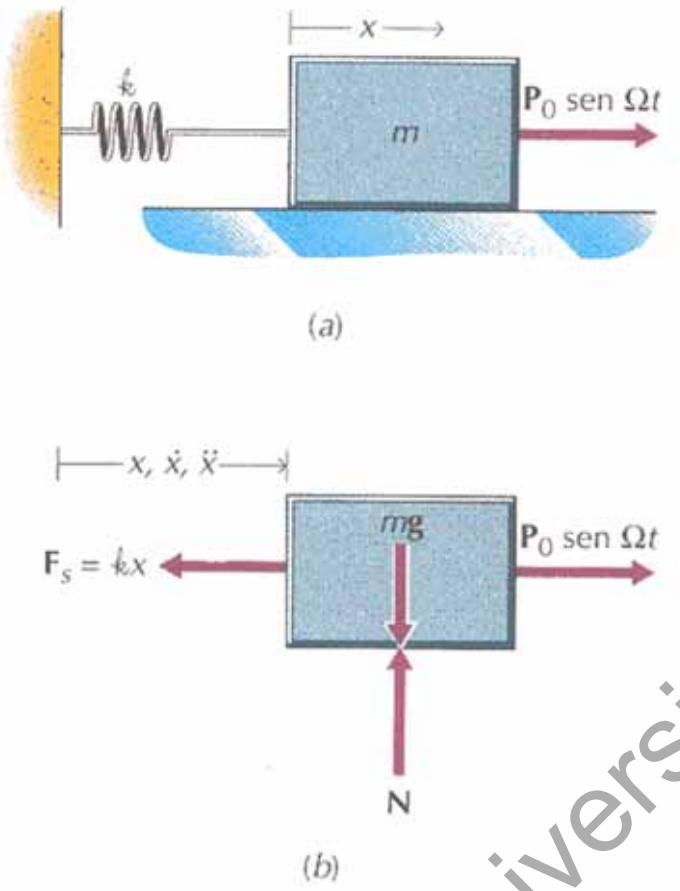
➢ Comprender factor de amplificación y relación con amortiguamiento.

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Vibración forzada no amortiguada.



$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a};$$

$$-kx + P_0 \operatorname{sen}\Omega t = m\ddot{x};$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{P_0}{m}\operatorname{sen}\Omega t \Rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t);$$

$$x_h(t) = \chi \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi); x_p(t) = \chi' \operatorname{sen}\Omega t;$$

$$\chi' = \frac{\chi_0}{1 - r^2}; \chi_0 = \frac{P_0}{k};$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n};$$

$$Amplitud = \frac{P_o / k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$x(t) = \chi \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) + \frac{P_0/k}{1 - r^2}\operatorname{sen}\Omega t$$

$\omega_n > \Omega \Rightarrow r < 1; \chi' > \chi_0$ ⇨ en fase: alargamiento= x-δ

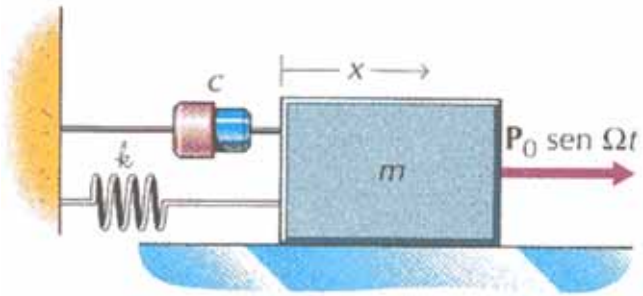
$\omega_n < \Omega \Rightarrow r > 1; \chi' < \chi_0$

$\omega_n = \Omega \Rightarrow r = 1; \chi' \to \infty$ **Resonancia, Amplitud infinita**

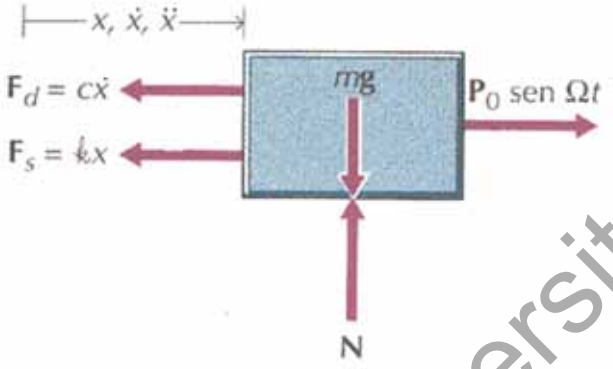
Con rozamiento $x_h(t)$ se atenúa en el tiempo, y se llama solución transitoria sobretodo para $\omega_n > \Omega$. La parte $x_p(t)$ se llama solución permanente.

University Copy For Library Use

- Vibración forzada amortiguada.



(a)



(b)

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a};$$

$$-c\dot{x} - kx + P_0 \operatorname{sen}\Omega t = m\ddot{x};$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \operatorname{sen}\Omega t \Rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t);$$

$$x_p(t) = \chi' \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi);$$

$$\chi' = \frac{\chi_0}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}};$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1 - r^2};$$

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}};$$

$$\chi_0 = \frac{P_0}{k};$$

El ángulo de fase φ representa el retardo de la respuesta del sistema a la perturbación externa.

University Copy For Library Use

- Vibración forzada no amortiguada.

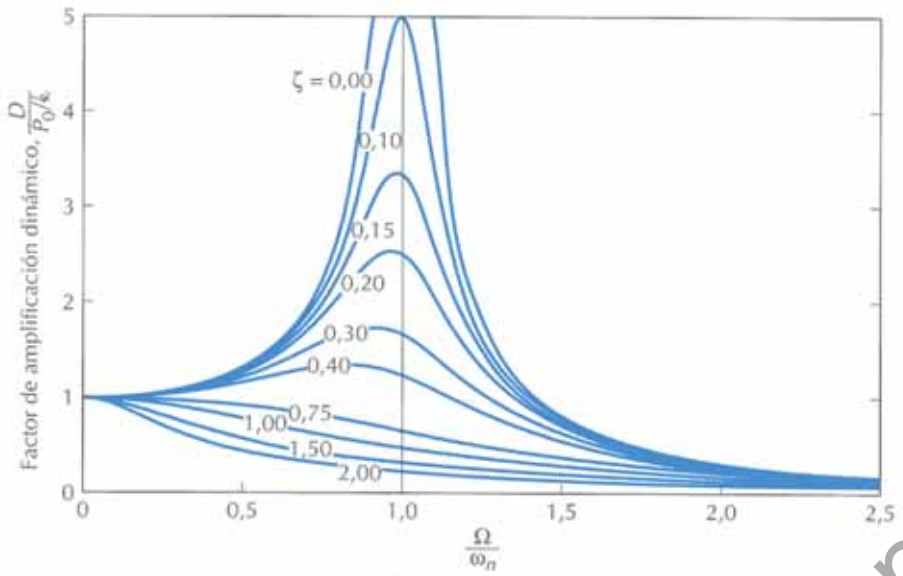
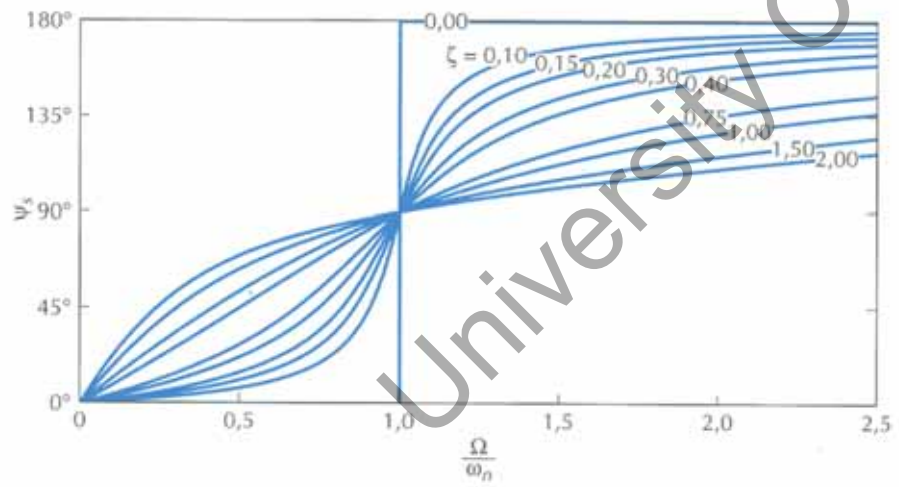


Figura P21-22



$$\varphi = \tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

Si $r<<1$, $\varphi\approx 0$, $FM\approx 1$. Mayormente en equilibrio estático.

Para $r<1$ $0<\varphi<90º$: Respuesta permanente mayormente en fase con fuerza perturbadora.

Con $r>1$ $90º<\varphi<180º$: Respuesta permanente mayormente en contrafase con fuerza perturbadora.

Si $r>>1$, $\varphi\approx 180º$, $FM\approx 0$. Casi equilibrio estático; independiente de ζ

Con $r=1$, respuesta retrasada 90º respecto a fuerza perturbadora; resonancia si $\zeta\approx 0$, para otros valores de ζ se puede evitar resonancia.

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

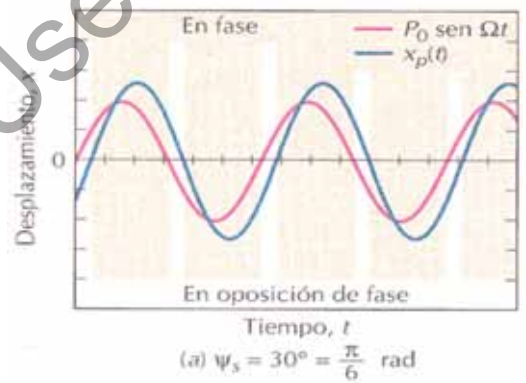
University Copy For Library Use

- Vibración forzada no amortiguada.

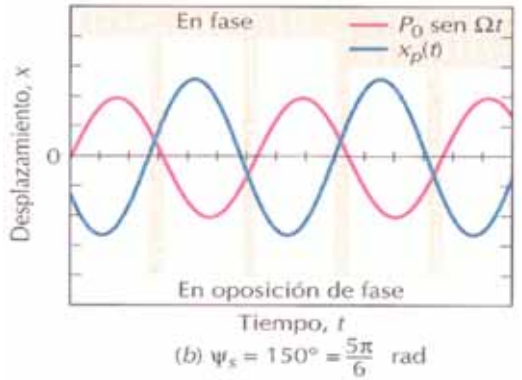
Para $r<1$ $0<\varphi<90º$: Respuesta permanente mayormente en fase con fuerza perturbadora.

Con $r>1$ $90º<\varphi<180º$: Respuesta permanente mayormente en contrafase con fuerza perturbadora.

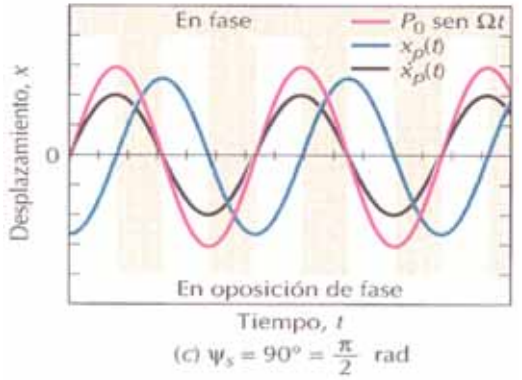
Con $r=1$, respuesta retrasada 90º respecto a fuerza perturbadora. Cuando la fuerza perturbadora es máxima, la respuesta es nula y la velocidad máxima



(a) $\psi_s = 30° = \frac{\pi}{6}$ rad



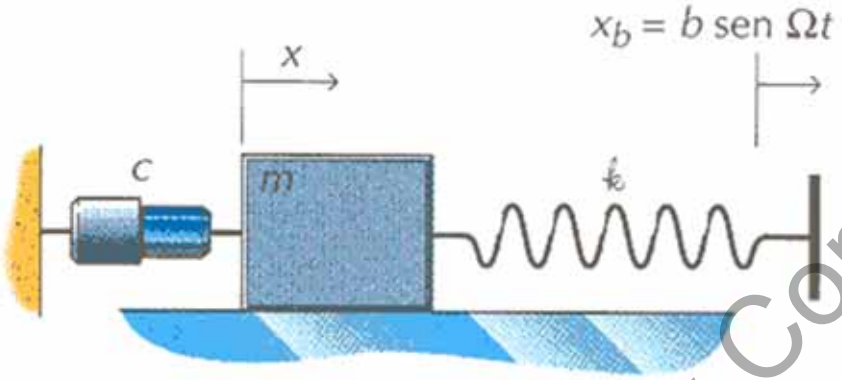
(b) $\psi_s = 150° = \frac{5\pi}{6}$ rad



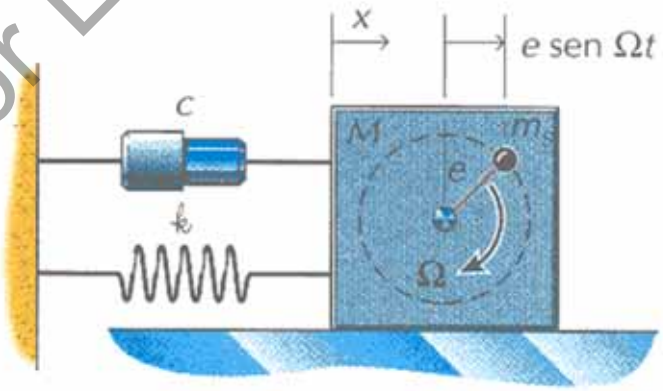
(c) $\psi_s = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad

University Copy For Library Use

- Fuentes de vibración forzada.



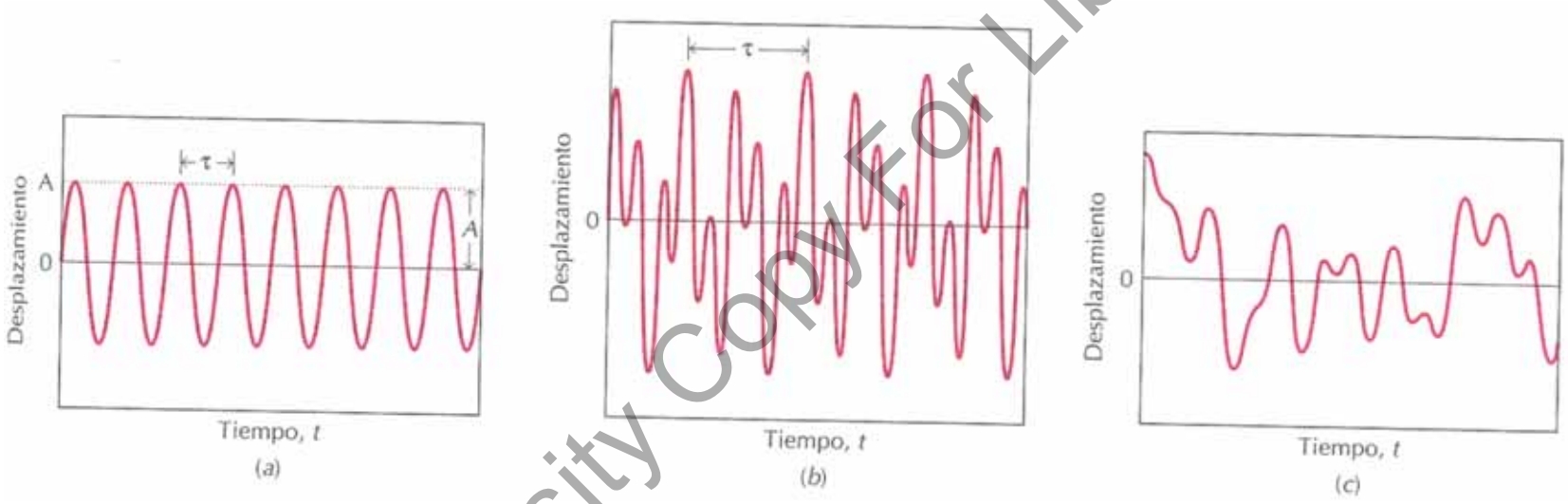
Movimiento del apoyo
(Amortiguación de automóviles)



Rotación descompensada
(Rotor desequilibrado)

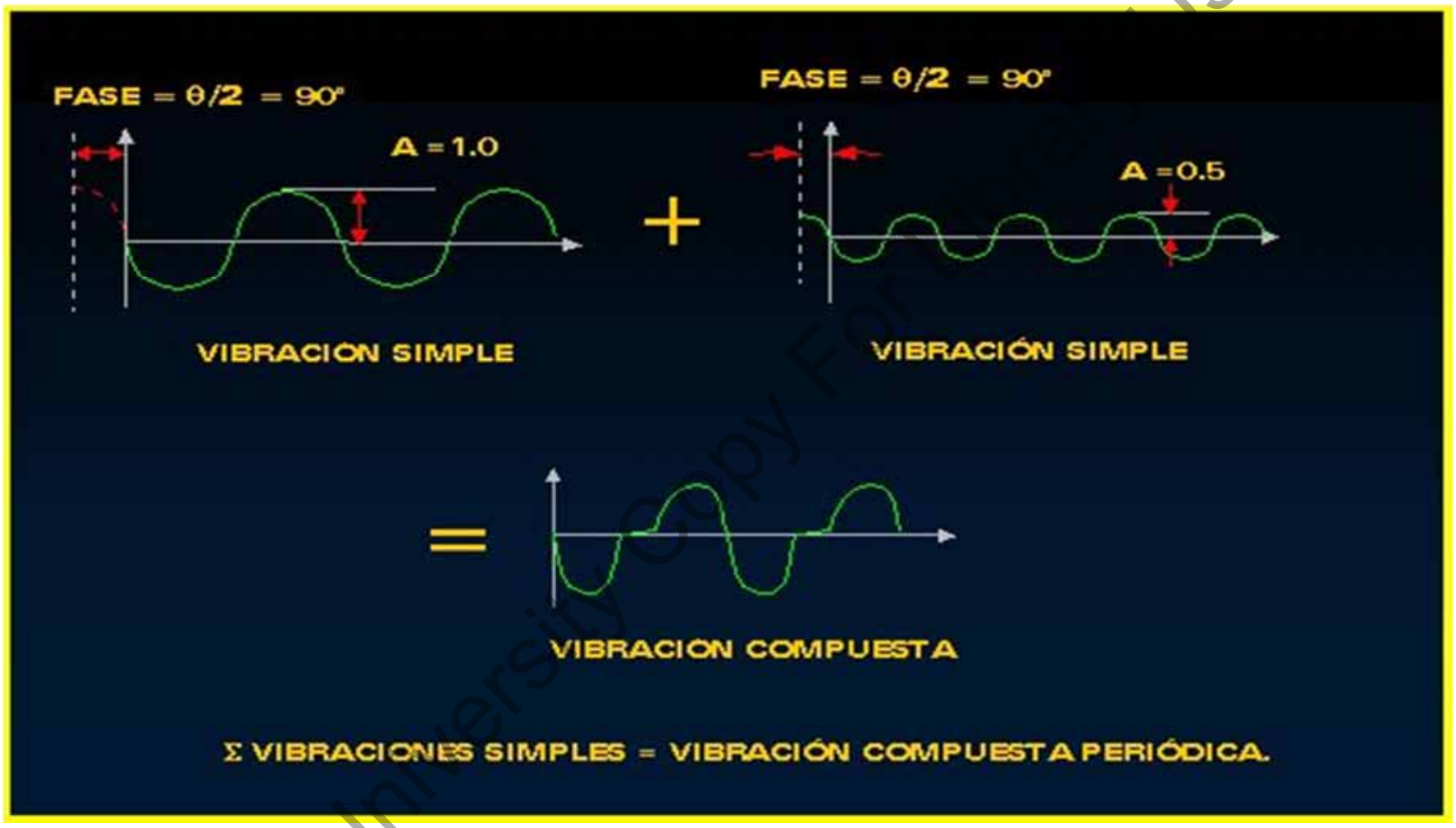
University Copy For Library Use

- Frecuencias de fuentes de vibración.



University Copy For Library Use

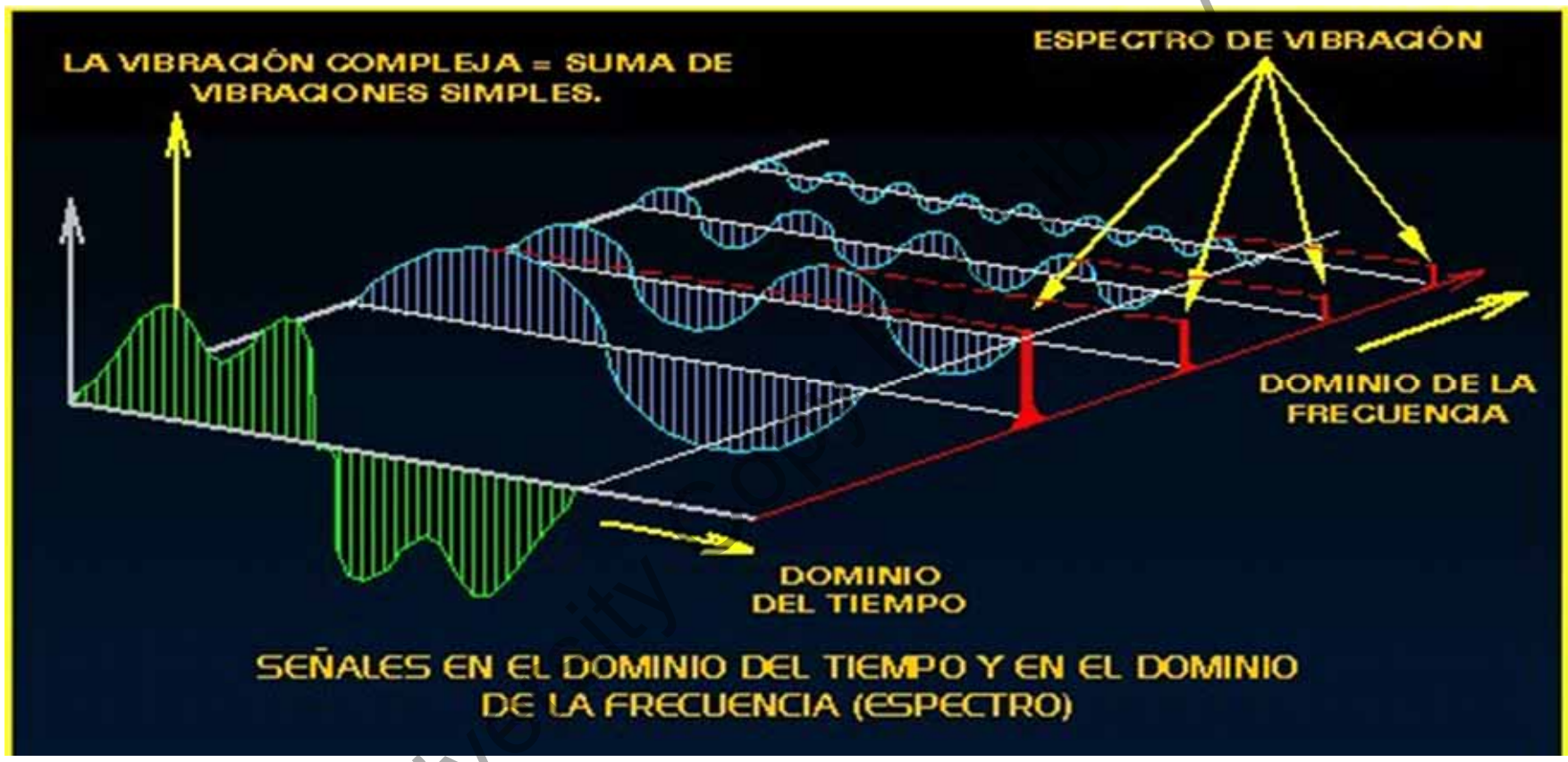
- Funciones periódicas compuestas.



Tomado de http://www.a-predictor.com/TUTORIAL/CONCEPTOS_BASICOS_3.html

University Copy For Internal Use

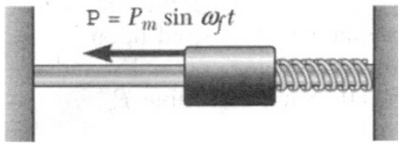
- Transformada de Fourier.



Tomado de http://www.a-predictor.com/TUTORIAL/CONCEPTOS_BASICOS_3.html

University copy for Use

- Beer 19_099 inicio libre.



Un colar de 4[kg] se mueve junto a muelle de k=450[N/m] y psi=0.1. Determinar sus frecuencias propias si se aplica carga constante de 13 N.

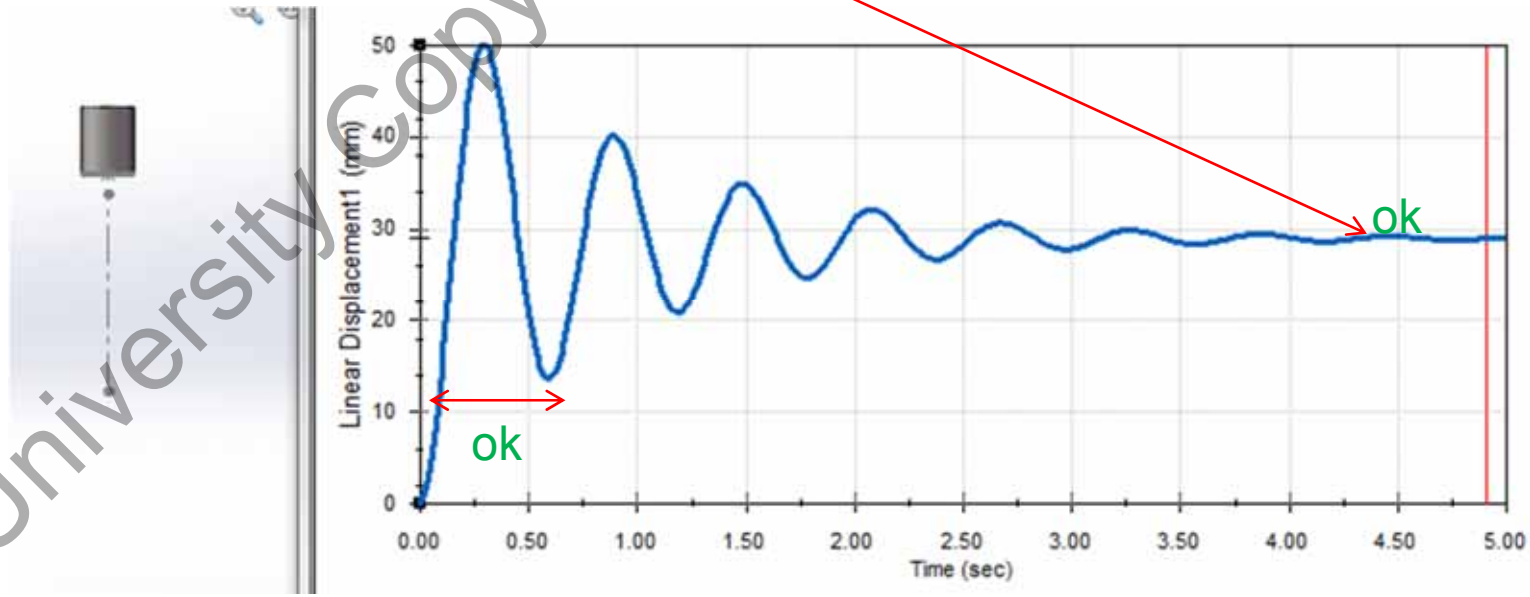
c=psi*ccr=0.1*√(4km)=8.485[Ns/m]

Amplitud estática=(13/450)/1=P_o/k=0.02889[m]

ω_n=√450/4=10.607[rad/s]

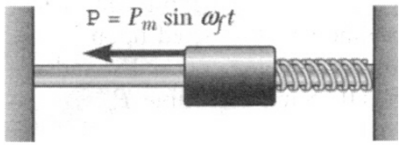
T=0.5934[s]

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$



University Copy For Library Use

• Beer 19_099 sin amortiguamiento.



Un colar de 4[kg] se mueve junto a muelle de k=450[N/m] con una excitación externa P=13sin(ω_ft). Determinar la amplitud del movimiento sin damping si (a) ω_f=5[rad/s], (b) ω_f=10[rad/s].

$$Amplitud = \frac{P_o / k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Amplitud=(13/450)/(1-ω_f^2/(450/4))

ω_n=√450/4=10.607[rad/s]

P_o/k=0.02889[m]

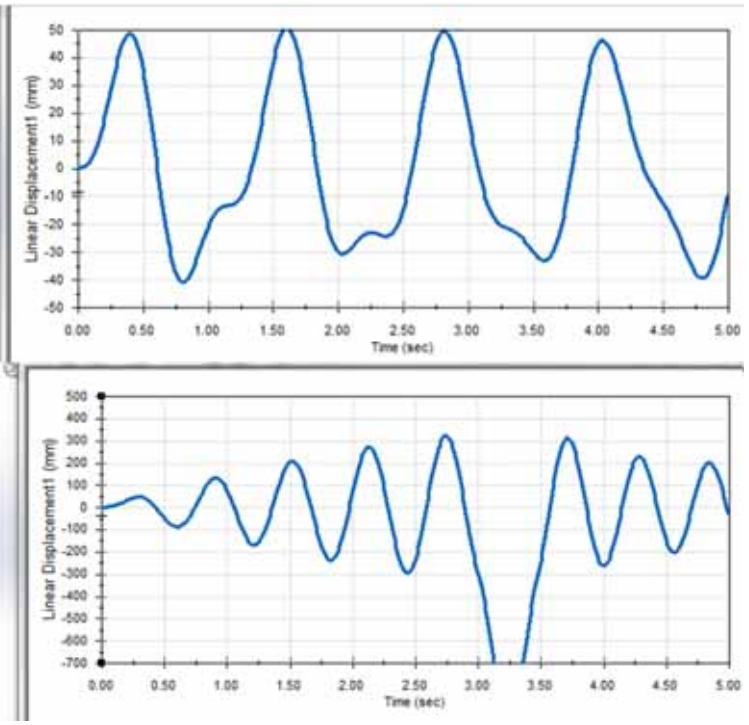
No se consigue lograr el valor de 37mm con SW. Se ve el estacionario!!

Si ω_f=5,⇨ ω_n>ω_f ⇨ en fase,

x_m=(13/450)/(1-5^2/(450/4))=0.03714[m]

Si ω_f=10,⇨ ω_n>ω_f ⇨ en fase,

x_m=(13/450)/(1-10^2/(450/4))=0.2598[m]

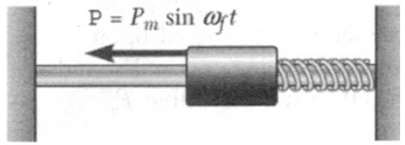


$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

Sol: (a) x_m=37.14[mm] (b) x_m=259.8[mm]

University Copy For Library Use

- Beer 19_099 muy rápido.



Repetimos para un frecuencia superior a la de resonancia ω_f=12[rad/s].

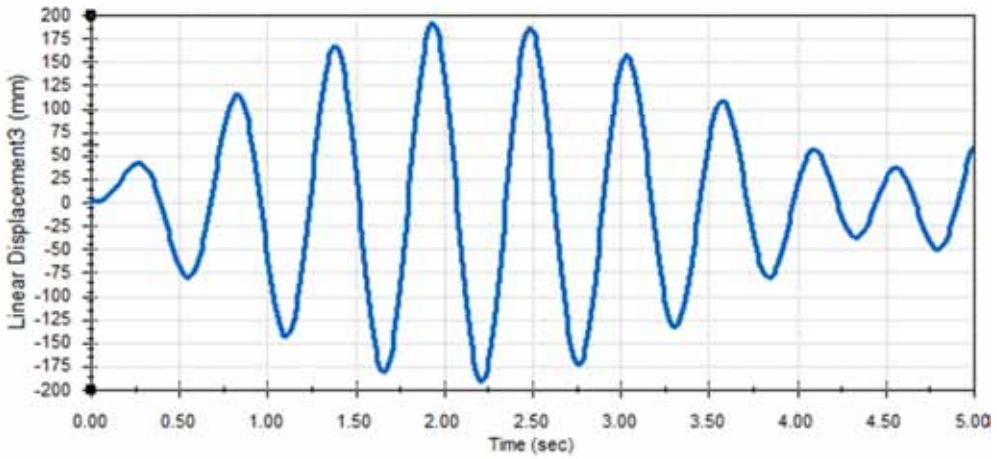
$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

Si ω_f=12,⇨

x_m=(13/450)/(1-12^2/(450/4))=0.1032[m]

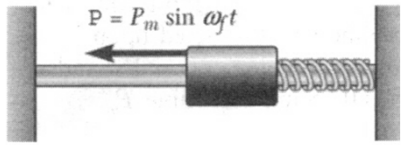
No se consigue el objetivo con SW.

Se ve el estacionario!!



University Copy For Library Use

• Beer 19_099 con damping.



Si repetimos el ejercicio para psi=0.1 tenemos que

c=psi*ccr=0.1*√(4km)=8.485[Ns/m]

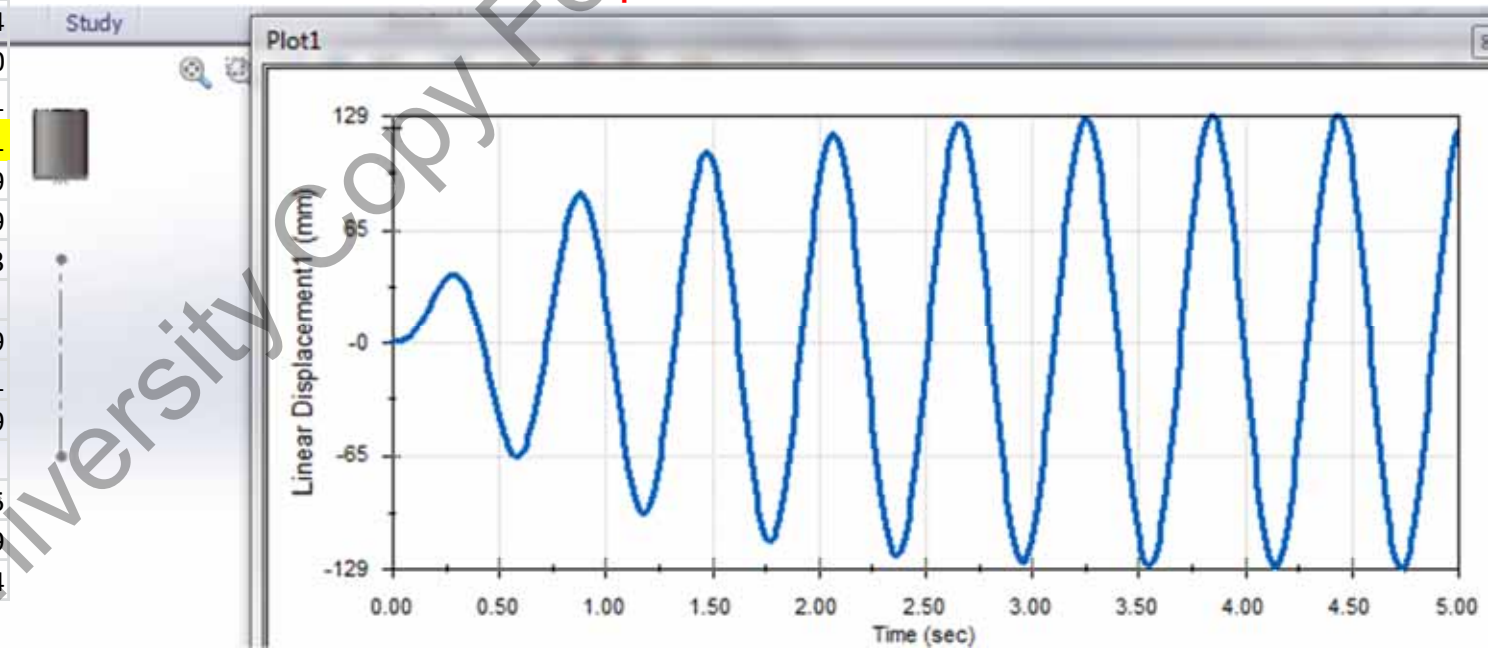
X=5x_o=144.44(mm)

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

No se consigue lograr

el valor de 144 pero se está cerca en 129mm con SW

m (kg)	4	4	4	4
k (n/m)	450	450	450	450
psi (-)	0.1	0.1	0.1	0.1
wf (rad/s)	0	5	10	10.61
wf (Hz)	0	0.80	1.59	1.69
T (s)	#¡DIV/0!	1.26	0.63	0.59
Po (N)	13	13	13	13
xo (mm)	28.89	28.89	28.89	28.89
wn (rad/s)	10.61	10.61	10.61	10.61
T (s)	0.59	0.59	0.59	0.59
xc=0 (mm)	28.89	37.14	260.00	#¡DIV/0!
ccr(Ns/m)	84.85	84.85	84.85	84.85
c(Ns/m)	8.49	8.49	8.49	8.49
xcr(mm)	28.89	36.87	132.00	144.44



University Copy For Library Use

- Beer 19_112.

Un motor de masa "M" se sostiene en muelles de constante total equivalente "k". El rotor del motor está desequilibrado como si se colocase una masa "m" a una distancia "r". Obtener la amplitud cuando se rota a una frecuencia ω_f.

Sabemos que la carga descentrada es $p_m=mr\omega_f^2$.

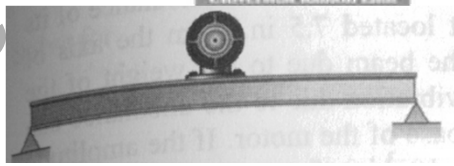
La frecuencia natural es $\omega_n=\sqrt{k/M}$

$Mx''+kx=p_m\sin\omega_f t \Rightarrow x_m=(mr\omega_f^2)/k \,/\, (1-(\omega^2_f/k/M)) = r(m/M)(\omega_f^2/\omega_n^2) \,/\, (1-(\omega^2_f/\omega_n^2))$

Sol: (a) $x_{max}=r(m/M)(\omega_f/\omega_n)^2/(1-(\omega_f/\omega_n)^2)$

University Copy For Library Use

- Beer 19_117.



Un motor de Mg=360[lb] está colocado en el centro de una viga. El motor desequilibrado como si mg=0.9[oz] estuviesen a un radio de r=7.5[in] del eje de giro. La flexión estática de la viga debido al peso es de δ=0.6[in]. Una manera de reducir la amplitud de la vibración es añadir una chapa a la base del motor. Se busca que la amplitud sea inferior a 2.16e-3[in] para un régimen de 300[rpm]. Determinar (a) peso de la chapa necesaria.

Sabemos por el ejercicio anterior que: $x_{max}=r(m/M)(\omega_f/\omega_n)^2/(1-(\omega_f/\omega_n)^2)=(mr\omega_f^2)/k \,/\, (1-(\omega^2_f/k/M))$

Antes de añadir la chapa sabemos que $\omega_n^2=k/M= (Mg/\delta)/M = g/\delta$.

Después de añadir la chapa sabemos que $\omega'_n{}^2=k/M'= (Mg/\delta)/M' = (M/M')*g/\delta$.

Queremos el desplazamiento máximo con esta frecuencia:

$x_{max}=(mr\omega_f^2)/k \,/\, (1-(\omega^2_f/k/M'))\Rightarrow$

2.16e-3[in]*1/12[ft/in] = 0.9[oz]*1/16[lb/oz]*7.5[in]*1/12[ft/in]*$(300*2\pi/60)^2$[s^{-2}] / (360[lb]/(0.6[in] *1/12[ft/in])) / (1-$(300*2\pi/60)^2$[s^{-2}]/ 360[lb]/(0.6[in] *1/12[ft/in])/M' ⇨

M'=13.361 ⇨ W'=M'g=13.361*32.2=430.2[lb]

Wchapa=M'g-Mg=430.2-360=70.2[lb]

Sol: (a) W_{chapa}=70.2[lb]

University Copy For Library Use

- Beer 19_126.

Demostrar que para sobreamortiguamiento un cuerpo nunca sobrepasa la posición de reposo si (a) la velocidad inicial es cero (b) empieza en reposo con velocidad inicial.
Usamos la ecuación para sobreamortiguamiento:

$x=c_1e^{s1t}+c_2e^{s2t}$

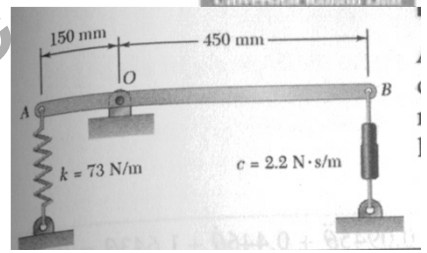
$x'=c_1s_1e^{s1t}+ c_2s_2e^{s2t}$

Caso (a) $x_o=c_1+c_2$ y $0=c_1s_1+ c_2s_2$ ⇨ $c_1=s_2x_o/(s_2-s_1)$ y $c_2=-s_1x_o/(s_2-s_1)$
Para conseguir $x=0$ ⇨ $0=x_o/(s_2-s_1)*(s_2e^{s1t}-s_1e^{s2t})$ ⇨ No hay solución para tiempo positivo que cumpla $s_1<0$, $s_2<0$

Caso (b) $0=c_1+c_2$ y $v_o=c_1s_1+ c_2s_2$ ⇨ $c_1=-v_o/(s_2-s_1)$ y $c_2=v_o/(s_2-s_1)$
Para conseguir $x=0$ ⇨ $0=v_o/(s_2-s_1)*(e^{s2t}-e^{s1t})$ ⇨ No hay solución para tiempo positivo que cumpla $s_1<0$, $s_2<0$. La única es $s_1=s_2$ que no es el caso de sobreamortiguado.

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 19_137.



Una barra de 1.8[kg] se conecta tal y como muestra la figura. Determinar (a) la ecuación diferencial para pequeños ángulos y (b) el ángulo tras 2.5[s] si inicialmente B se baja 23[mm] y se libera.

Sol: (a) $0.0945\ddot{\theta}+0.446\dot{\theta}+1.643\theta=0$ (b) $\theta_{2.5s}$=24.2e-6[rad] por encima de horizontal

University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 19_141.

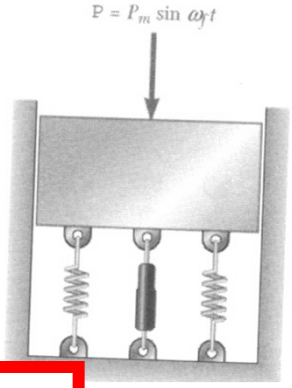
Demostrar que para valores pequeños de amortiguamiento la amplitud máxima de una vibración forzada se produce cuando la frecuencia forzada se aproxima a la natural y que el factor de magnificación es $0.5*(c_{cr}/c)$.

University Copy For Library Use

Sol: (a) $x_m=P_m/k * 0.5*(c_{cr}/c)$.

- Ejercicio casa Beer 19_148.

Una máquina de 91[kg] se sostiene en cuatro muelles de k=175[N/m]. La excitación tiene una frecuencia de 0.8[Hz] y amplitud de 89[N]. Determinar la fuerza transmitida a la base si (a) c=365[Ns/m] (b) c=0.



University Copy For Library Use

Sol: (a) si c=365 F_m=71.0[N] (b) si c=0 F_m=39.0[N]

- Resumen.

➢ Teoría y ejercicios de oscilaciones forzadas.

University Copy For Library Use

S37t.- Ejercicios vibraciones.

Mejora 1314 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios de cinética en 3D con uso de momento angular.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Objetivos sesión.

➢ Aplicar los conocimientos de vibraciones a ejercicios con rotaciones.

University Copy For Library Use

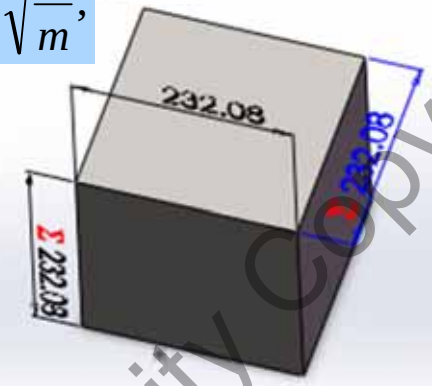
Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

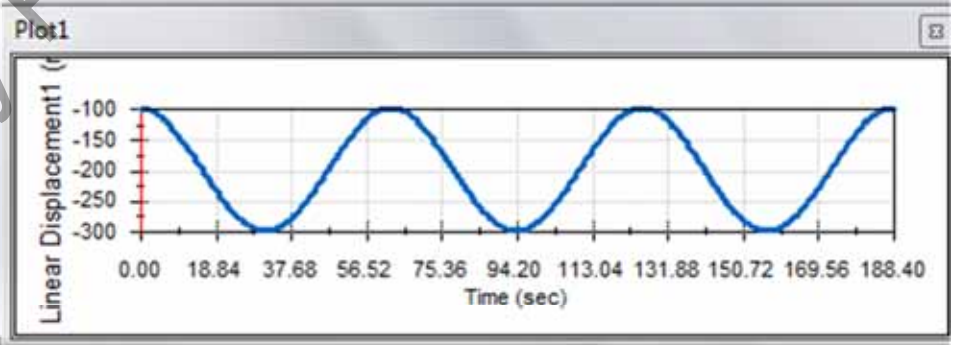
• Vibración masa lineal.

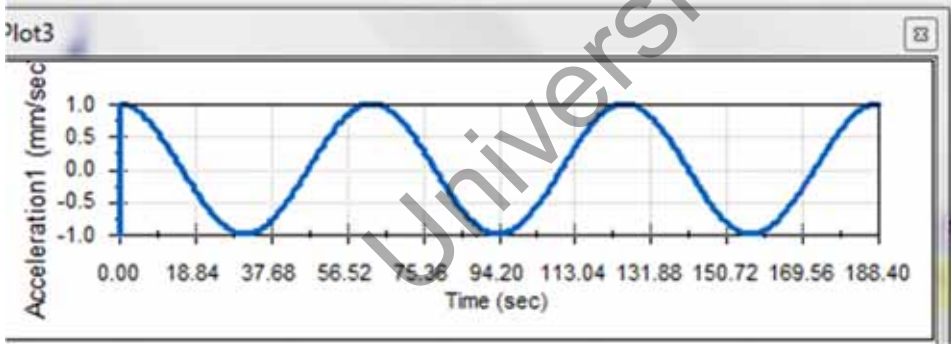
Tenemos una cubo de acero de densidad 8000[kg/m3] y masa 100[kg] sobre un muelle de longitud 200[mm] y k=1[N/m]. Comprimimos el muelle 100[mm] y soltamos. Determinar lado de cubo, frecuencia, periodo, amplitud, velocidad y aceleración máxima.

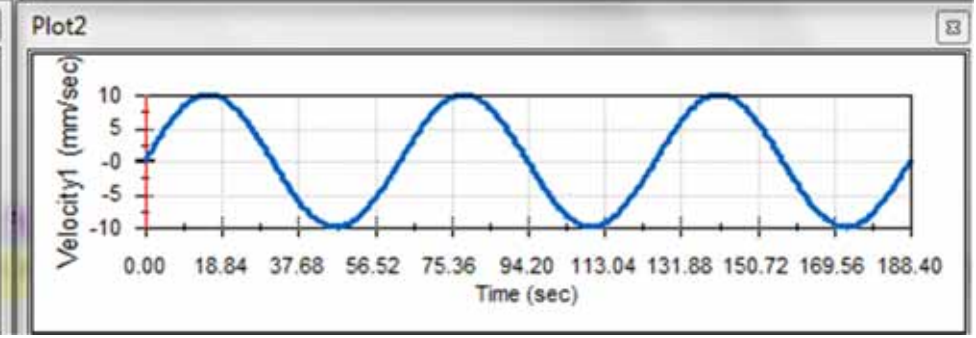
	masa_lineal
m(kg)	100
k(N/m)	1
w(r/s)	0.1
f(Hz)	0.01591549
T(s)	62.8318531

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}};$$









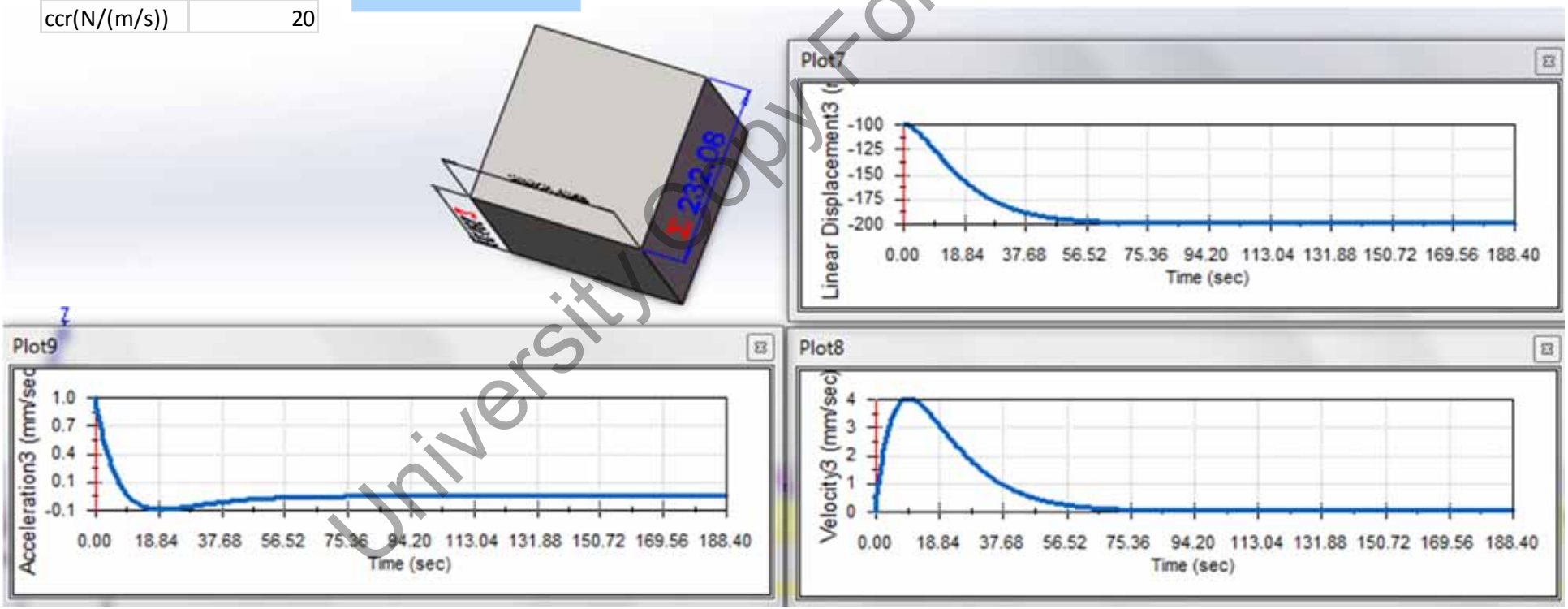
University Copy For Library Use

• Vibración masa lineal críticamente amortiguada.

Si el caso anterior queremos amortiguar críticamente indicar la constante de amortiguación.

$c_{crit}=2\sqrt{(mk)}$

ccr(N/(m/s))	20



University Copy For Library Use

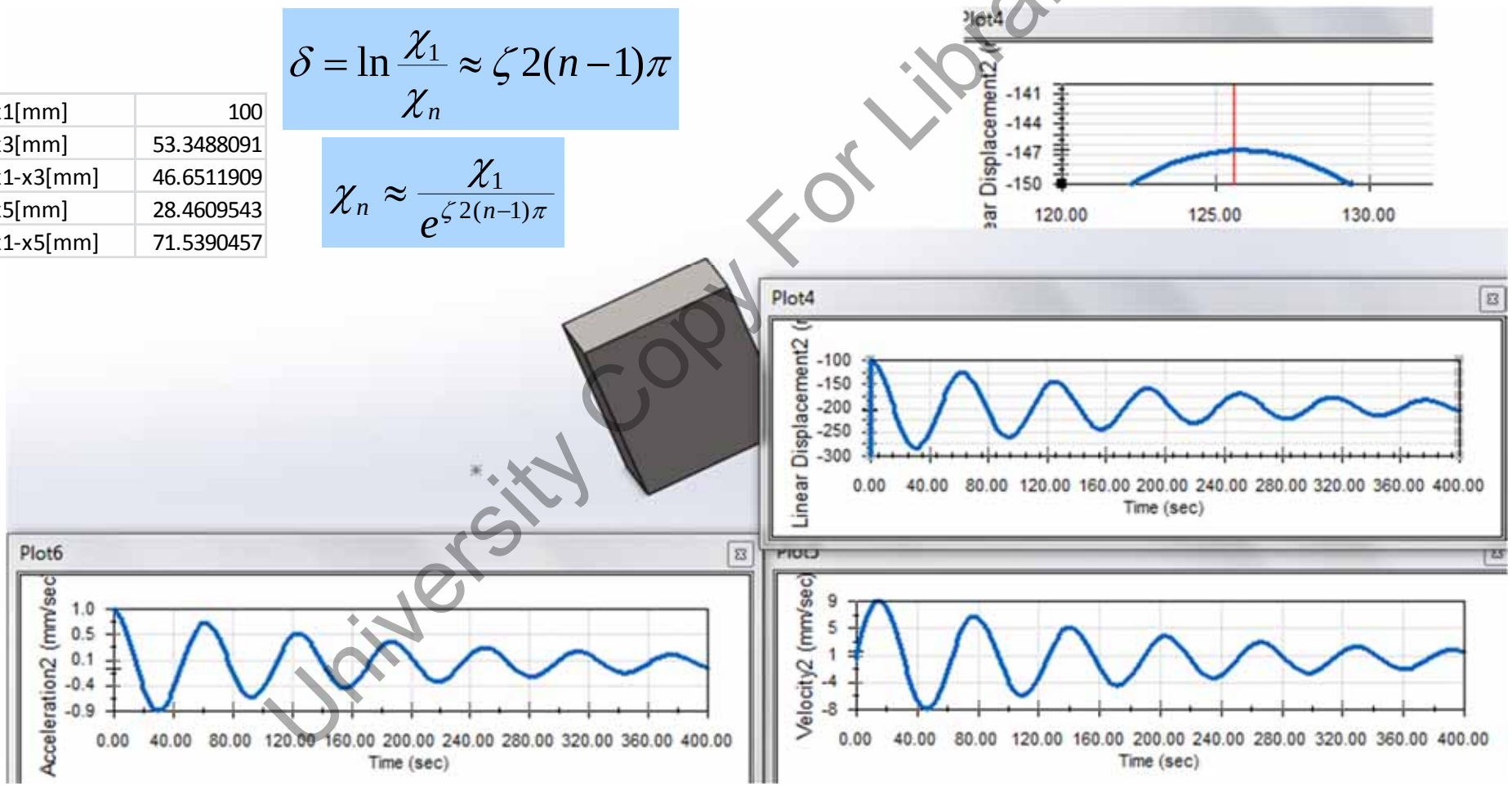
• Vibración masa lineal sub-amortiguada.

Si el caso anterior amortiguamos con un 5% determinar la amplitud en la tercera onda.

x1[mm]	100
x3[mm]	53.3488091
x1-x3[mm]	46.6511909
x5[mm]	28.4609543
x1-x5[mm]	71.5390457

$$\delta = \ln \frac{\chi_1}{\chi_n} \approx \zeta 2(n-1)\pi$$

$$\chi_n \approx \frac{\chi_1}{e^{\zeta 2(n-1)\pi}}$$



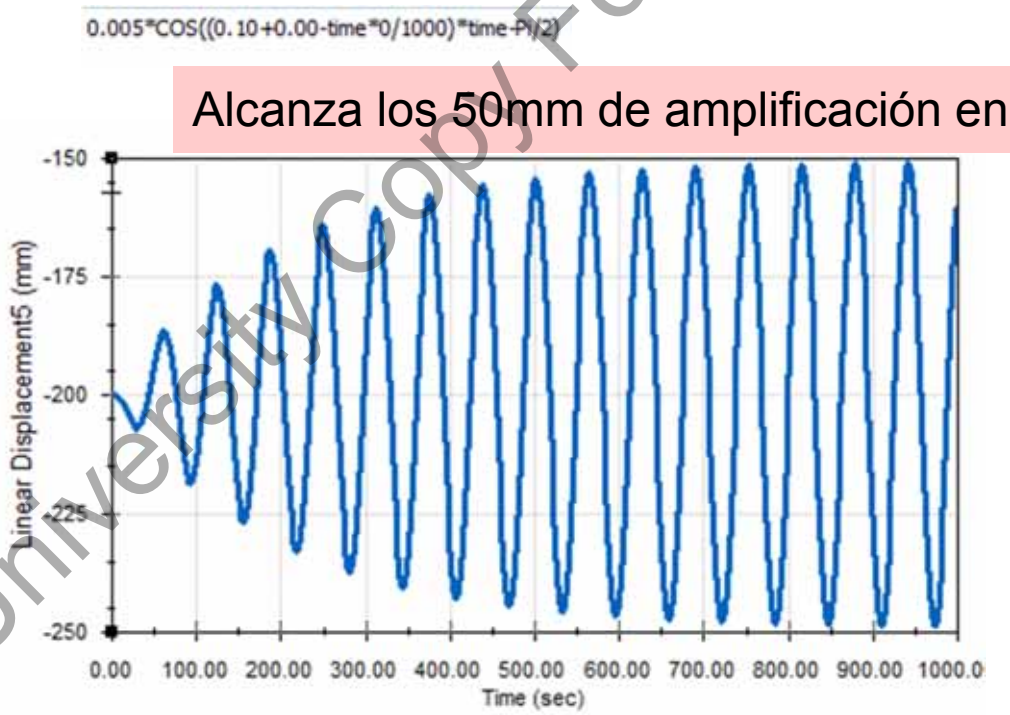
University Copy For Library Use

• Vibración forzada en resonancia masa lineal.

Si en lugar de partir de un muelle comprimido tenemos una fuerza oscilatoria del mismo periodo que la natural (resonancia) y valor F=0.0050[N] determinar la amplificación.

F(N)	0.005
d_est(mm)	5
d_amp(mm)	50

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$



Alcanza los 50mm de amplificación en 10 ciclos aprox.

University Copy For Library Use

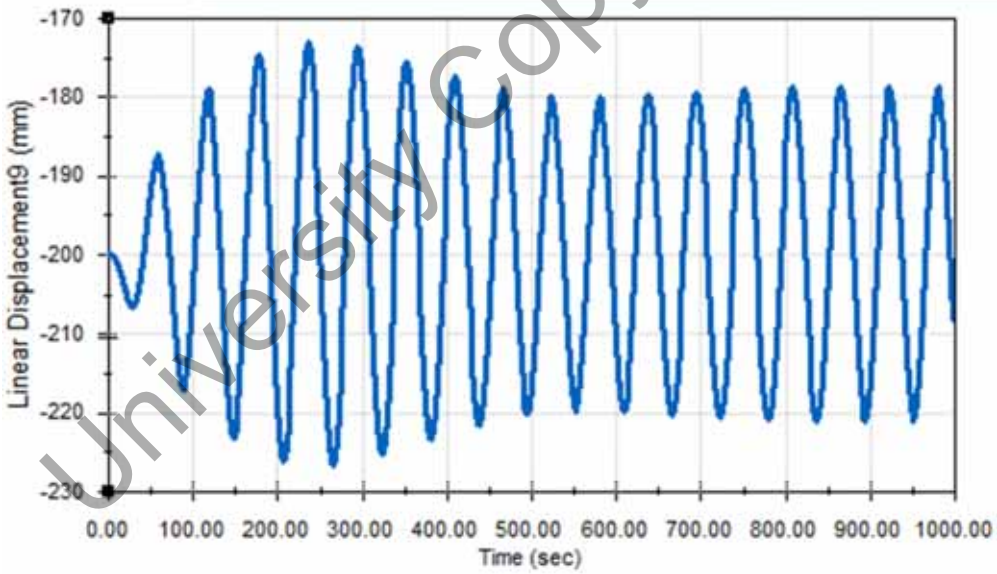
• Vibración forzada en r=1.1 masa lineal.

Si en lugar de partir de un muelle comprimido tenemos una fuerza oscilatoria a r=1.1 que la natural (resonancia) y valor F=0.0050[N] determinar la amplificación.

F(N)	0.005
d_est(mm)	5
d_r1.0(mm)	50
d_r1.9(mm)	1.91
d_r1.1(mm)	21.09
d_r0.9(mm)	23.78
d_r0.1(mm)	5.05

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

Alcanza los 21.09 mm pasando por algo mayor al principio.
Sin damping veríamos el transitorio y no el permanente.



University Copy For Library Use

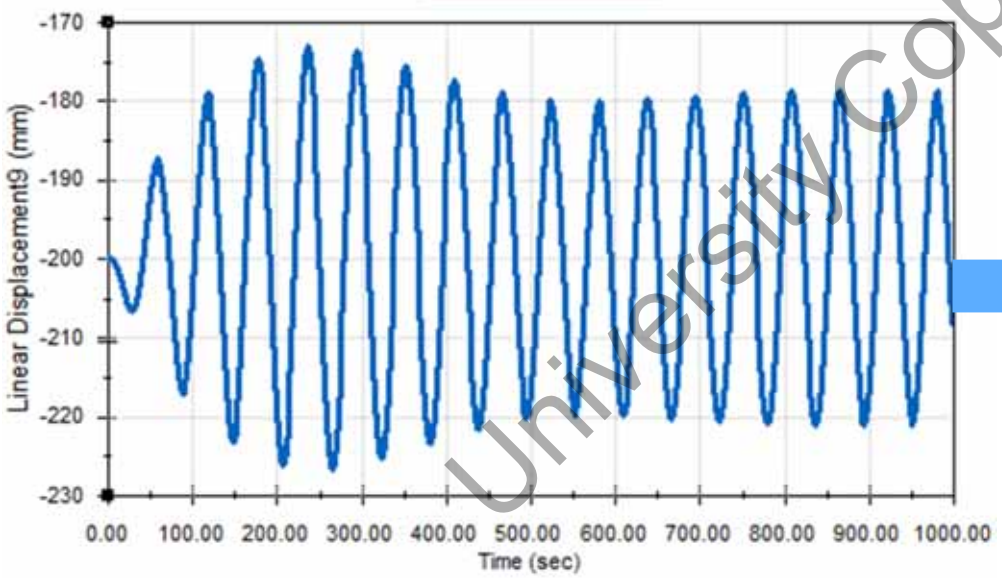
• Vibración forzada en r=1.1 masa lineal con ccr.

Si en lugar de partir de un muelle comprimido tenemos una fuerza oscilatoria a r=1.1 que la natural (resonancia) y damping critico y valor F=0.0050[N] determinar la amplificación.

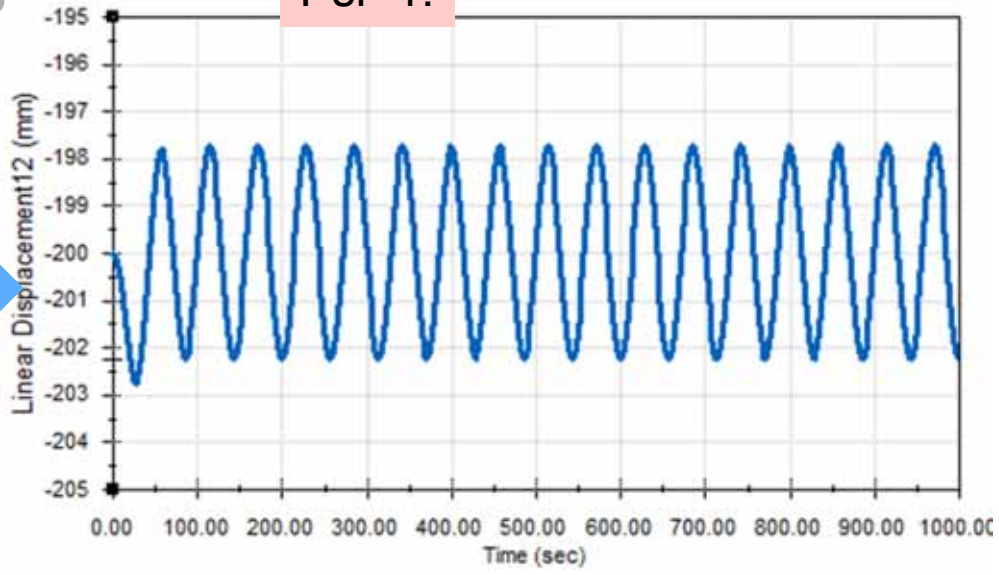
F(N)	0.005		
d_est(mm)	5		
d_r1.0(mm)	50		
d_r1.9(mm)	1.91	d_r1.9_psi1(m	1.08
d_r1.1(mm)	21.09	d_r1.1_psi1(m	2.26
d_r0.9(mm)	23.78	d_r0.9_psi1(m	2.76
d_r0.1(mm)	5.05	d_r0.1_psi1(m	4.95

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

Psi=0.05.



Psi=1.



University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Vibración forzada en r=1.1 masa lineal sin damping.

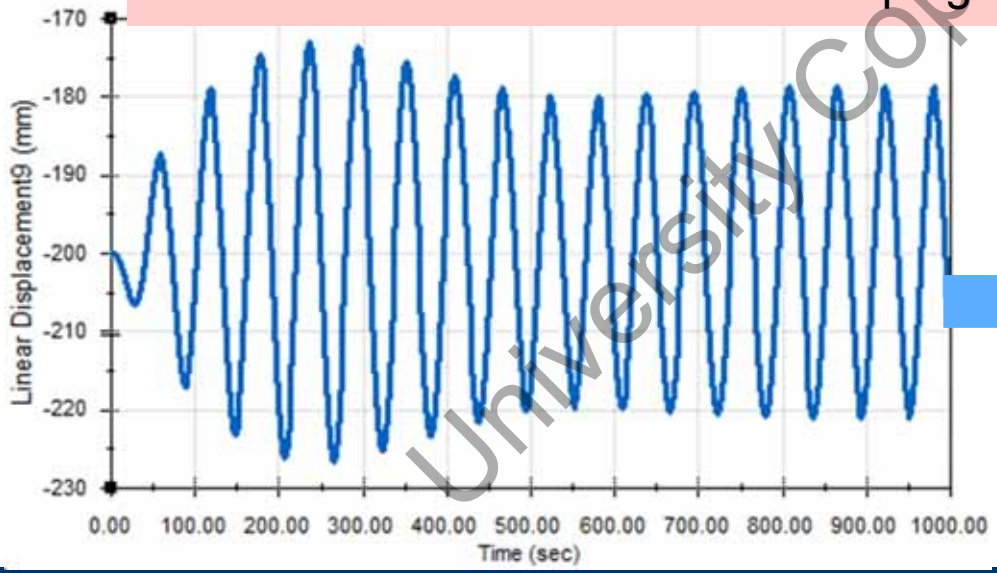
Si en lugar de partir de un muelle comprimido tenemos una fuerza oscilatoria a r=1.1 que la natural (resonancia) y valor F=0.0050[N] determinar la amplificación pero sin damping.

F(N)	0.005		
d_est(mm)	5		
d_r1.0(mm)	50		
d_r1.9(mm)	1.91	d_r1.9_psi0(m	1.92
d_r1.1(mm)	21.09	d_r1.1_psi0(m	23.81
d_r0.9(mm)	23.78	d_r0.9_psi0(m	26.32
d_r0.1(mm)	5.05	d_r0.1_psi0(m	5.05

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

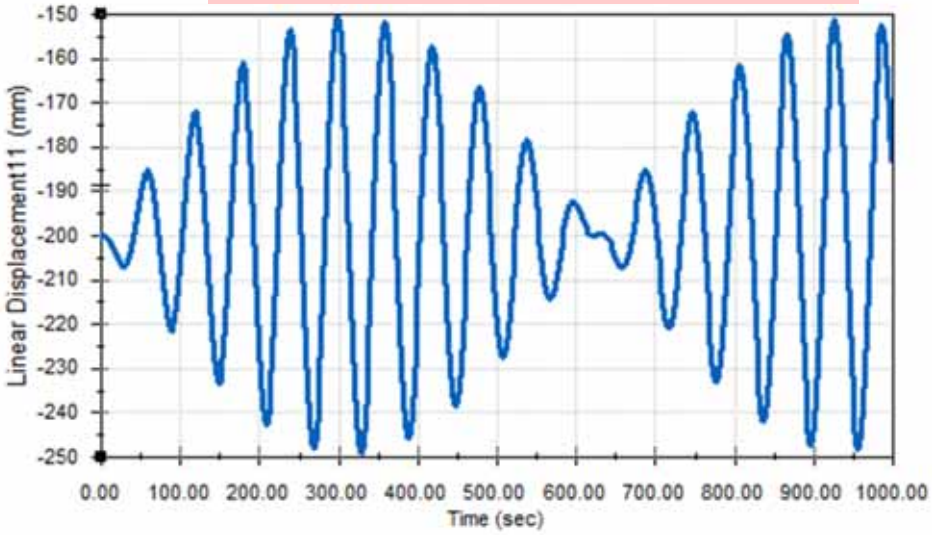
Psi=0.05.

Transitorio + estacionario con damping.



Psi=0.0.

Sólo transitorio sin damping.



University Copy For Library Use

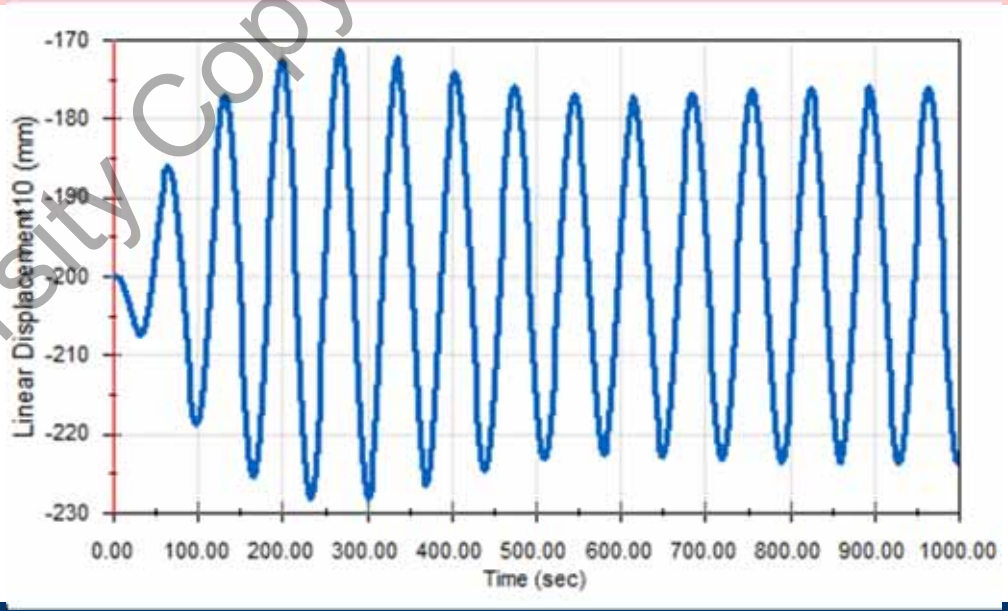
• Vibración forzada en r=0.9 masa lineal.

Si en lugar de partir de un muelle comprimido tenemos una fuerza oscilatoria a r=0.9 que la natural (resonancia) y valor F=0.0050[N] determinar la amplificación.

F(N)	0.005
d_est(mm)	5
d_r1.0(mm)	50
d_r1.9(mm)	1.91
d_r1.1(mm)	21.09
d_r0.9(mm)	23.78
d_r0.1(mm)	5.05

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

Alcanza los 23.78 mm pasando por algo mayor al principio.
Sin damping veríamos el transitorio y no el permanente.



University Copy For Library Use

• Vibración forzada frenando lentamente masa lineal.

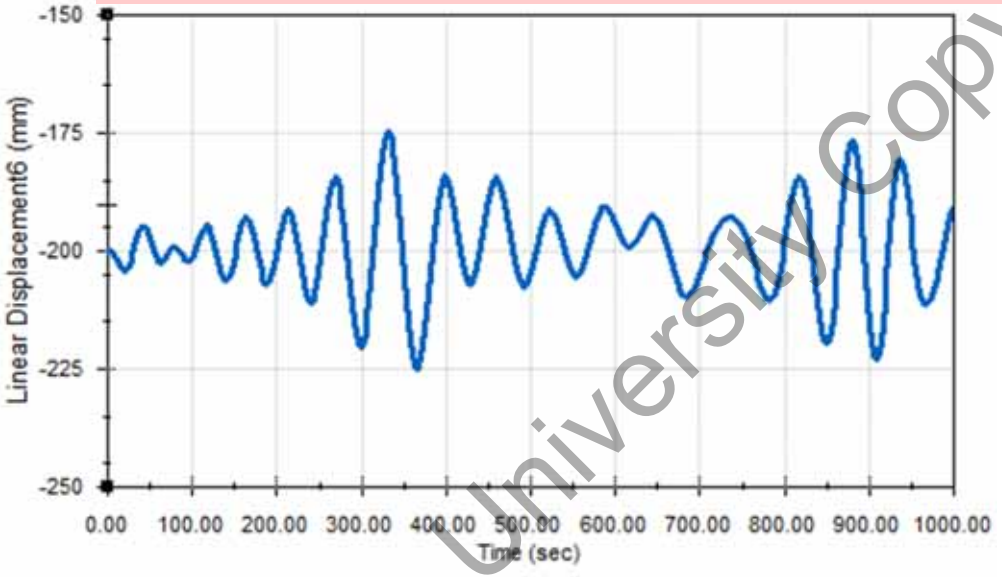
Si la fuerza F=0.0050[N] tiene variación entre 1.9 y 0.1 la frecuencia de resonancia puede ser que no le de tiempo magnificar la resonancia

F(N)	0.005
d_est(mm)	5
d_amp(mm)	50

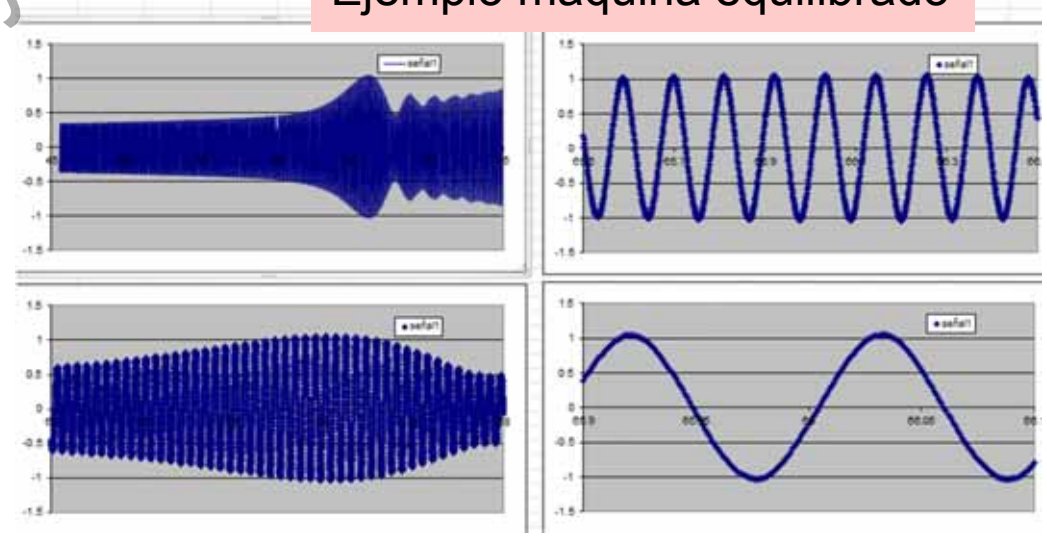
0.005*COS((0.10+0.09-time*0.18/1000)*time-Pi/2)

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

No da tiempo a alcanzar los 50mm de amplificación



Ejemplo máquina equilibrado



University Copy For Library Use

• Vibración forzada frenando lentamente masa lineal.

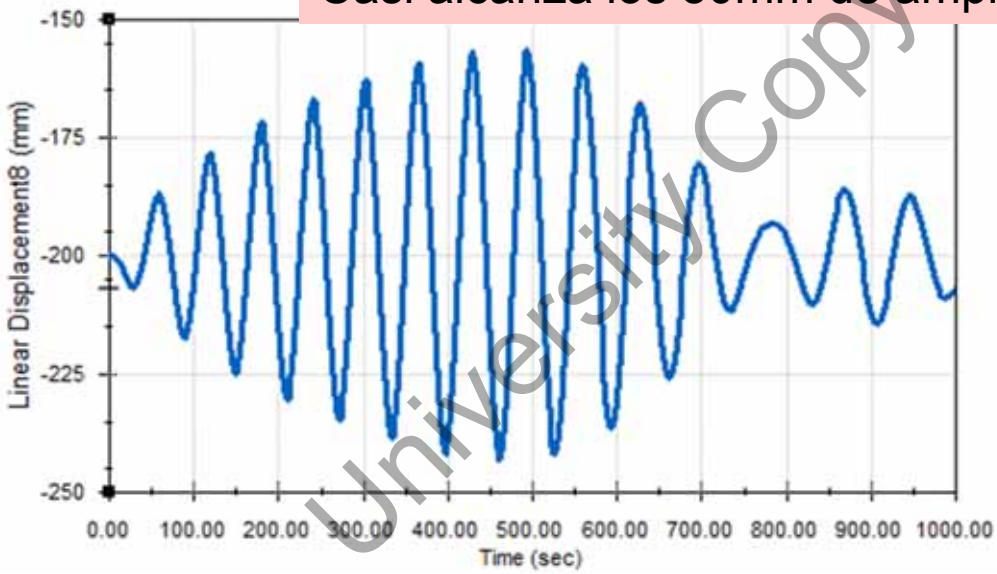
Si la fuerza F=0.0050[N] tiene variación entre 1.1 y 0.9 la frecuencia de resonancia

F(N)	0.005
d_est(mm)	5
d_r1.0(mm)	50
d_r1.9(mm)	1.91
d_r1.1(mm)	21.09
d_r0.9(mm)	23.78
d_r0.1(mm)	5.05
x1[mm]	100

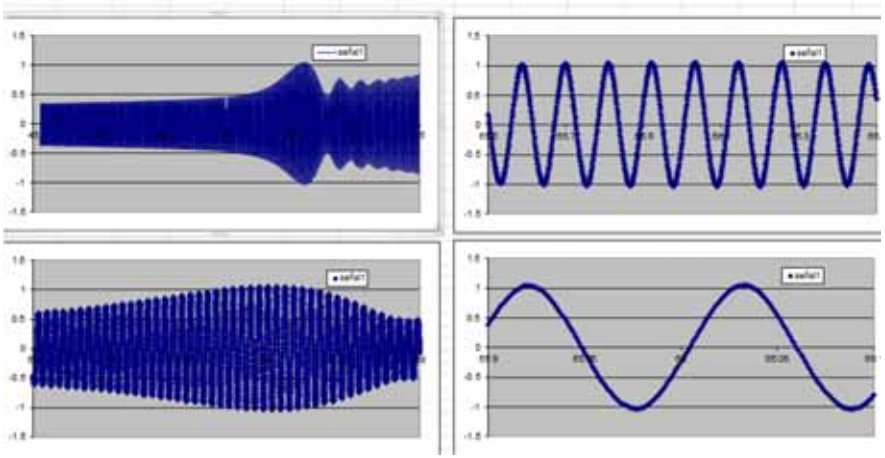
0.005*COS((0.10+0.01-time*0.02/1000)*time-Pi/2)

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

Casi alcanza los 50mm de amplificación



Ejemplo máquina equilibrado



University Copy For Library Use

- Vibración forzada frenando más lentamente masa lineal.

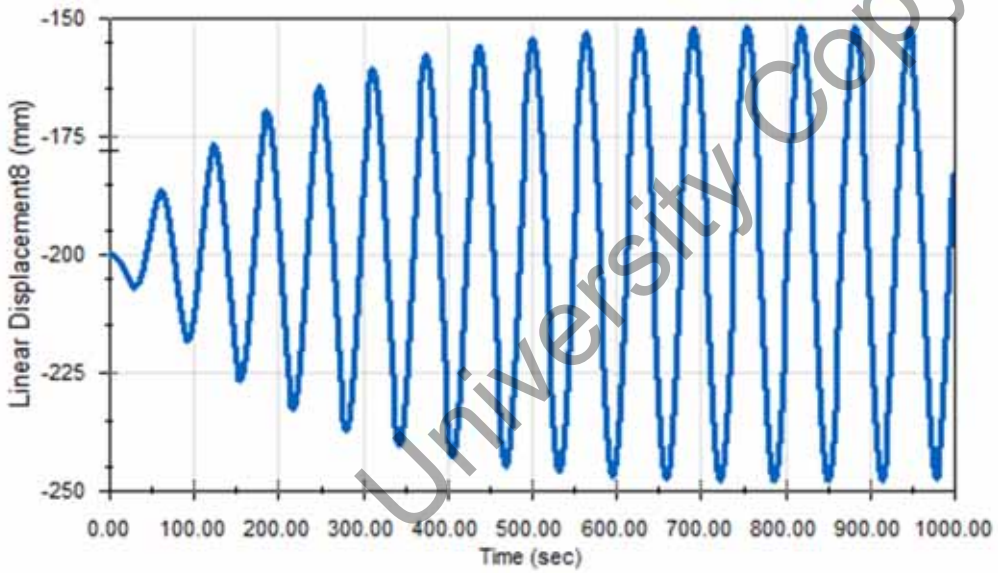
Si la fuerza F=0.0050[N] tiene variación entre 1.01 y 0.99 la frecuencia de resonancia

F(N)	0.005
d_est(mm)	5
d_r1.0(mm)	50
d_r1.9(mm)	1.91
d_r1.1(mm)	21.09
d_r0.9(mm)	23.78
d_r0.1(mm)	5.05
x1[mm]	100

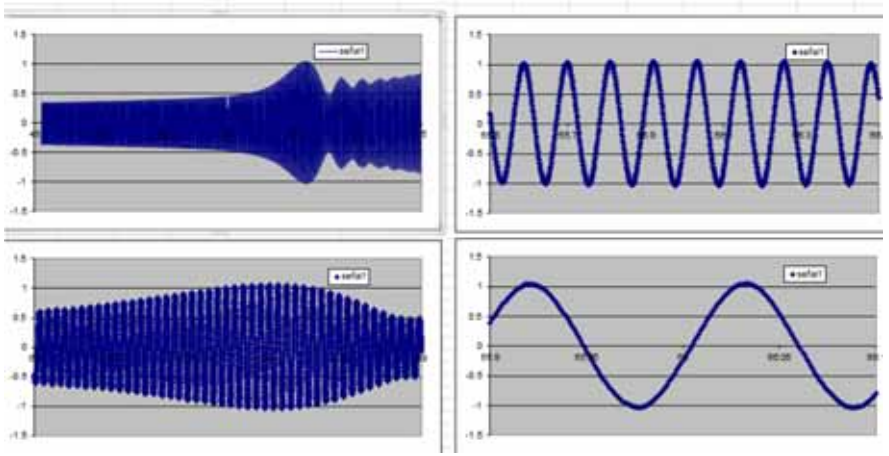
$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

0.005*COS((0.10+0.001-time*0.002/1000)*time-Pi/2)

Suficientemente lento para alcanza los 50mm de amplificación



Ejemplo máquina equilibrado



University Copy For Library Use

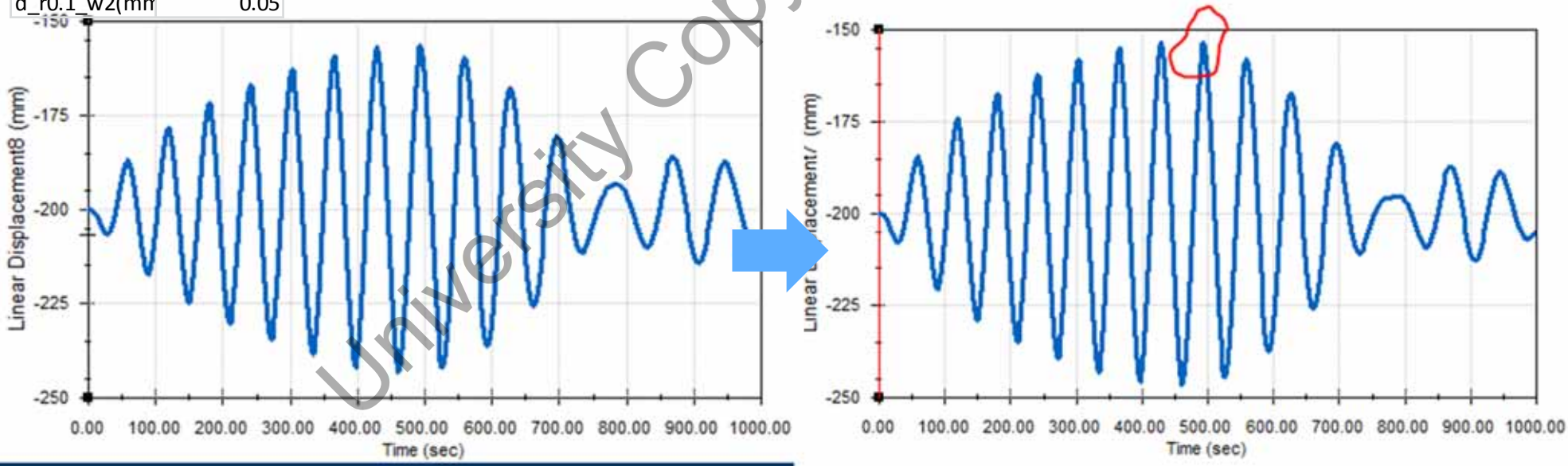
• Vibración forzada frenando lentamente masa lineal.

Si la fuerza es $m\omega^2 r$ de 0.005[N] para la frecuencia de resonancia y variación entre 1.1 y 0.9 la frecuencia de resonancia

F(N)	0.005
d_est(mm)	5
d_r1.0(mm)	50
d_r1.9(mm)	1.91
d_r1.1(mm)	21.09
d_r0.9(mm)	23.78
d_r0.1(mm)	5.05
d_r1.9_w2(mm	6.90
d_r1.1_w2(mm	25.52
d_r0.9_w2(mm	19.26
d_r0.1_w2(mm	0.05

0.5*((0.10+0.01-time*0.02/1000))^2*COS((0.10+0.01-time*0.02/1000)*time-PI/2)

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$



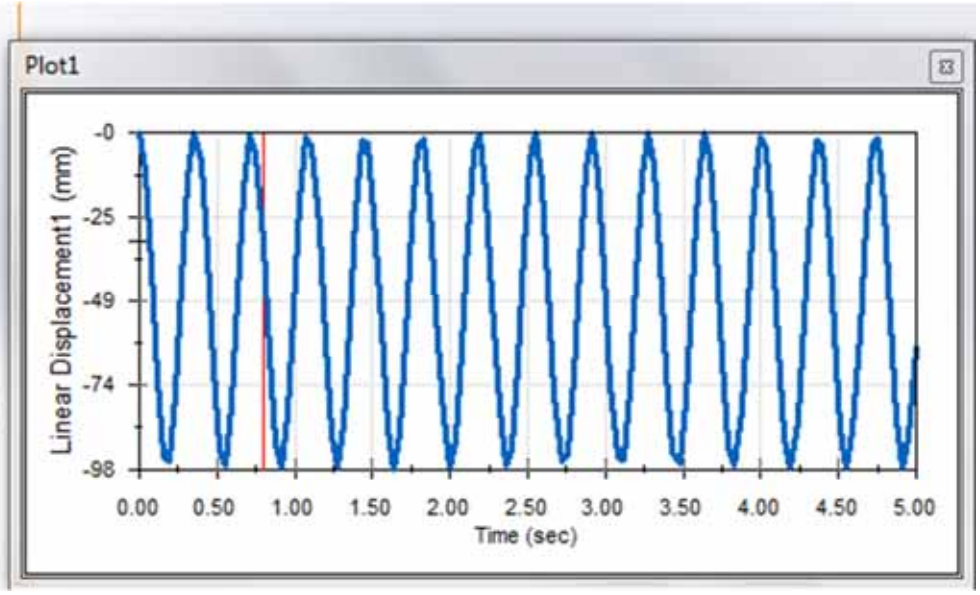
University Copy For Library Use

• Vibración masa rotando.

Tenemos una barra de L=1[m] y masa m=1[kg] que rota respecto a un extremo y en el otro tiene un muelle de k=100[N/m]. Si se parte de reposo con efecto de la gravedad determinar frecuencia, periodo, amplitud, velocidad y aceleración.

barra_rota	
1	m(kg)
100	k(N/m)
17.3205081	w(r/s)
2.75664448	f(Hz)
0.36275987	T(s)
1.08827962	3T(s)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kL^2}{mL^2/3}};$$



University Copy For Library Use

- Vibración masa rotando con 5% damping.

Repetimos el ejercicio pero con un amortiguamiento del 5%.

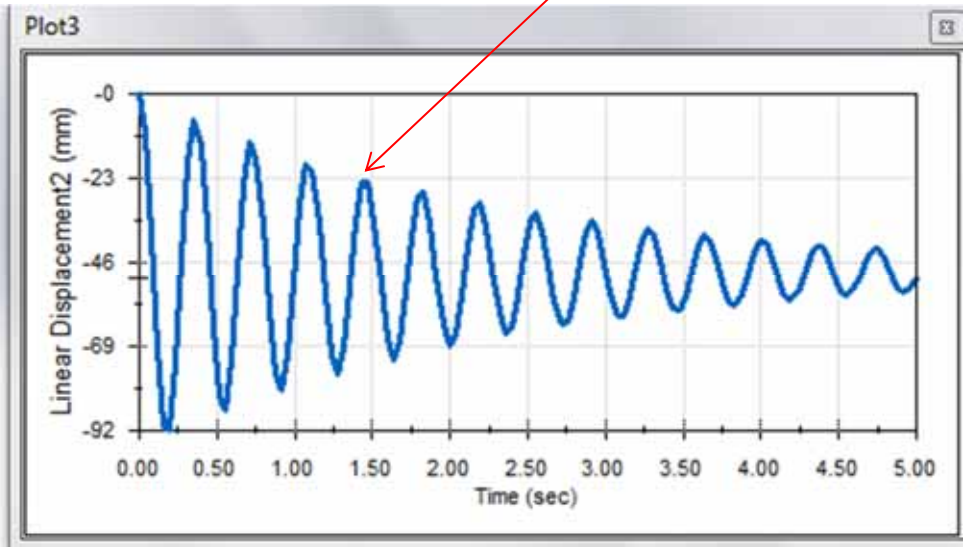
0.57735027	c5%(N/(m/s)
11.5470054	ccr(N/(m/s))

$c_{crit}=2\sqrt{((m/3)k)}$

$$\delta = \ln\frac{\chi_1}{\chi_n} \approx \zeta 2(n-1)\pi$$

$$\chi_n \approx \frac{\chi_1}{e^{\zeta 2(n-1)\pi}}$$

49.025	x1[mm]
26.1542537	x3[mm]
22.8707463	x1-x3[mm]
28.4609543	x5[mm]
20.5640457	x1-x5[mm]



University Copy For Library Use

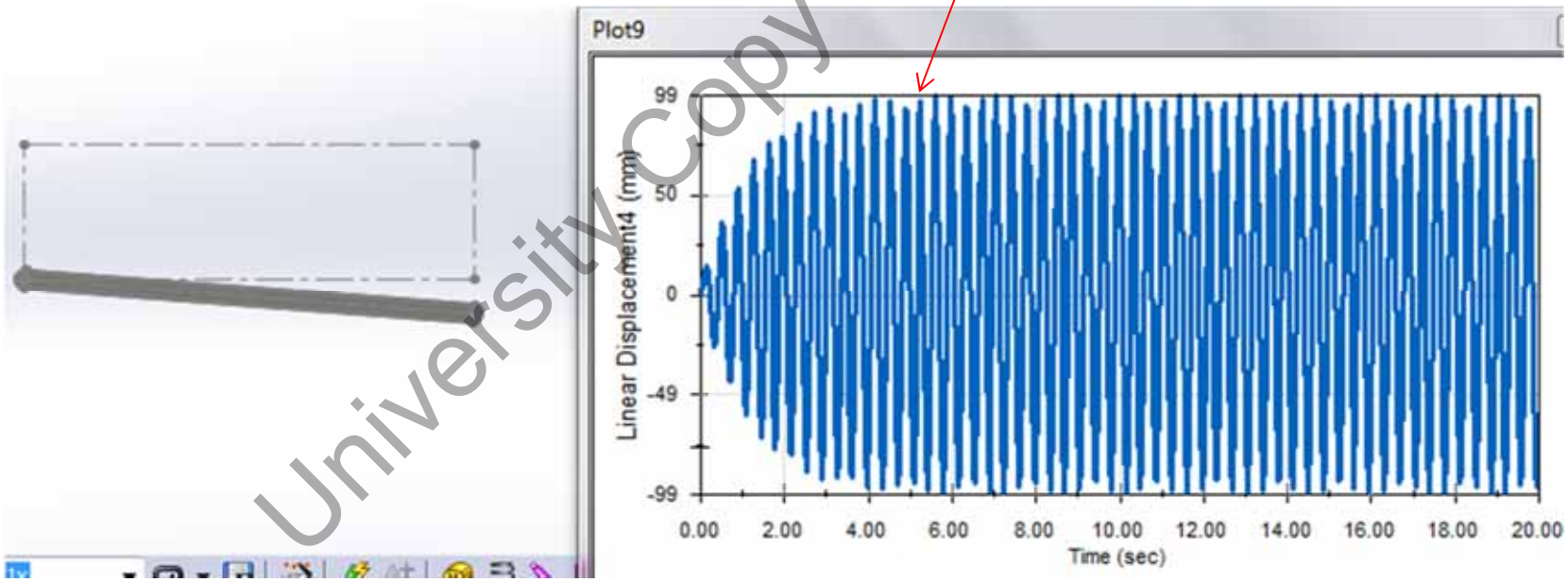
- Vibración forzada masa rotando con 5% damping.

Repetimos el ejercicio pero forzando con 1(N) para ver la señal amplificada en resonancia (r=1).

1	F(N)
10	d_est(mm)
100	d_amp(mm)

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

1	F(N)
10	d_est(mm)
100	d_amp(mm)
3.82	d_r1.9(mm)
42.18	d_r1.1(mm)
47.57	d_r0.9(mm)
10.10	d_r0.1(mm)
3.83	d_r1.9_psi0(r



University Copy For Library Use

- Vibración forzada a ratio ????????.

Repetimos el ejercicio pero forzando con 1(N) para ver la señal amplificada en resonancia (r=1).

1	F(N)
10	d_est(mm)
100	d_amp(mm)

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

1	F(N)
10	d_est(mm)
100	d_amp(mm)
3.82	d_r1.9(mm)
42.18	d_r1.1(mm)
47.57	d_r0.9(mm)
10.10	d_r0.1(mm)
3.83	d_r1.9_psi0(r

University Copy For Library Use

• Vibración forzada velocidad rampa lenta.

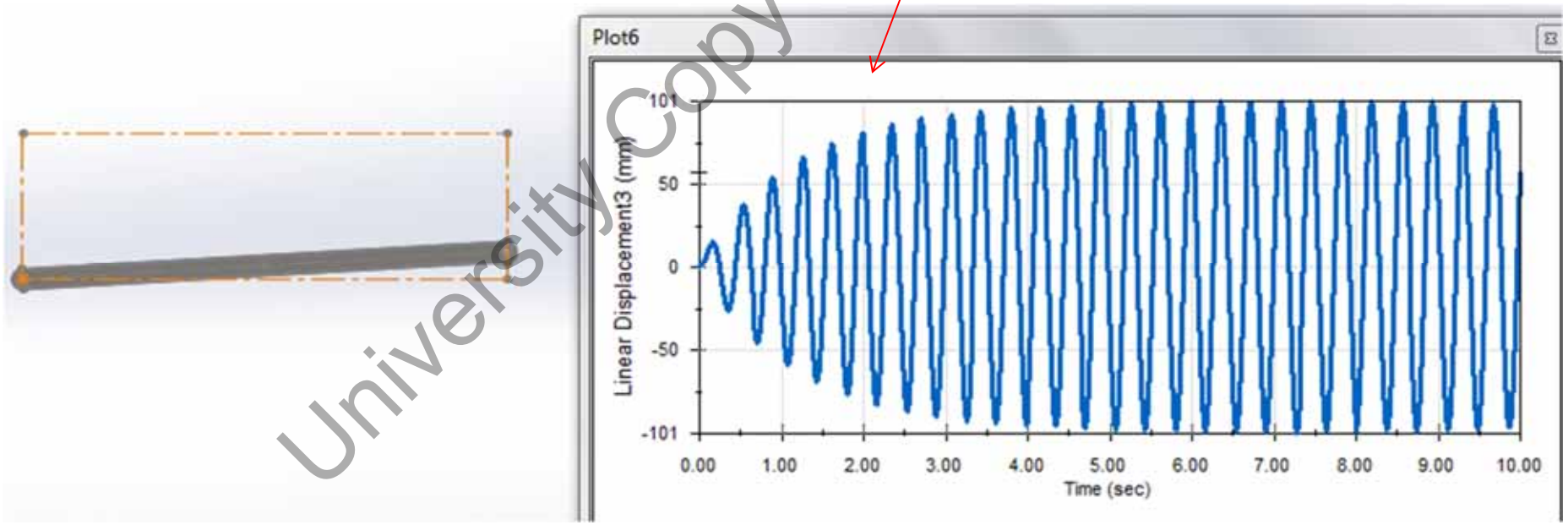
Repetimos el ejercicio pero con la fuerza entre 1.1 y 0.9 la frecuencia de resonancia

1	F(N)
10	d_est(mm)
100	d_amp(mm)

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

1*COS((17.32+0.1732-2*0.1732*time/10)*time*Pi/2)

1	F(N)
10	d_est(mm)
100	d_amp(mm)
3.82	d_r1.9(mm)
42.18	d_r1.1(mm)
47.57	d_r0.9(mm)
10.10	d_r0.1(mm)
3.83	d_r1.9_psi0(r



University Copy For Library Use

• Vibración forzada velocidad rampa rápida.

Repetimos el ejercicio pero con la fuerza entre 1.9 y 0.1 la frecuencia de resonancia

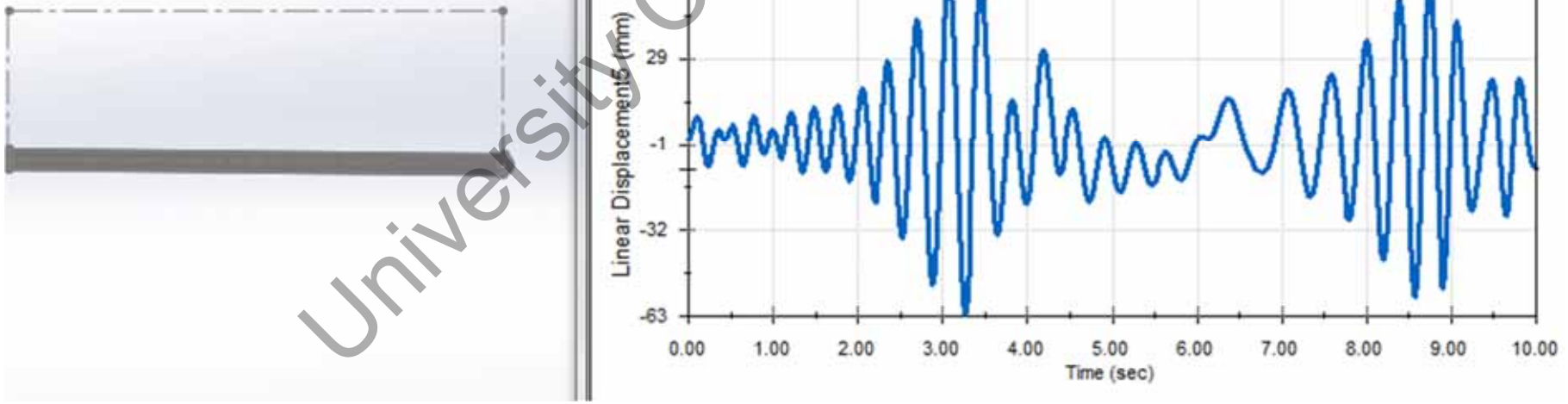
1	F(N)
10	d_est(mm)
100	d_amp(mm)

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

1*COS((17.32+0.9*17.32-1.8*17.32*time/10)*time-PI/2)

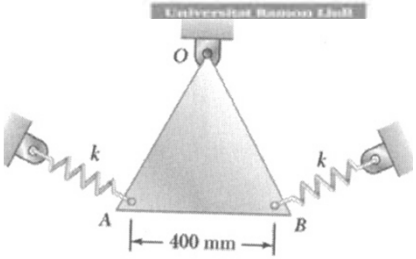
1	F(N)
10	d_est(mm)
100	d_amp(mm)
3.82	d_r1.9(mm)
42.18	d_r1.1(mm)
47.57	d_r0.9(mm)
10.10	d_r0.1(mm)
3.83	d_r1.9_psi0(r

No da tiempo a alcanzar los 100mm de amplificación



University Copy For Library Use

- Beer 19_056.



El triángulo equilátero de masa 10[kg] y lado 0.4[m] está unido a dos muelles de k=200[N/m]. Hallar la frecuencia para pequeños ángulos.

El centro de masas está a una distancia de O: $b=2/3*(a\sqrt{3}/2)=a/\sqrt{3}=230.94$

La inercia respecto a O es $I_O=5ma^2/12=0.666[kg*m^2]$

Respecto a G: $I_G=ma^2/12=0.1333[kg*m^2]$

Para un ángulo pequeño θ ($\sin\theta\approx\theta$, $\cos\theta\approx1-\theta^2/2$) se tiene por equilibrio de momentos respecto O:

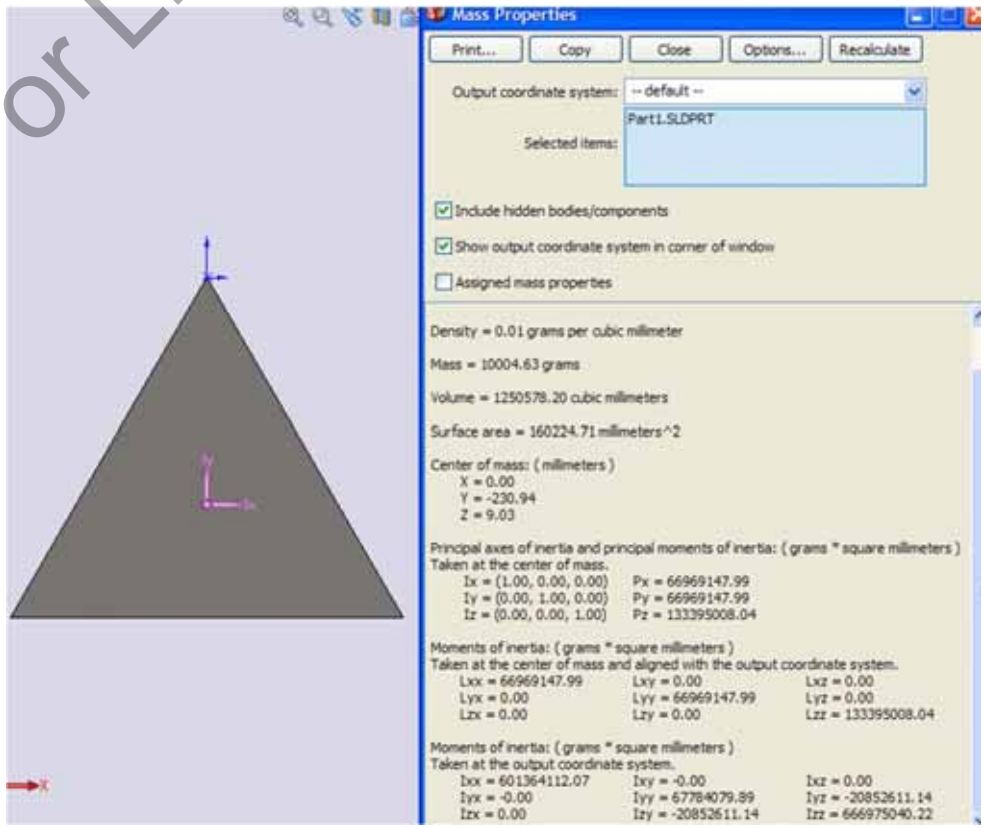
$-2ka^2\theta-mgb\theta=I_G\theta''+mb^2\theta''=I_O\theta''$ ⇨

$(2ka^2-mgb)\theta+ I_O\theta''=0$

$\omega=\sqrt{(2ka^2+mgb)/I_o}=\sqrt{(2ka^2+mga/\sqrt{3})/ 5ma^2/12}=$ 11.40[rad/s] ⇨

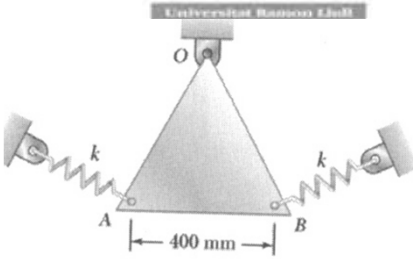
$T=2\pi/\omega=0.55[s]$

$f=\omega/2\pi=1.81[Hz]$



Sol: (a) f=1.815[Hz]

University Copy For Library Use



- Beer 19_056 con CosmosMotion.

Si simulamos con CosmosMotion podemos comprobar la frecuencia.

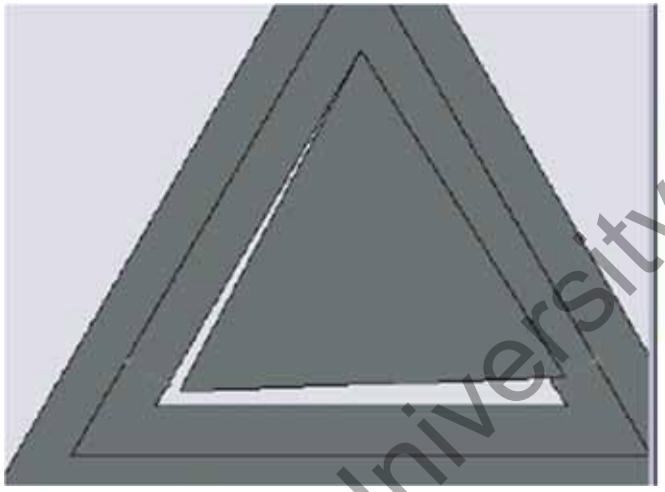
$\omega=\sqrt{(2ka^2+mgb)/I_o}=\sqrt{(2ka^2+mga/\sqrt{3})/ 5ma^2/12}=$

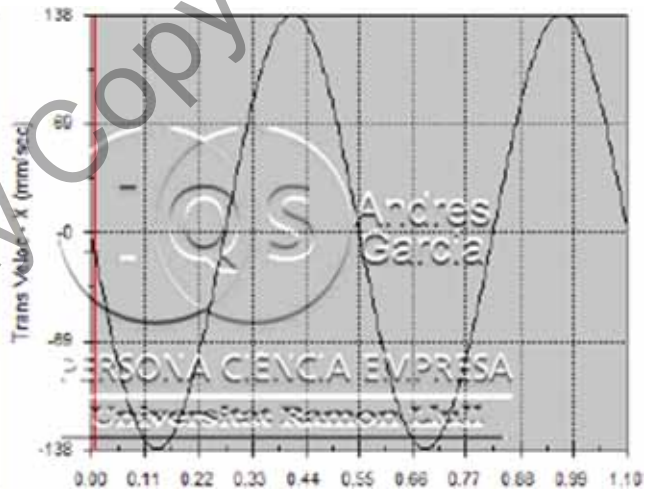
11.40[rad/s] ⇨

$T=2\pi/\omega=0.55$[s]

$f=\omega/2\pi=1.81$[Hz]

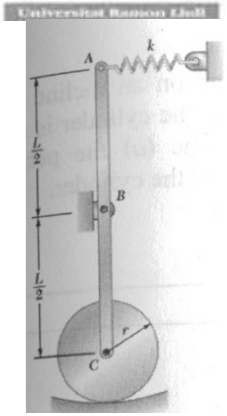
2T=1.10[s] como en teoría.





University Copy For Library Use

- Ejercicio casa Beer 19_077.



Un disco de masa "m" y radio "r" puede rodar sin deslizar. El disco está unido a barra ABC de masa despreciable. El punto A se une a muelle de constante "k". Determinar la frecuencia de oscilación para pequeños ángulos.

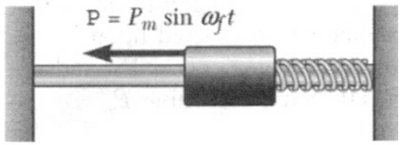
Vamos a resolver este problema usando método de energías.

La energía potencial es función del ángulo θ ($\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1-\theta^2/2$) :

Sol: (a) $f=1/2\pi * \sqrt{(2k/3m + 4g/3L)}$

University Copy For Library Use

- Beer 19_099.



Un colar de 4[kg] se mueve junto a muelle de k=450[N/m] con una excitación externa P=13sin(ω_ft). Determinar la amplitud del movimiento si (a) ω_f=5[rad/s], (b) ω_f=10[rad/s].

$$Amplitud = \frac{P_o / k}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Amplitud=(13/450)/(1-ω_f^2/(450/4))

ω_n=√450/4=10.607[rad/s]

P_o/k=0.02889[m]

Si ω_f=5,⇨ ω_n>ω_f ⇨ en fase, x_m=(13/450)/(1-5^2/(450/4))=0.03714[m]

Si ω_f=10,⇨ ω_n>ω_f ⇨ en fase, xm=(13/450)/(1-10^2/(450/4))=0.2598[m]

Sol: (a) x_m=37.14[mm] (b) x_m=259.8[mm]

University Copy For Library Use

• Ejercicio Menacho.

Una barra de masa m=1[kg] y longitud 0.5[m] se sujeta en A a 0.10[m] de extremo izquierdo y B a 0.10[m] de extremo derecho por dos muelles de k=10[N/mm] y se deja caer. Determinar como oscila esta barra.

Posición estática: $mg=k*x_B \Rightarrow x_A=x_B=mg/(2k)=0.4902[mm] \Rightarrow$

$x_A=x_B$ oscila con 0.9805[mm]

Para dinámica consideramos

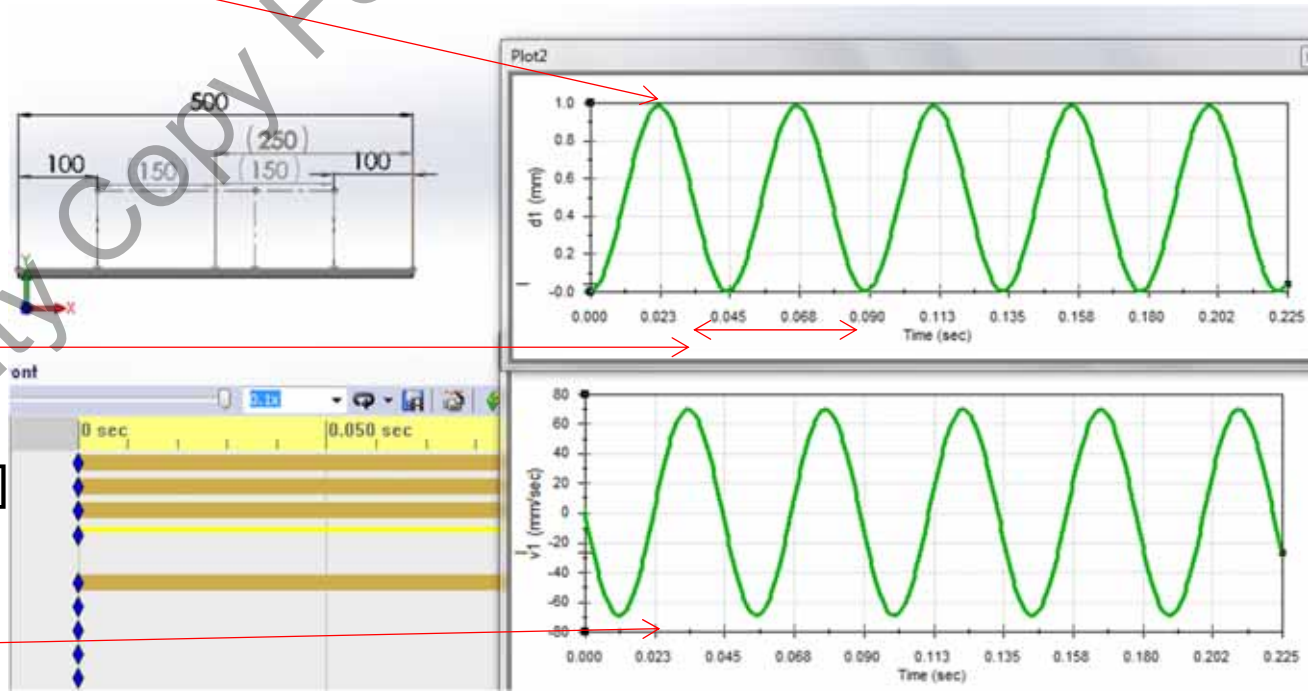
$x_G=x_A=x_B$

$\Rightarrow$

$\omega=\sqrt{(k*2)/(m)}=141.4[rad/s]$

$T=0.04443[s]$

$v_{2max}=0.4902*44.72= 69.33[mm/s]$



University Copy For Library Use

• Ejercicio Menacho.

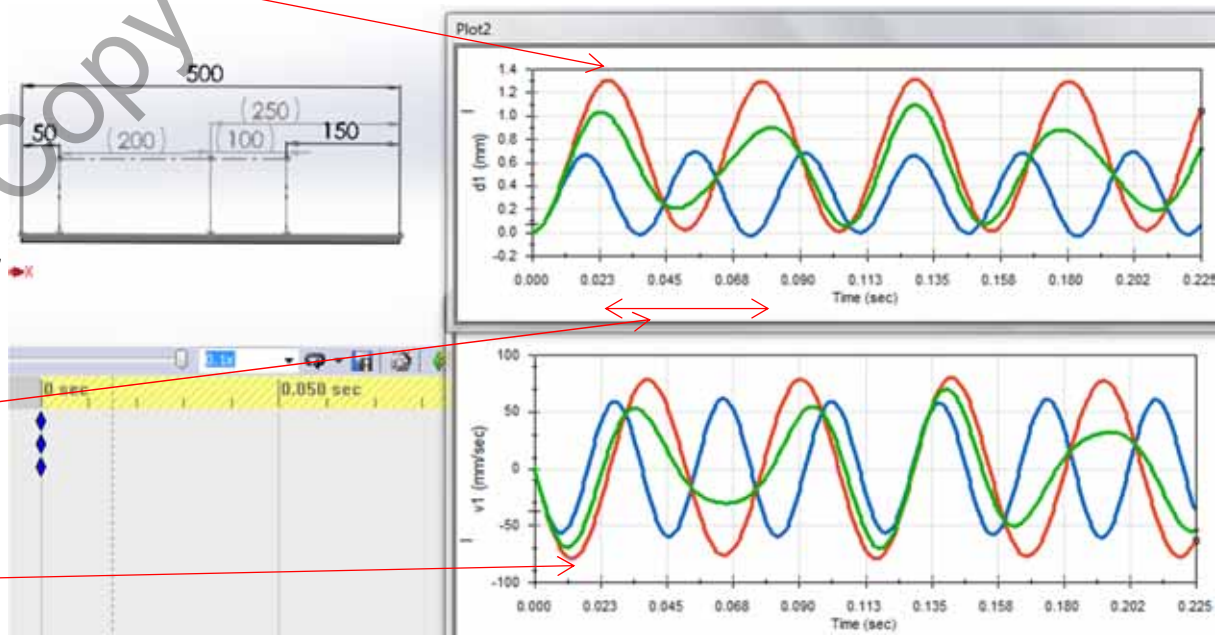
Una barra de masa m=1[kg] y longitud 0.5[m] se sujeta en A a 0.05[m] de extremo izquierdo y B a 0.15[m] de extremo derecho por dos muelles de k=10[N/mm] y se deja caer. Determinar como oscila esta barra.

Posición estática: $mg*0.2=k*x_B*0.3 \Rightarrow x_B=mg2/(3k)=0.653[mm] \Rightarrow$
$x_A=(mg-kx_B)/k=x_B/2=0.326[mm]$
x_A oscila con 0.652[mm] y x_B con 1.304[mm]

Para dinámica consideramos
$x_G=2/3x_B+1/3x_A=5/6x_B$
y ángulo girado $\theta=(x_B-x_A)/0.3$

$kx_A*0.1-kx_B*0.2=-k*0.1*0.3\theta=mL^2/12\alpha$
$\Rightarrow$
$\omega=\sqrt{(k*0.1*0.3)/(mL^2/12)}=120[rad/s]$
$T=0.05236[s]$

$v_{Bmax}=0.653*120=78.44[mm/s]$



University Copy For Library Use

• Ejercicio Menacho (PENDIENTE EC. DIFERENCIALES).

El análisis dinámico sería:

-k*xA – k*xB + mg = m xG'' siendo xG = (xA+2*xB)/3

-k*xA*0.2 + k*xB*0.1 = IG * (xA''+xB'')/0.3

$$\begin{cases} -k\cdot x_A - k\cdot x_B + mg = m\cdot(x_A'' + 2x_B'')/3 \\ -k\cdot x_A\,0.2 + k\cdot x_B 0.1 = 10I_G\cdot(x_A'' + x_B'')/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{k}{m}\cdot x_A - \frac{k}{m}\cdot x_B + g = (x_A'' + 2x_B'')/3 \\ -k\cdot x_A\cdot\frac{0.2}{10I_G} + k\cdot x_B\frac{0.1}{10I_G} = (x_A'' + x_B'')/3 \end{cases}$$

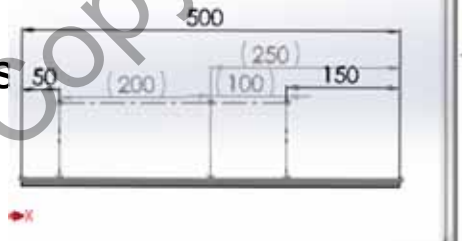
Restando las ecuaciones tenemos:

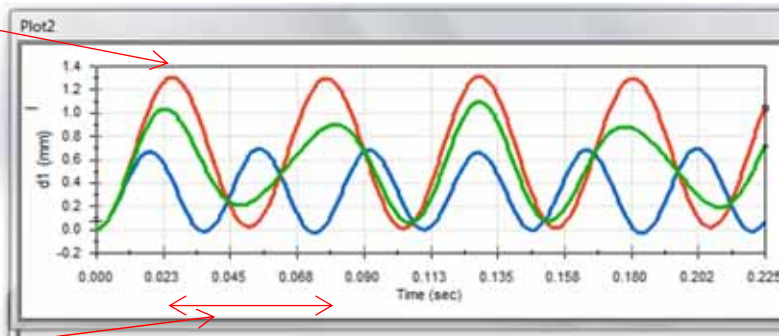
$$\left(\frac{0.02}{I_G} - \frac{1}{m}\right)\cdot k\cdot x_A - \left(\frac{0.01}{I_G} + \frac{1}{m}\right)\cdot k\cdot x_B + g = x_B''/3 \quad [1]$$

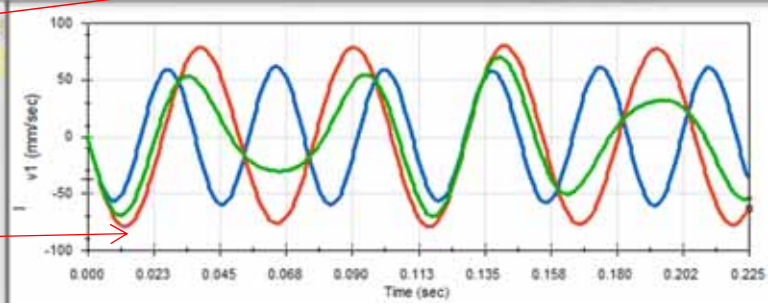
Y multiplicando la segunda por 2 y res

$$\left(\frac{0.04}{I_G} - \frac{1}{m}\right)\cdot k\cdot x_A - \left(\frac{0.02}{I_G} + \frac{1}{m}\right)\cdot k\cdot x_B + g = -x_A''/3 \quad [2]$$

Las ecuaciones [1] y [2] forman un sistema de ecuaciones diferenciales que puede resolverse.







University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Ejercicios de vibraciones.

University Copy For Library Use

S38t.- Control Dinámica.

University Copy For Library Use

Mejora 1314 ...

- Repaso sesión anterior.

➢ Teoría y ejercicios de oscilaciones libres y forzadas.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

Nombre y apellidos: Fecha: 09.01.2014

La barra AB de longitud 5[m] y masa 1200[kg] sin efecto de gravedad se empuja desde A para mantener una velocidad constante v_{Ay}=-3[ms]. Calcular para el inicio de la caída en que A está en y=4[m] en vertical:

1a 2p. Fuerza horizontal en A F_{AHX}=_____[N], F_{AHY}=_____[N].

1b 1p. Fuerza horizontal en B F_{BHY}=_____[N].

1c 1p. Velocidad angular de la barra. ω_{AB}=_____[rad/s].

1d 1p. Aceleración angular de la barra. α_{AB}=_____[rad/s^2].

Recalcular cuando ha llegado A a la cota y=0 (B x=5)

1a 2p. Fuerza horizontal en A

F_{AHX}=_____[N], F_{AHY}=_____[N].

1b 1p. Fuerza horizontal en B

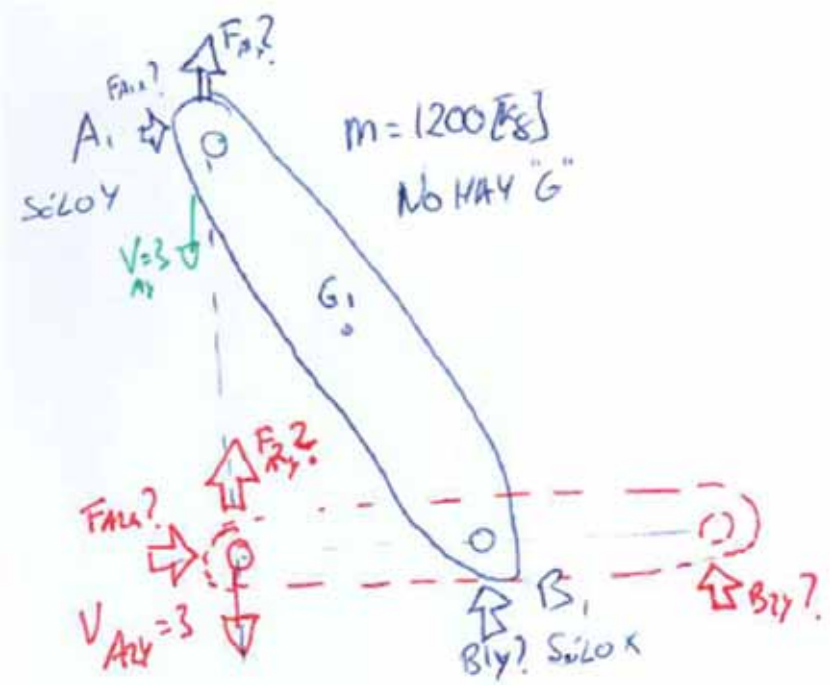
F_{BHY}=_____[N].

1c 1p. Velocidad angular de la barra.

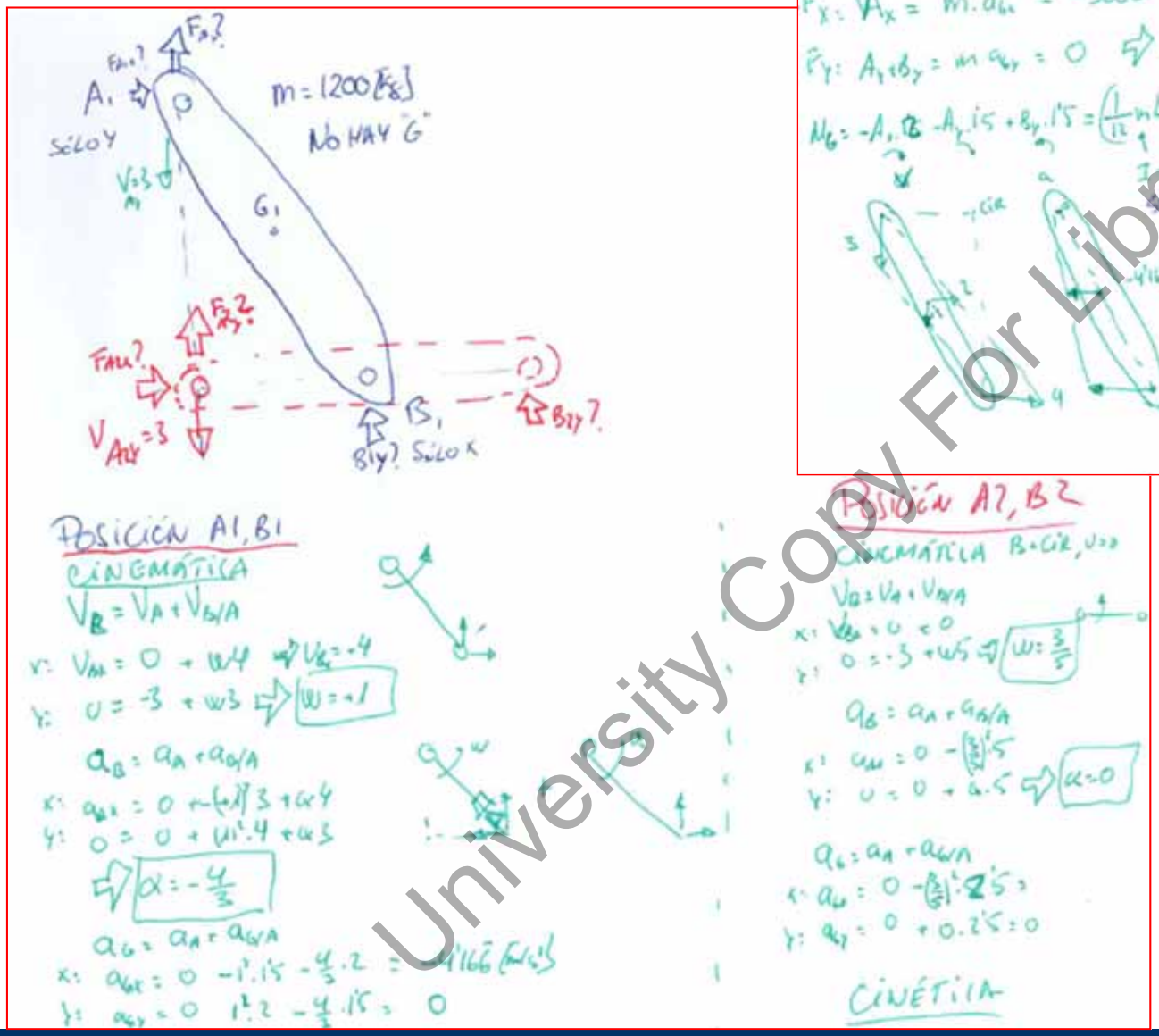
ω_{AB}=_____[rad/s].

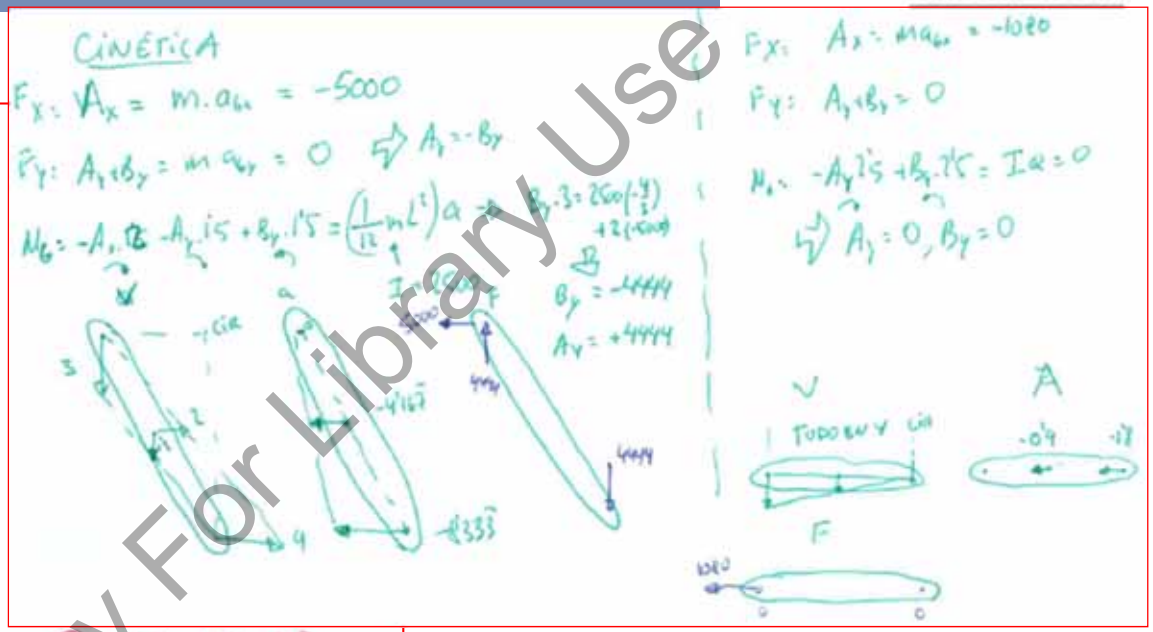
1d 1p. Aceleración angular de la barra.

α_{AB}=_____[rad/s^2].



University Copy For Library Use





University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 10.01.2013

La barra AB de longitud 5[m] y masa 120[kg] se deja caer por efecto de la gravedad. Calcular para el inicio de la caída en que A está en y=4[m] en vertical:

1a 2p. Fuerza horizontal en A F_{AHX}=_____[N].

1b 2p. Fuerza horizontal en B F_{BHY}=_____[N].

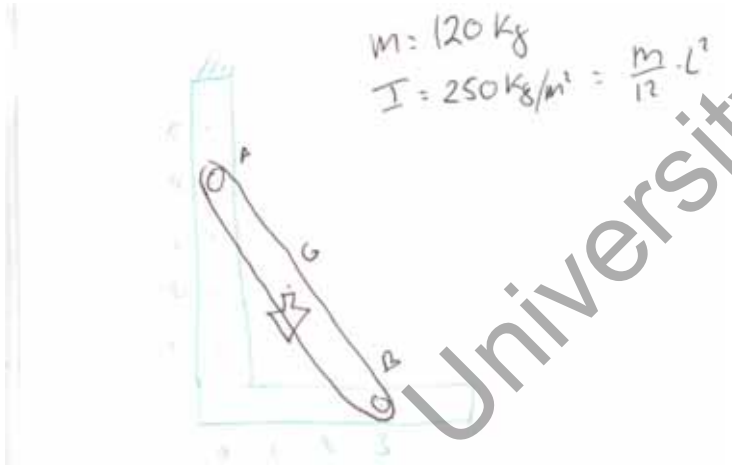
Calcular por energías cuando ha llegado A a la cota y=0 (B x=5)

1c 1p. Velocidad angular de la barra. ω_{AB}=_____[rad/s].

1d 1p. Aceleración angular de la barra. α_{AB}=_____[rad/s^2].

1e 2p. Fuerza horizontal en A F_{AHX}=_____[N].

1f 2p. Fuerza horizontal en B F_{BHY}=_____[N].



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 10.01.2013

La barra AB de longitud 5[m] y masa 120[kg] se deja caer por efecto de la gravedad. Calcular para el inicio de la caída en que A está en y=4[m] en vertical:

1a 2p. Fuerza horizontal en A F_{AX}=_423.7_[N]. $a_G=(2\alpha,-3\alpha+1.5\alpha)$, $F_{AX}=m\alpha 2$, $F_{BY}=mg-m\alpha 1.5$, $-F_{AX}2+F_{BY}1.5=250\alpha$.

1b 2p. Fuerza vertical en B F_{BY}=_858.8_[N]. $\alpha=1.764[r/s2]=101.1[°/s2]$

Calcular por energías cuando ha llegado A a la cota y=0 (B x=5) $v_G=(0,-2.5\omega)$, $mg2=0.5m\omega^2 2.5^2+0.5I_G\omega^2$

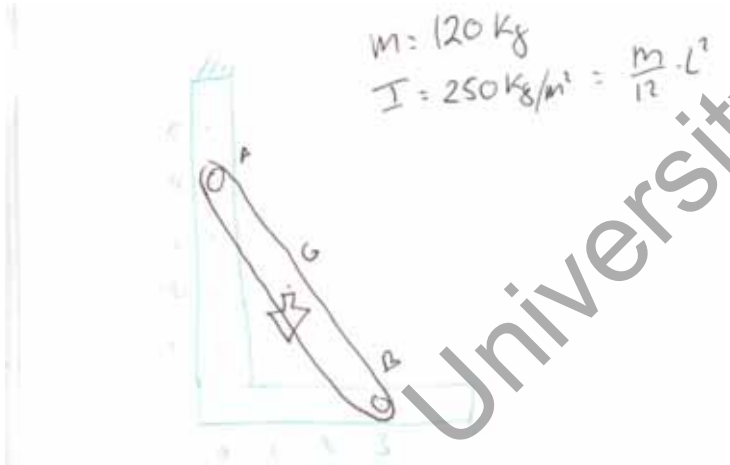
1c 1p. Velocidad angular de la barra. ω_{AB}=_2.169_[rad/s]. $\omega=2.169[r/s]=124.3[°/s]$

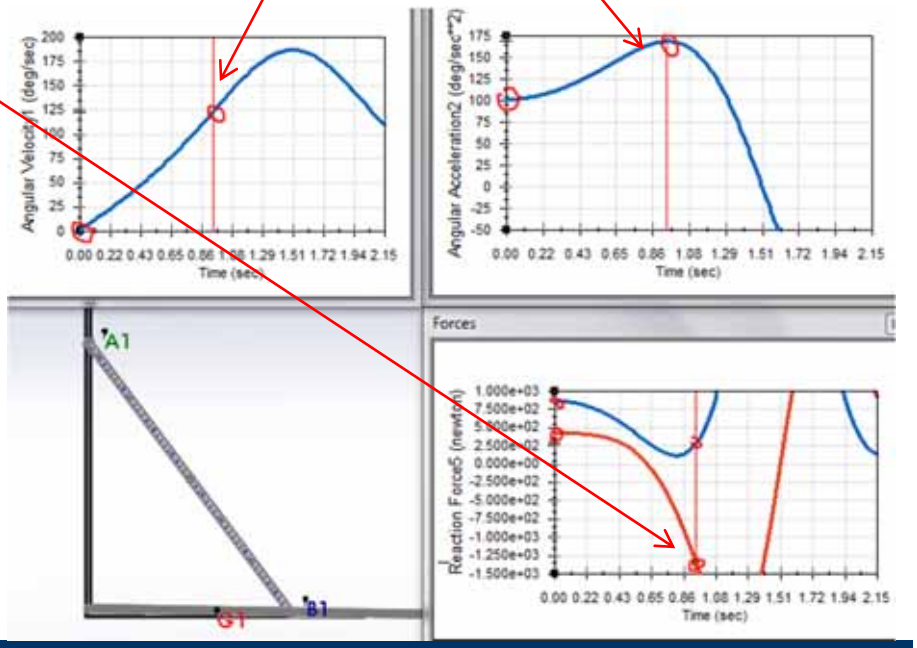
$a_{GX}=-2.5\omega^2$, $a_{GY}=-2.5\alpha$, $F_{AX}=-m\omega^2 2.5$, $F_{BY}=mg-m\alpha 2.5$, $+F_{BY}2.5=250\alpha \Rightarrow \alpha=0.3g$

1d 1p. Aceleración angular de la barra. α_{AB}=_2.941_[rad/s^2]. $\alpha=2.941[r/s2]=168.5[°/s2]$

1e 2p. Fuerza horizontal en A F_{AX}=_-1411.36_[N].

1f 2p. Fuerza vertical en B F_{BY}=_294.1_[N].

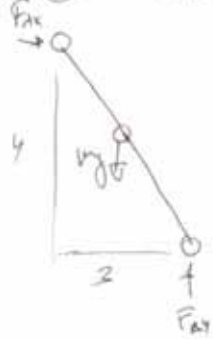




University Copy For Library Use

IQS
PERSONA CIENCIA EMPRESA
Universitat Ramon Llull

(1a) (1b) inicio $\omega = 0$



$a_B = a_A + a_{B/A}$

x: $a_{Bx} = 0 + \alpha 4$

y: $0 = a_{By} + \alpha 3 \Rightarrow a_{By} = -3\alpha$

$a_G = a_A + a_{G/A}$

x: $a_{Gx} = 0 + \alpha 1 = 2\alpha$

y: $a_{Gy} = -3\alpha + \alpha 1'5 = -1'5\alpha$

ΣF_x: $F_{Ax} = 2m\alpha$

ΣF_y: $F_{Ay} - mg = -1'5m\alpha \Rightarrow F_{Ay} = -1'5m\alpha + mg$

ΣM_G: $-F_{Ax} \cdot 2 + F_{Ay} \cdot 1'5 = I_G \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 120 \cdot 9'805}{250 + 480 + 1'5 \cdot 1'5 \cdot 120} = 1765$

$\Rightarrow \begin{cases} F_{Ax} = 2 \cdot 120 \cdot 1'765 = 423'6\,[N] = F_{Ax} & 1a \\ F_{Ay} = -1'5 \cdot 120 \cdot 1'765 + 120 \cdot 9'805 = 858'8\,[N] = F_{Ay} & 1b \end{cases}$

$\omega_f = \frac{165 \cdot 180}{\pi} = 1011\,[°/s]$

(1c) INICIO $\omega = 2$ $\alpha =$; ACTUAL ω ? α ; POSTERIOR v_{MAX}?

ACTUAL HORIZONTAL

$V_B = V_A + V_{B/A}$

x: $V_{Bx} = 0 + \omega 5$

y: $0 = V_{Ay} + \omega 5 \Rightarrow V_{Ay} = -\omega 5$

$V_G = V_A + V_{G/A}$

x: $V_{Gx} = 0 + 0 = 0$

y: $V_{Gy} = -\omega 5 + \omega 2'5 = -2'5\omega$

ENERGÍAS: $h = 2\,[m]$

$mgh = \frac{1}{2} m (2'5\omega)^2 + \frac{1}{2} I_G \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4g}{(2'5^2 + \frac{5^2}{12})}} = 2'169\,[rad/s]$ ω (1c)

$\omega = 2'169 \frac{180}{\pi} = 124'3\,[°/s]$

FUERZAS PRIMERO a_G

$a_B = a_A + a_{B/A}$

x: $a_{Bx} = 0 + -\omega^2 \cdot 5$

y: $0 = a_{By} + \alpha 5 \Rightarrow a_{By} = -\alpha 5$

$a_G = a_A + a_{G/A}$

x: $a_{Gx} = 0 - \omega^2 \cdot 2'5$

y: $a_{Gy} = -\alpha 5 + \alpha 2'5 = -2'5\alpha$

ΣF_x: $F_{Ax} = -m\omega^2 2'5 = -120 \cdot 2'169^2 \cdot 2'5 = -1411'3\,[N] = F_{Ax}$ (1e)

ΣF_y: $F_{Ay} - mg = -m 2'5\alpha \Rightarrow F_{Ay} = m(g - 2'5\alpha)$

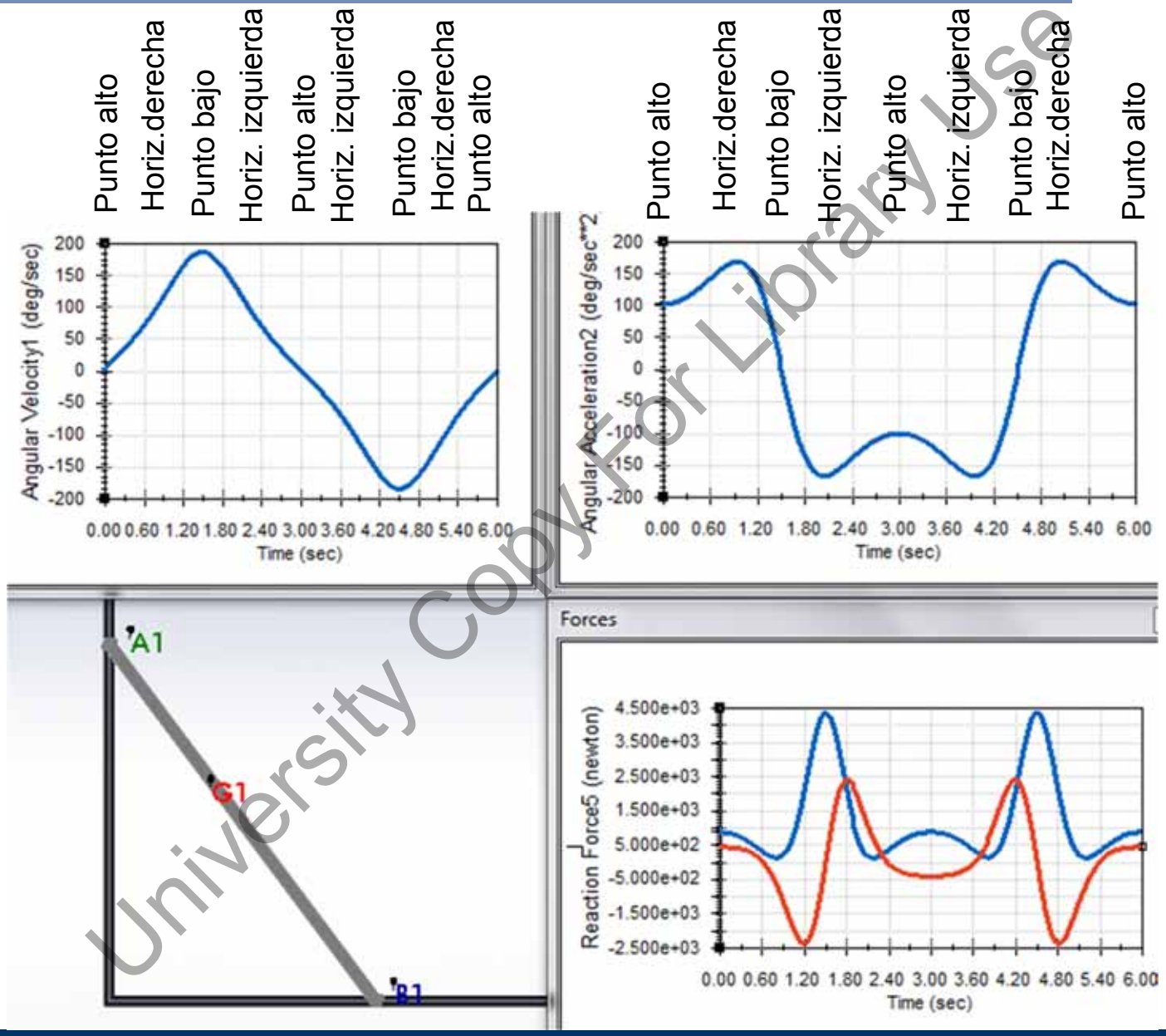
ΣM_G: $+F_{Ay} 2'5 = I\alpha \Rightarrow mg \cdot 2'5 = m\left(\frac{5^2}{12} + 2'5^2\right)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{g \cdot 2'5}{\frac{5^2}{12} + 2'5^2}$

$\alpha = \frac{5 \cdot 2'5}{\frac{5^2}{3}} = \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 25} = 0'8 = 2'941\,[rad/s^2] = \alpha$ (1d)

$\omega_f = \frac{2'941 \cdot 180}{\pi} = 168'5\,[°/s]$

$\Rightarrow F_{Ay} = 120\,(9'805 - 2'5 \cdot 2'941) = 2941\,[N] = F_{Ay}$ (1f)

University Copy For Library Use



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 10.01.2012

Ej1: La polea D se desplaza con 1m/s constante y se calcula la siguiente cinemática: $v_B=4=(-4*0.8,4*0.6)=(-3.2,2.4)$, $\omega_{AB'C}=3.2/5=0.64$[r/s], $v_{B'B}=(0,-2.4)$[m/s], $\alpha_{AB'C}=-2*0.64*2.4/5=-0.6144$ [r/s^2], $a_{B'B}=(0,-0.64^2*5)=(0,-2.048)$ [m/s^2] Si no consideramos la gravedad ni la masa de B y la barra AB'C mide 6[m] y pesa xx[kg]. Calcular:

1a 2p. Fuerza horizontal que hace girar AB' F_{BHX}=_____[N].

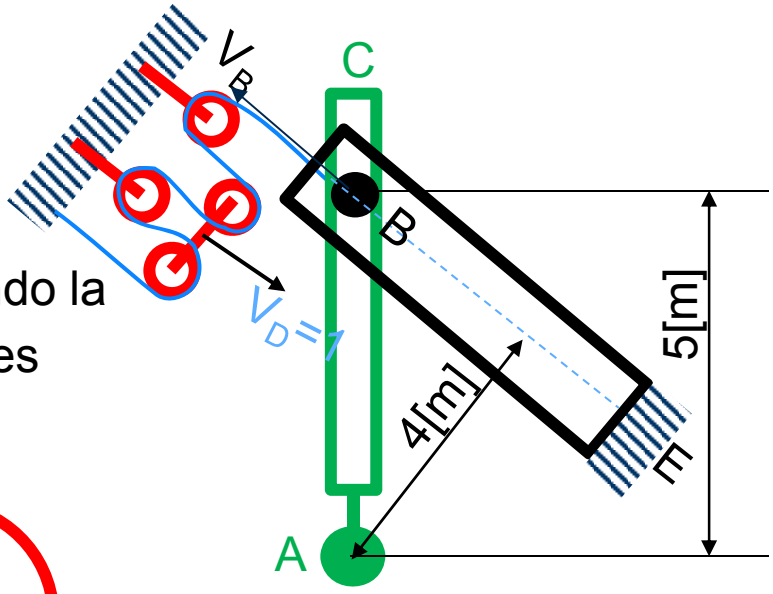
1b 2p. Reacciones en A. A_X=_____[N], A_Y=_____[N].

1c 1p. Fuerza que sufre la guía empotrada. F_{BE}=_____[N].

1d 1p. Tensión del cable. T=_____[N].

1d 1p. Fuerza a realizar en D. F_D=_____[N].

Añadir comentarios sobre tensiones de cable negativas.

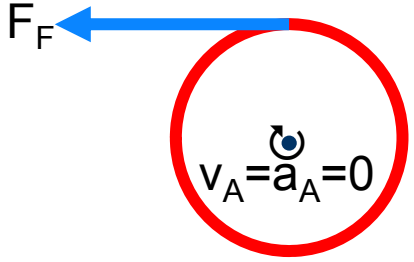


Ej2: Queremos frenar un disco de masa xx[kg], considerando la gravedad y radio 1[m] en una vuelta si su velocidad inicial es de $\omega=1$[r/s]↻.

2a 1p. Fuerza frenada F_F=_____[N].

2b 1p. Reacción A_X=_____[N].

2c 1p. Reacción A_y=_____[N].



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 10.01.2012

Ej1: La polea D se desplaza con 1m/s constante y se calcula la siguiente cinemática: $v_B=4=(-4*0.8,4*0.6)=(-3.2,2.4)$, $\omega_{AB'C}=3.2/5=0.64$[r/s], $v_{B'B}=(0,-2.4)$[m/s], $\alpha_{AB'C}=-2*0.64*2.4/5=-0.6144$ [r/s^2], $a_{B'B}=(0,-0.64^2*5)=(0,-2.048)$ [m/s^2] Si no consideramos la gravedad ni la masa de B y la barra AB'C mide 6[m] y pesa xx[kg]. Calcular:

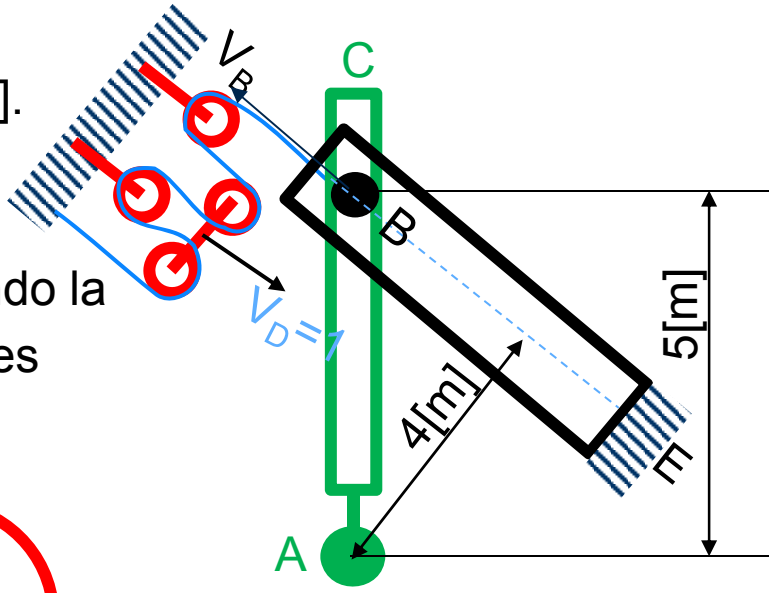
1a 2p. Fuerza horizontal que hace girar AB' F_{BHX}= 2.4m*0.6144 [N].

1b 2p. Reacciones en A. A_X= 0.6m*0.6144 [N], A_Y= -3m*0.64^2 [N].

1c 1p. Fuerza que sufre la guía empotrada. F_{BE}= 0.6*2.4m*0.6144 [N].

1d 1p. Tensión del cable. T= -0.8*2.4m*0.6144 [N].

1d 1p. Fuerza a realizar en D. F_D= -4*0.8*2.4m*0.6144 [N].



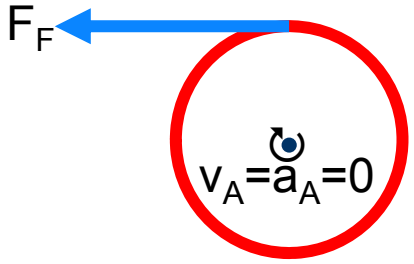
Añadir comentarios sobre tensiones de cable negativas.

Ej2: Queremos frenar un disco de masa xx[kg], considerando la gravedad y radio 1[m] en una vuelta si su velocidad inicial es de $\omega=1$[r/s]↻.

2a 1p. Fuerza frenada F_F= m/(8π) [N].

2b 1p. Reacción A_X= m/(8π) [N].

2c 1p. Reacción A_y= mg [N].



University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 14.01.2011

Ej1: La masa triangular-equilátera de espesor constante y de masa m=4x[g], se suelta rotando en B. Calcular:

1a 2p. Inercia en G y B I_G=____[gr.mm^2], I_B=____[gr.mm^2].

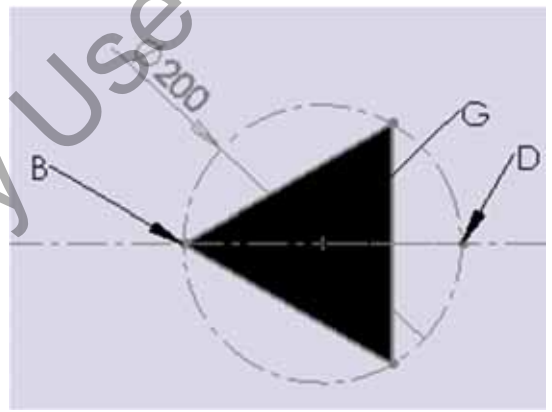
1b 2p. Aceleración angular α=____[rad/s^2].

1c 2p. Reacciones en B inicial (___ , ___) [N].

1d 2p. Velocidad angular cuando triángulo está vertical ω=____[rad/s].

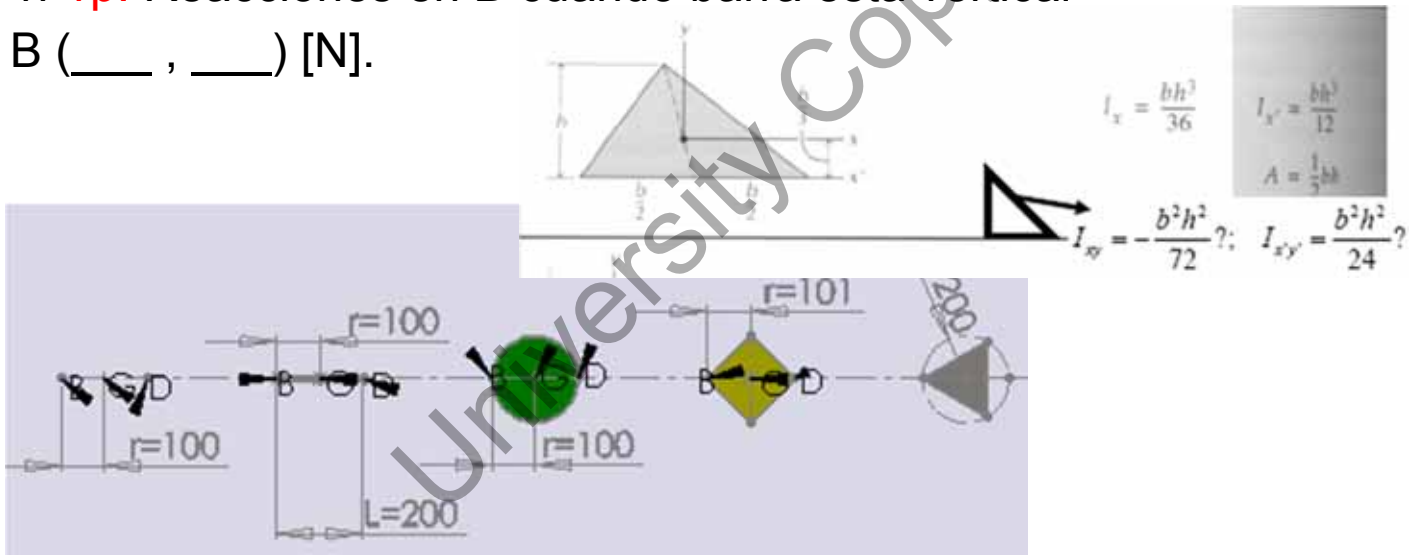
1e 1p. Aceleración angular cuando barra está vertical α=____[rad/s^2].

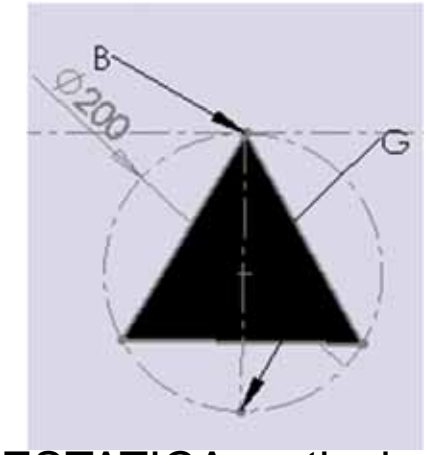
1f 1p. Reacciones en B cuando barra está vertical B (___ , ___) [N].



ESTATICA horizontal:

B (_0_ , _mg_) [N].





ESTATICA vertical:

B (_0_ , _mg_) [N].

University Copy For Library Use

SOLUCIONES: Fecha: 14.01.2011

Ej1: La masa triangular-equilátera de espesor constante y de masa m=4x[g], se suelta rotando en B. Calcular:

1a 2p. Inercia en G y B I_G=_$mr^2/4$_[gr.mm^2], I_B=_$5mr^2/4$_[gr.mm^2].

1b 2p. Aceleración angular α=_$-4g/(5r)$_[rad/s^2].

1c 2p. Reacciones en B (_0_ , _$mg/5$_) [N].

1d 2p. Velocidad angular cuando triángulo está vertical

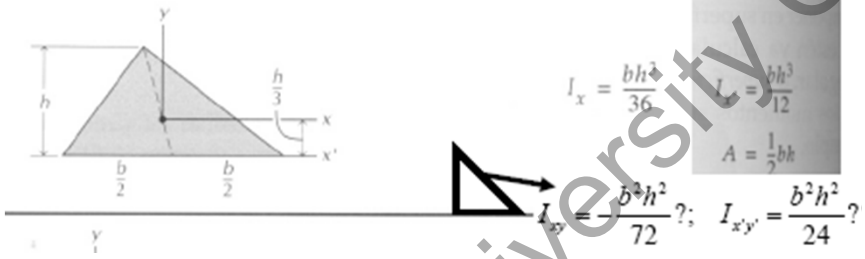
ω=_$\sqrt{8g/(5r)}$_[rad/s].

1e 1p. Aceleración angular cuando barra está vertical

α=_0_[rad/s^2].

1f 1p. Reacciones en B cuando barra está vertical

B (_0_ , _$mg13/5$_) [N].



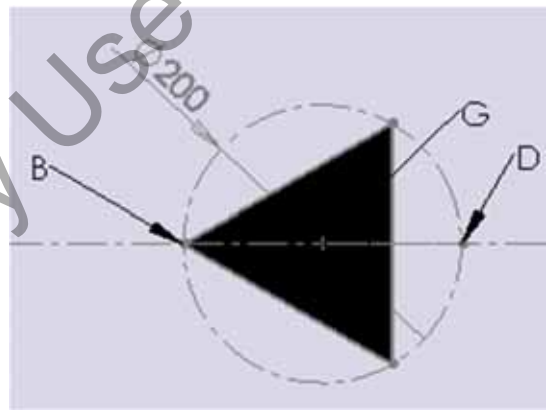
$I_{yA}=hb^3/48$

$I_{xA}=bh^3/36$

$I_{zG}=\delta tA/A(I_{xA}+I_{yA})=$

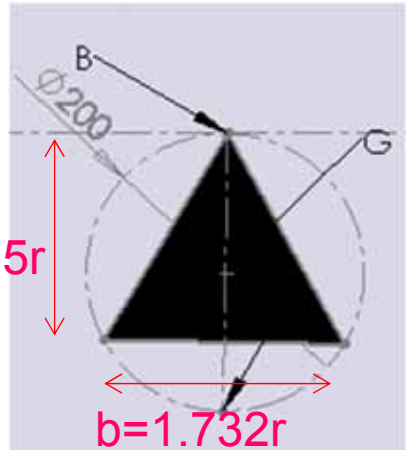
$m/(bh/2)*(bh/2*(b^2/24+h^2/18))=$

$m*(b^2/24+h^2/18)=mr^2/4$



ESTATICA horizontal:

B (_0_ , _mg_) [N].



ESTATICA vertical:

B (_0_ , _mg_) [N].

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 20.01.2010a

Ej1: La barra de masa m=8[kg], L=5[m],b=0.2[m] se suelta el B. Calcular:

1a 1p. Aceleración angular α=____[rad/s^2].

1b 1p. Reacciones en C (___ , ___) [N].

1c 1p. Velocidad angular cuando barra está vertical ω=____[rad/s].

1d 1p. Aceleración angular cuando barra está vertical α=____[rad/s^2].

1e 1p. Reacciones en C cuando barra está vertical (___ , ___) [N].

1f 2p. Si queremos que la aceleración de 1a baje a 1.53[rad/s^2] calcular número de discos de mr=10[kg] y r=1[m] a colocar girando con la barra sobre C. n=___[-]

Ej1

Ej2: Se suspende una masa de 10[kg] de dos muelles en serie y dos en paralelo de 10 [N/m] cada uno. Calcular:

2a 1p. Muelle equivalente k_{eq}=__[N/m].

2b 1p. Periodo de oscilación libre. T=__[s].

2c 1p. Amortiguador crítico. c_{cr}=__[Ns/m].

Ej2

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 20.01.2010b

Ej1: La barra de masa m=7[kg], L=5[m],b=0.2[m] se suelta el B. Calcular:

1a 1p. Aceleración angular α=____[rad/s^2].

1b 1p. Reacciones en C (___ , ___) [N].

1c 1p. Velocidad angular cuando barra está vertical ω=____[rad/s].

1d 1p. Aceleración angular cuando barra está vertical α=____[rad/s^2].

1e 1p. Reacciones en C cuando barra está vertical (___ , ___) [N].

1f 2p. Si queremos que la aceleración de 1a baje a 1.53[rad/s^2] calcular número de discos de mr=10[kg] y r=1[m] a colocar girando con la barra sobre C. n=___[-]

Ej1

Ej2: Se suspende una masa de 20[kg] de dos muelles en serie y dos en paralelo de 20 [N/m] cada uno. Calcular:

2a 1p. Muelle equivalente k_{eq}=__[N/m].

2b 1p. Periodo de oscilación libre. T=__[s].

2c 1p. Amortiguador crítico. c_{cr}=__[Ns/m].

Ej2

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 20.01.2010c

Ej1: La barra de masa m=6[kg], L=5[m],b=0.2[m] se suelta el B. Calcular:

1a 1p. Aceleración angular α=____[rad/s^2].

1b 1p. Reacciones en C (___ , ___) [N].

1c 1p. Velocidad angular cuando barra está vertical ω=____[rad/s].

1d 1p. Aceleración angular cuando barra está vertical α=____[rad/s^2].

1e 1p. Reacciones en C cuando barra está vertical (___ , ___) [N].

1f 2p. Si queremos que la aceleración de 1a baje a 1.53[rad/s^2] calcular número de discos de mr=10[kg] y r=1[m] a colocar girando con la barra sobre C. n=___[-]

Ej1

Ej2: Se suspende una masa de 30[kg] de dos muelles en serie y dos en paralelo de 30 [N/m] cada uno. Calcular:

2a 1p. Muelle equivalente k_{eq}=__[N/m].

2b 1p. Periodo de oscilación libre. T=__[s].

2c 1p. Amortiguador crítico. c_{cr}=__[Ns/m].

Ej2

University Copy For Library Use

Nombre y apellidos: Fecha: 20.01.2010d

Ej1: La barra de masa m=5[kg], L=5[m],b=0.2[m] se suelta el B. Calcular:

1a 1p. Aceleración angular α=____[rad/s^2].

1b 1p. Reacciones en C (___ , ___) [N].

1c 1p. Velocidad angular cuando barra está vertical ω=____[rad/s].

1d 1p. Aceleración angular cuando barra está vertical α=____[rad/s^2].

1e 1p. Reacciones en C cuando barra está vertical (___ , ___) [N].

1f 2p. Si queremos que la aceleración de 1a baje a 1.53[rad/s^2] calcular número de discos de mr=10[kg] y r=1[m] a colocar girando con la barra sobre C. n=___[-]

Ej1

Ej2: Se suspende una masa de 40[kg] de dos muelles en serie y dos en paralelo de 40 [N/m] cada uno. Calcular:

2a 1p. Muelle equivalente k_{eq}=__[N/m].

2b 1p. Periodo de oscilación libre. T=__[s].

2c 1p. Amortiguador crítico. c_{cr}=__[Ns/m].

Ej2

University Copy For Library Use

Soluciones

Ej1: La barra de masa m[kg], L[m],b=kL[m] se suelta el B. Calcular:

1a 1p. Aceleración angular α= $g/L*(0.5-k)/((0.5-k)^2+1/12)$ [rad/s^2].

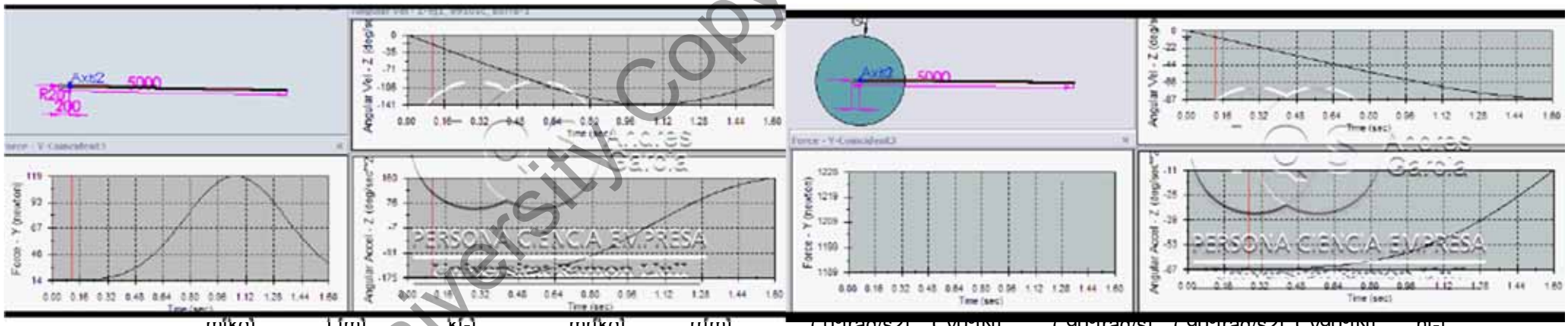
1b 1p. Reacciones en C (0 , $mg(1-(0.5-k)^2/((0.5-k)^2+1/12)$) [N].

1c 1p. Velocidad angular cuando barra está vertical ω= $\sqrt{2g/L*(0.5-k)/((0.5-k)^2+1/12)}$ [rad/s].

1d 1p. Aceleración angular cuando barra está vertical α= 0 [rad/s^2].

1e 1p. Reacciones en C cuando barra está vertical (0 , $mg(1+2(0.5-k)^2/((0.5-k)^2+1/12))$) [N].

1f 2p. Si queremos que la aceleración de 1a baje a 1.53[rad/s^2] calcular número de discos de mr[kg] y r=1[m] a colocar girando con la barra sobre C. n= $2mL^2((0.5-k)^2+1/12)/(m_r r^2)$ [-]



	m[kg]	L[m]	k[-]	mr[kg]	r[m]	(0°[rad/s2]	Cy0°[N]	(90°[rad/s]	(90°[rad/s2]	Cy90°[N]	n[-]
S53t_091(	ej01_a	8.000E+00	5.000E+00	4.000E-02	1.000E+01	1.000E+00	3.059E+00	2.217E+01	2.474E+00	0.000E+00	1.910E+02	1.180E+01
S53t_091(	ej01_b	7.000E+00	5.000E+00	4.000E-02	1.000E+01	1.000E+00	3.059E+00	1.940E+01	2.474E+00	0.000E+00	1.672E+02	1.032E+01
S53t_091(	ej01_c	6.000E+00	5.000E+00	4.000E-02	1.000E+01	1.000E+00	3.059E+00	1.663E+01	2.474E+00	0.000E+00	1.433E+02	8.848E+00
S53t_091(	ej01_d	5.000E+00	5.000E+00	4.000E-02	1.000E+01	1.000E+00	3.059E+00	1.385E+01	2.474E+00	0.000E+00	1.194E+02	7.373E+00

University Copy For Library Use

Soluciones

Ej2: Se suspende una masa de m[kg] de dos muelles en serie y dos en paralelo de k [N/m] cada uno. Calcular:

2a 1p. Muelle equivalente k_{eq}= 2k+1/((1/k)+(1/k))=2.5k [N/m].

2b 1p. Periodo de oscilación libre. T= $2\pi/\sqrt{(k_{eq}/m)}$ [s].

2c 1p. Amortiguador crítico. c_{cr}= $2\sqrt{(k_{eq}m)}$ [Ns/m].

	m[kg]	k[N/m]	keq[N/m]	T[s]	ccr[Ns/m]
S53t_091Cej02_a	1.000E+01	1.000E+01	2.500E+01	3.974E+00	3.162E+01
S53t_091Cej02_b	2.000E+01	2.000E+01	5.000E+01	3.974E+00	6.325E+01
S53t_091Cej02_c	3.000E+01	3.000E+01	7.500E+01	3.974E+00	9.487E+01
S53t_091Cej02_d	4.000E+01	4.000E+01	1.000E+02	3.974E+00	1.265E+02

University Copy For Library Use

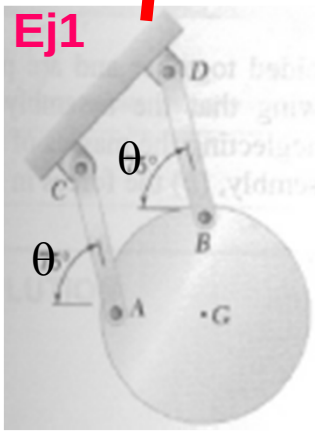
Nombre y apellidos: Fecha: 20.01.2009a

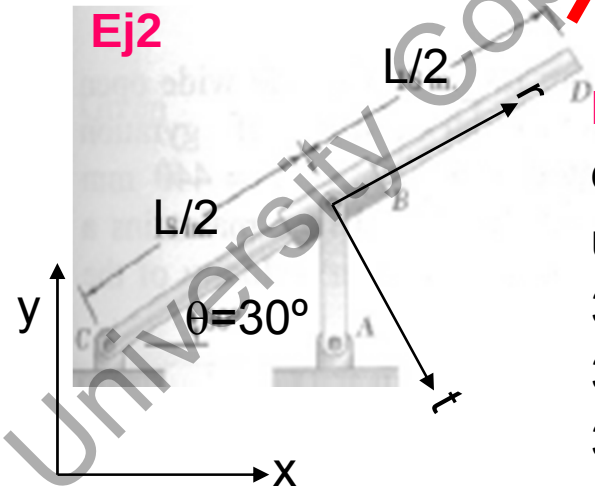
Ej1: El disco de masa 8[kg] parte de reposo para θ=60º. Las barras tienen peso despreciable. AG es horizontal y BG vertical. Suponer barras a tracción. Calcular:

1a 1p. Aceleración de G si se libera el disco. (si θ=0 a=g, si θ=90º a=0) a_g=____[m/s^2]

1b 1p. Tracción en barra AC. T_{ac}=____[N]

1c 1p. Tracción en barra BD. T_{bd}=____[N]





Ej2: La barra CB'D de la figura de 8[kg] y L=0.8[m] se mueve por la acción de AB con ω_{ab}=5↻[rad/s] y α_{ab}=60↻[rad/s^2] calcular:

2a 1p. Si v_b=(5*L/4,0) ω_{cd}=____[rad/s].

2b 1p. $v_{b'b}$=r'=____[m/s].

2c 1p. $a_{coriolis}$=2ω_{cd}r'=____[m/s^2].

2d 1p. α_{cd}=____[rad/s2].

Si ω_{cd}=1.25↻[rad/s^2], α_{cd}=20.41↻[rad/s^2], I_G=mL^2/12 ó I_C=mL^2/3:

2e 1p. Fuerza N normal en B: N_b=____[N].

Ej3: Se suspende una masa de 10[kg] de dos muelles en serie de 10 [N/m] cada uno. Calcular:

3a 1p. Periodo de oscilación libre. T=__[s]

3b 0.5p. Amortiguador crítico. c_{cr}=__[Ns/m]

3c 0.5p. Frecuencia de resonancia con un sólo muelle. f_f=___[Hz].

University Copy For Library Use

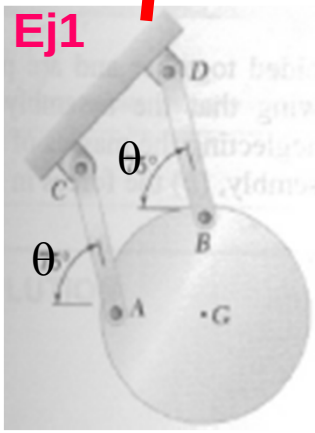
Nombre y apellidos: Fecha: 20.01.2009b

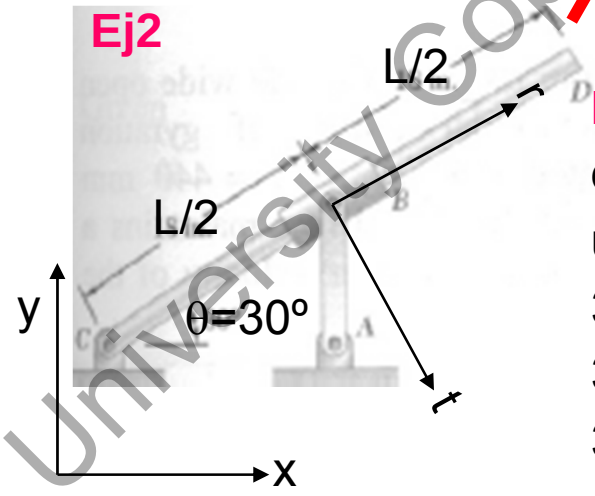
Ej1: El disco de masa 7[kg] parte de reposo para θ=60º. Las barras tienen peso despreciable. AG es horizontal y BG vertical. Suponer barras a tracción. Calcular:

1a 1p. Aceleración de G si se libera el disco. (si θ=0 a=g, si θ=90º a=0) a_g=____[m/s^2]

1b 1p. Tracción en barra AC. T_{ac}=____[N]

1c 1p. Tracción en barra BD. T_{bd}=____[N]





Ej2: La barra CB'D de la figura de 9[kg] y L=0.9[m] se mueve por la acción de AB con ω_{ab}=5↻[rad/s] y α_{ab}=60↻[rad/s^2] calcular:

2a 1p. Si v_b=(5*L/4,0) ω_{cd}=____[rad/s].

2b 1p. $v_{b'b}$=r'=____[m/s].

2c 1p. $a_{coriolis}$=2ω_{cd}r'=____[m/s^2].

2d 1p. α_{cd}=____[rad/s2].

Si ω_{cd}=1.25↻[rad/s^2], α_{cd}=20.41↻[rad/s^2], I_G=mL^2/12 ó I_C=mL^2/3:

2e 1p. Fuerza N normal en B: N_b=____[N].

Ej3: Se suspende una masa de 20[kg] de dos muelles en serie de 10 [N/m] cada uno. Calcular:

3a 1p. Periodo de oscilación libre. T=__[s]

3b 0.5p. Amortiguador crítico. c_{cr}=__[Ns/m]

3c 0.5p. Frecuencia de resonancia con un sólo muelle. f_f=___[Hz].

University Copy For Library Use

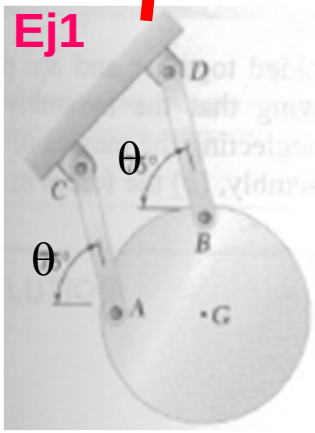
Nombre y apellidos: Fecha: 20.01.2009c

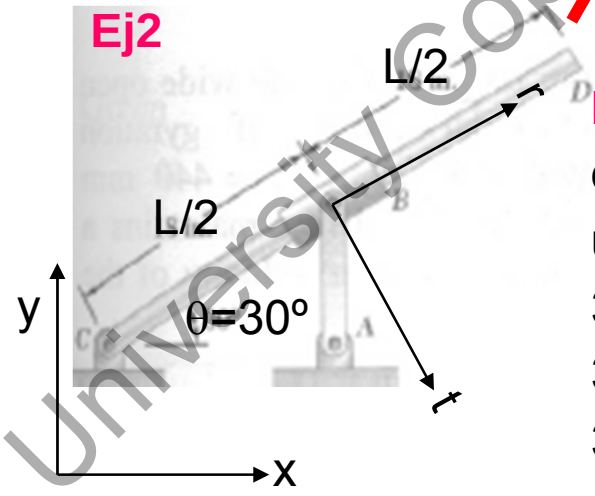
Ej1: El disco de masa 8[kg] parte de reposo para θ=30º. Las barras tienen peso despreciable. AG es horizontal y BG vertical. Suponer barras a tracción. Calcular:

1a 1p. Aceleración de G si se libera el disco. (si θ=0 a=g, si θ=90º a=0) a_g=____[m/s^2]

1b 1p. Tracción en barra AC. T_{ac}=____[N]

1c 1p. Tracción en barra BD. T_{bd}=____[N]





Ej2: La barra CB'D de la figura de 10[kg] y L=1.0[m] se mueve por la acción de AB con ω_{ab}=5↻[rad/s] y α_{ab}=60↻[rad/s^2] calcular:

2a 1p. Si v_b=(5*L/4,0) ω_{cd}=____[rad/s].

2b 1p. $v_{b'b}$=r'=____[m/s].

2c 1p. $a_{coriolis}$=2ω_{cd}r'=____[m/s^2].

2d 1p. α_{cd}=____[rad/s2].

Si ω_{cd}=1.25↻[rad/s^2], α_{cd}=20.41↻[rad/s^2], I_G=mL^2/12 ó I_C=mL^2/3:

2e 1p. Fuerza N normal en B: N_b=____[N].

Ej3: Se suspende una masa de 10[kg] de dos muelles en serie de 20 [N/m] cada uno. Calcular:

3a 1p. Periodo de oscilación libre. T=__[s]

3b 0.5p. Amortiguador crítico. c_{cr}=__[Ns/m]

3c 0.5p. Frecuencia de resonancia con un sólo muelle. f_f=___[Hz].

University Copy For Library Use

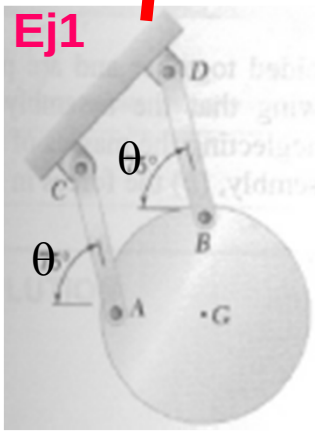
Nombre y apellidos: Fecha: 20.01.2009d

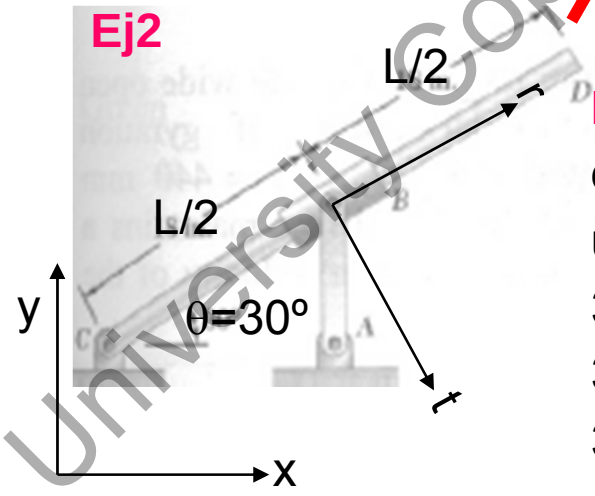
Ej1: El disco de masa 7[kg] parte de reposo para θ=30º. Las barras tienen peso despreciable. AG es horizontal y BG vertical. Suponer barras a tracción. Calcular:

1a 1p. Aceleración de G si se libera el disco. (si θ=0 a=g, si θ=90º a=0) a_g=____[m/s^2]

1b 1p. Tracción en barra AC. T_{ac}=____[N]

1c 1p. Tracción en barra BD. T_{bd}=____[N]





Ej2: La barra CB'D de la figura de 11[kg] y L=1.1[m] se mueve por la acción de AB con ω_{ab}=5↻[rad/s] y α_{ab}=60↻[rad/s^2] calcular:

2a 1p. Si v_b=(5*L/4,0) ω_{cd}=____[rad/s].

2b 1p. $v_{b'b}$=r'=____[m/s].

2c 1p. $a_{coriolis}$=2ω_{cd}r'=____[m/s^2].

2d 1p. α_{cd}=____[rad/s2].

Si ω_{cd}=1.25↻[rad/s^2], α_{cd}=20.41↻[rad/s^2], I_G=mL^2/12 ó I_C=mL^2/3:

2e 1p. Fuerza N normal en B: N_b=____[N].

Ej3: Se suspende una masa de 20[kg] de dos muelles en serie de 20 [N/m] cada uno. Calcular:

3a 1p. Periodo de oscilación libre. T=__[s]

3b 0.5p. Amortiguador crítico. c_{cr}=__[Ns/m]

3c 0.5p. Frecuencia de resonancia con un sólo muelle. f_f=___[Hz].

University Copy For Library Use

Soluciones

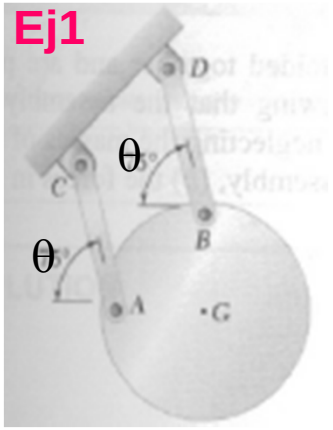
Ej1: El disco de masa 8[kg] parte de reposo para θ=60º. Las barras tienen peso despreciable. AG es horizontal y BG vertical. Suponer barras a tracción. Calcular:

1a 1p. Aceleración de G si se libera el disco.

(si θ=0 a=g, si θ=90º a=0) a_g= g*cos(θ) [m/s²]

1b 1p. Tracción en barra AC. T_{ac}= mgsin(θ) / (1+tan(θ)) [N]

1c 1p. Tracción en barra BD. T_{bd}= T_{ac}*tan(θ) [N]



	Beer 16_13	ej01_a	ej01_b	ej01_c	ej01_d
m[kg]	6.000E+00	8.000E+00	7.000E+00	8.000E+00	7.000E+00
q[º]	7.500E+01	6.000E+01	6.000E+01	3.000E+01	3.000E+01
g[m/s^2]	9.807E+00	9.807E+00	9.807E+00	9.807E+00	9.807E+00
ax[m/s^2]	-2.452E+00	-4.247E+00	-4.247E+00	-4.247E+00	-4.247E+00
ay[m/s^2]	-6.569E-01	-2.452E+00	-2.452E+00	-7.355E+00	-7.355E+00
a[m/s^2]	2.538E+00	4.904E+00	4.904E+00	8.493E+00	8.493E+00
Tac[N]	1.201E+01	2.487E+01	2.176E+01	2.487E+01	2.176E+01
Tbd[N]	4.483E+01	4.308E+01	3.769E+01	1.436E+01	1.256E+01

University Copy For Library Use

Soluciones

Ej2: La barra CB'D de la figura de 8[kg] y L=0.8[m] se mueve por la acción de AB con ω_{ab}=5↻[rad/s] y α_{ab}=60↻[rad/s^2] calcular:

2a 1p. Si v_b=(5*L/4,0) ω_{cd}= $\omega_{ab}\sin^2\theta$=1.25↻ [rad/s].

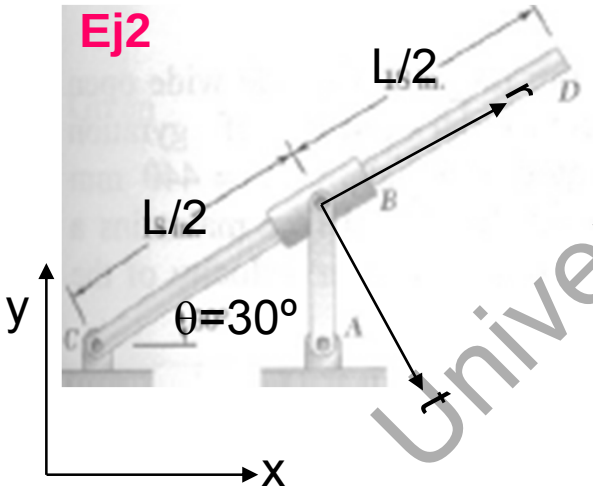
2b 1p. $v_{b'b}$=r'= ω_{ab}L/2sinθcosθ [m/s].

2c 1p. $a_{coriolis}$=2ω_{cd}r'= 2*ω^2_{ab}L/2sin^{3}θcosθ [m/s^2].

2d 1p. α_{cd}= $\omega^2_{ab}\sin\theta\cos\theta+\alpha_{ab}\sin^2\theta-2\omega_{ab}\omega_{cd}\sin\theta\cos\theta$= 20.41↻ [rad/s2].

Si ω_{cd}=1.25↻[rad/s^2], α_{cd}=20.41↻[rad/s^2], I_G=mL^2/12 ó I_C=mL^2/3:

2e 1p. Fuerza N normal en B: N_b= m(2Lα_{cd}/3-gcosθ) [N].



	Beer 16_122	ej02_a	ej02_b	ej02_c	ej02_d
m[kg]	3.627E+00	8.000E+00	9.000E+00	1.000E+01	1.100E+01
q[º]	3.000E+01	3.000E+01	3.000E+01	3.000E+01	3.000E+01
g[m/s^2]	9.807E+00	9.807E+00	9.807E+00	9.807E+00	9.807E+00
L[m]	9.144E-01	8.000E-01	9.000E-01	1.000E+00	1.100E+00
wab[r/s]	-5.000E+00	-5.000E+00	-5.000E+00	-5.000E+00	-5.000E+00
aab[r/s^2]	-6.000E+01	-6.000E+01	-6.000E+01	-6.000E+01	-6.000E+01
wcd[r/s]	-1.250E+00	-1.250E+00	-1.250E+00	-1.250E+00	-1.250E+00
vb'b=r'[m/s]	9.899E-01	8.660E-01	9.743E-01	1.083E+00	1.191E+00
acoriolis[m/s2	2.475E+00	2.165E+00	2.436E+00	2.706E+00	2.977E+00
acd[rad/s2]	-2.041E+01	-2.041E+01	-2.041E+01	-2.041E+01	-2.041E+01
N[N]	1.433E+01	1.915E+01	3.379E+01	5.115E+01	7.124E+01
Cx[N]	7.517E+00	1.876E+01	1.896E+01	1.869E+01	1.794E+01
Cy[N]	4.960E+00	1.939E+01	1.350E+01	5.774E+00	-3.801E+00
vb'b=r'[ft/s]	3.256E+00	2.849E+00	3.205E+00	3.561E+00	3.917E+00
acoriolis[ft/s2]	8.140E+00	7.122E+00	8.012E+00	8.902E+00	9.793E+00
N[lb]	3.210E+00	4.289E+00	7.569E+00	1.146E+01	1.596E+01

University Copy For Library Use

Soluciones

Ej3: Se suspende una masa de 10[kg] de dos muelles en serie de 10 [N/m] cada uno.
Calcular:

3a 1p. Periodo de oscilación libre. T= $2\pi/\sqrt{(k_1*k_2/(k_1+k_2)/m}$ [s].

3b 0.5p. Amortiguador crítico. c_{cr}= $2\sqrt{m*(k_1*k_2/(k_1+k_2)}$ [Ns/m].

3c 0.5p. Frecuencia de resonancia con un sólo muelle. f_f= $\sqrt{(k_1/m)} / 2\pi$ [Hz].

Ej3

	Beer 19_026	ej03_a	ej03_b	ej03_c	ej03_d
m[kg]	2.270E+00	1.000E+01	2.000E+01	1.000E+01	2.000E+01
k1[N/m]	6.220E+03	1.000E+01	1.000E+01	2.000E+01	2.000E+01
k2[N/m]	3.500E+03	1.000E+01	1.000E+01	2.000E+01	2.000E+01
T12[s]	2.000E-01	8.886E+00	1.257E+01	6.283E+00	8.886E+00
ccr[Ns/m]	1.426E+02	1.414E+01	2.000E+01	2.000E+01	2.828E+01
f1[Hz]	8.331E+00	1.592E-01	1.125E-01	2.251E-01	1.592E-01
T1[s]	1.200E-01	6.283E+00	8.886E+00	4.443E+00	6.283E+00

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Cuarto y último control a realizar durante el curso por valor de 1.00 puntos sobre 3.50 puntos del total de los controles.

University Copy For Library Use

S39t.- Ejercicios de Estática.

University Copy For Library Use

Mejora 1314 ....

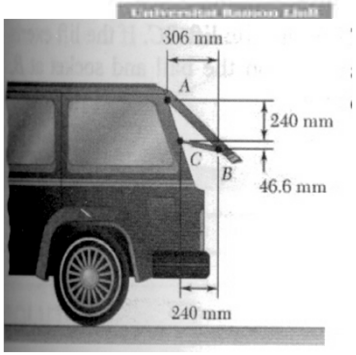
- Repaso sesión anterior.

➢ Cuarto y último control a realizar durante el curso por valor de 1.00 puntos sobre 3.50 puntos del total de los controles.

University Copy For Library Use

- Beer 03_009.

El portón de un coche se aguanta por el muelle de gas BC que hace una fuerza de 125[N]. Determinar (a) el momento que hace respecto a A.

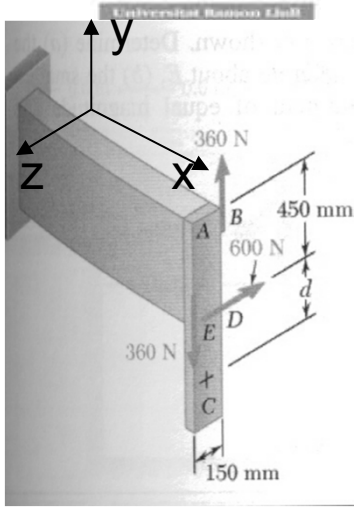


University Copy For Library Use

Sol: (a) M_a=27.9 [N·m]

- Beer 03_144.

Una fuerza y una par están aplicados como se ve en la figura. (a) sustituir por una única fuerza aplicada en C y (b) repetir si el par se invierte de dirección.

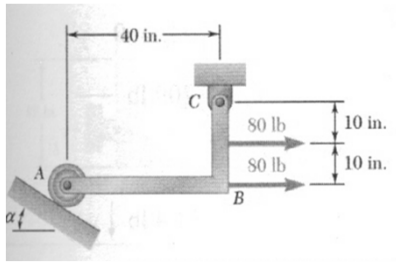


University Copy For Library Use

Sol: (a) F=(0,0,-600) y d=90[mm] bajo de E. (b) F=(0,0,-600) y d=90[mm] sobre de E.

- Beer 04_017.

Calcular las reacciones en apoyos para (a) α=0º, (b) α=30º.

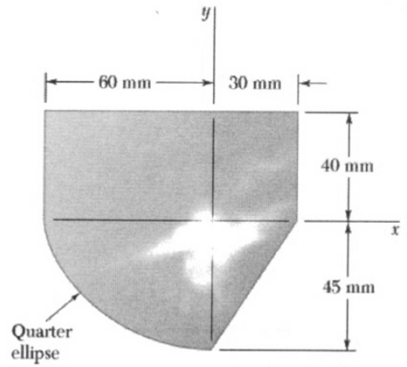


University Copy For Library Use

Sol: (a) A=60(0,1)[lb], C=(-160,-60)[lb] (b) A=97.60(cos60º,sin60º), C=(-209,-84.4)[lb]

- Beer 05_012.

Localizar el centroide de la superficie de la figura.



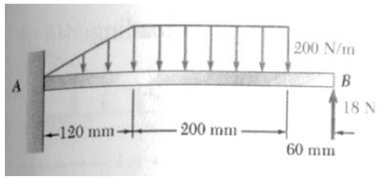
A	x	y	xA	yA
3600	-15	20	-54000	72000
675	10	-15	6750	-10125
2120.57504	-25.4647909	-19.0985932	-54000	-40500
6395.57504			-101250	21375
			xt	yt
			-15.8312582	3.34215452

Sol: (a) (-15.83,3.34)

University Copy For Library Use

- Beer 05_065.

Determinar reacciones en empotramiento.

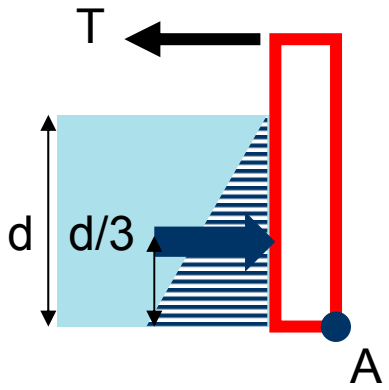


University Copy For Library Use

Sol: (a) Ra=(0,34)[N], Ma=2.92↺[N·m]

- Beer 5_077.

Una compuerta AB de 9x12[ft] tiene su bisagra en A. El cable BC puede aguantar con factor de seguridad 8[kips]=8000[lb]. Determinar la altura máxima de agua que podemos colocar para que no se sobrecargue el cable.



$F*d_{max}/3=T_{max}*9[ft];$

$F=1/2*Area*\delta g d_{max}=1/2*12*\delta g d^2_{max}.\Rightarrow$

$1/2*12[ft]*\delta g d^3_{max}/3=T_{max}*9[ft];$

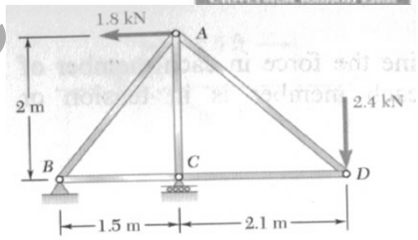
$\delta g=62.4[lb/ft^3] \Rightarrow$

$d^3_{max}=8000[lb]*9[ft]*3*2/(12[ft]*62.4[lb/ft^3])=576.92[ft^3].$

Sol: (a) $d_{max}=8.32[ft] < 9[ft]$

University Copy For Library Use

- Beer 06_004.



Dar reacciones y fuerzas en cada una de las 5 barras.

$\Sigma M_b=0$; $1.8*2+Cy*1.5-2.4*(1.5+2.1)=0 \Rightarrow C_y=(2.4*3.6-1.8*2)/1.5=3.36[kN]$

$\Sigma F_x=0$; $B_x-1.8=0 \Rightarrow B_x=1.8[kN]$

$\Sigma F_y=0$; $B_y+C_y-2.4=0 \Rightarrow B_y=2.4-3.36=-0.96[kN]$

Como en C la única fuerza vertical es la de reacción será igual a la de la barra:
AC=-3.36 [kN] compresión.

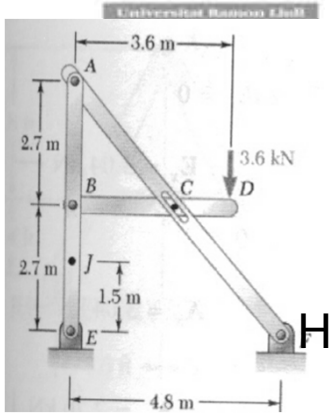
En B hay dos incógnitas y dos ecuaciones:
y: $BA*2/\sqrt{(2^2+1.5^2)}-0.96=0 \Rightarrow BA=0.96*2.5/2=1.2[kN]$ tracción.
x: $BC+1.8+BA*1.5/\sqrt{(2^2+1.5^2)}=0 \Rightarrow BC=-1.8-1.2*1.5/2.5=-2.52[kN]$ compresión

En D hay dos incógnitas y dos ecuaciones:
y: $DA*2/\sqrt{(2^2+2.1^2)}-2.4=0 \Rightarrow DA=2.4*2.9/2=3.48[kN]$ tracción.
x: $CD+DA*2.1/\sqrt{(2^2+2.1^2)}=0 \Rightarrow CD=-3.48*2.1/2.9=-2.52[kN]$ compresión

Sol: (a) Rc=(0,3.36), Rb=(1.8,-0.96),
AD=3.48[kN], CD=-2.52, AC=-3.36[kN], BC=-2.52, AB=1.20[kN]

University Copy For Library Use

- Beer 06_098.



Para la estructura de la figura calcular todas las fuerzas que actúan sobre la barra ABE.

$\Sigma M_e=0$; $-3.6*3.6+H_y*4.8=0 \Rightarrow H_y=(3.6*3.6)/4.8=2.7[kN]$

$\Sigma F_y=0$; $E_y+H_y-3.6=0 \Rightarrow E_y=3.6-2.7=0.9[kN]$

$\Sigma F_x=0$; $E_x+H_x=0 \Rightarrow E_x=-H_x$

Analizando barra BCD:

$\Sigma M_c=0$; $-B_y*2.4-3.6*1.2=0 \Rightarrow B_y=-3.6*1.2/2.4=-1.8[kN]$

$\Sigma F_y=0$; $-1.8+C_y-3.6=0 \Rightarrow C_y=5.4[kN]$ como C ha de ser perpendicular a la barra AF:

$C_y/C_x=4.8/5.4 \Rightarrow C_x=C_y*1.2=5.4*1.125=6.075[kN]$

$\Sigma F_x=0$; $B_x+C_x=0 \Rightarrow B_x=-6.075[kN]$

Traspasando la fuerza B a la barra ABE la fuerza se invierte el signo:

$B_x=6.075[kN]$ y $B_y=1.8[kN]$.

$\Sigma F_y=0$; $0.9+1.8+A_y=0 \Rightarrow A_y=-2.7[kN]$

$\Sigma M_e=0$; $6.075*2.7+A_x*5.4=0 \Rightarrow A_x=-6.075*2.7/5.4=-3.037[kN]$

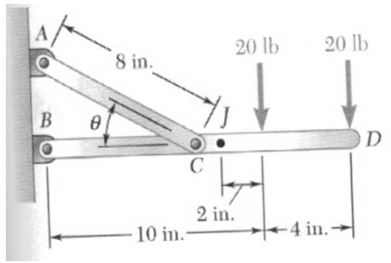
$\Sigma F_x=0$; $E_x+6.075-3.037 \Rightarrow E_x=-3.037[kN]$

Sol: (a) A=(-3.037,-2.7)[kN]B=(6.075,1.8)[kN] E=(-3.037,0.9)[kN]

University Copy For Library Use

- Beer 07_001.

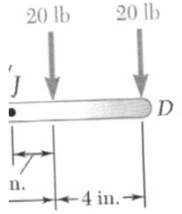
Determinar los esfuerzos internos en punto J: (a) axial, (b) cortante y (c) flexión.



Axial: F=0

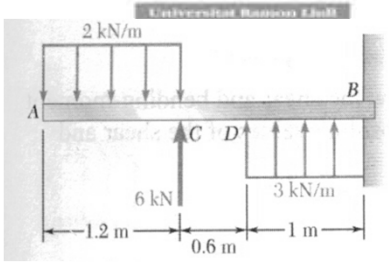
Cortante: V=20+20=40[lb] ↑ ⇨ cortante positivo

Momento flector: M=(20*2+20*(2+4))=160[lb·in]↺ ⇨ momento negativo



University Copy For Library Use

- Beer 07_064.



Dar gráfico de momentos y cortantes y determinar el máximo.

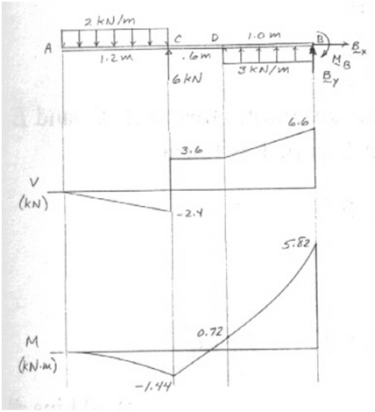
Tramo AC:

V empieza en cero y es negativo con x:

V_{ac}=-2x [kN], en x=1.2 V_c=-2.4[kN]

M empieza en cero y es negativo con x:

M_{ac}=-2x^2/2 [kN·m], en x=1.2 M_c=-1.44[kN·m]



Tramo CD:

V empieza en 6-2.4=3.6[kN] y se mantiene constante con x:

V_{cd}=+3.6 [kN], en x=1.8 V_c=+4.8[kN]

M empieza en -1.44 y evoluciona linealmente con x:

M_{cd}=-2*1.2(x-0.6)+6(x-1.2)=3.6x-5.76 [kN·m], en x=1.8 M_c=+0.72[kN·m]

Tramo DB:

V empieza en 4.8[kN] y se incrementa linealmente con x:

V_{db}=3.6+3(x-1.8) [kN], en x=2.8 V_b=+6.6[kN] que es el máximo

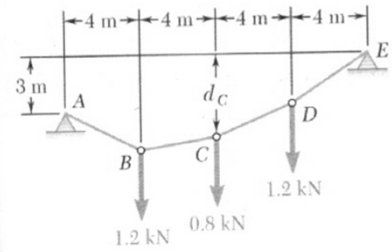
M empieza en +0.72 y evoluciona parabólicamente con x:

M_{db}=-2*1.2(x-0.6)+6(x-1.2)+3/2(x-1.8)^2=1.5x^2-1.8x-0.9 [kN·m],

en x=2.8 M_b=++5.82[kN·m] que es el máximo

University Copy For Library Use

- Beer 07_090.



Se sabe que el cable con las cargas muestra d_c=4[m]. Determinar (a) reacción en A y (b) reacción en E.

$\Sigma M_e=0$; $4*1.2+8*0.8+12*1.2+3*A_x-16*A_y=0$

$\Sigma M_c=0$; $4*1.2-(4-3)*A_x-8*A_y=0$

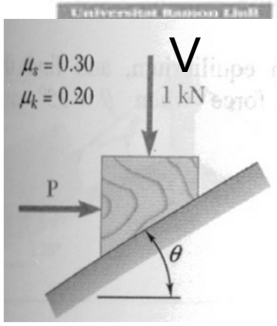
A_x=-3.2[kN] A_y=1[kN]

$\Sigma F_x=0$; $E_x+A_x=0$ ⇨ E_x=3.2[kN]

$\Sigma F_y=0$; $E_y+A_y=1.2+0.8+1.2$ ⇨ $E_x=3.2-1=2.2$[kN]

University Copy For Library Use

- Beer 08_001.



Determinar si el bloque está en equilibrio o si se mueve y indicando la dirección para P=200[N] y θ=30º .

Suponemos equilibrio estático y una fuerza normal N y otra F en la dirección de la rampa. Si luego esa fuerza excede el valor de la normal por el coeficiente de rozamiento se estará moviendo. Ponemos la fuerza F hacia arriba como si el bloque quisiera caer:

$\Sigma F_n=0$; $N=P\sin\theta+V\cos\theta \Rightarrow N=200*0.5+1000*0.866=966.0[N]$

$\Sigma F_t=0$; $F=-P\cos\theta+V\sin\theta \Rightarrow F=-200*0.866+1000*0.5=326.8[N]$

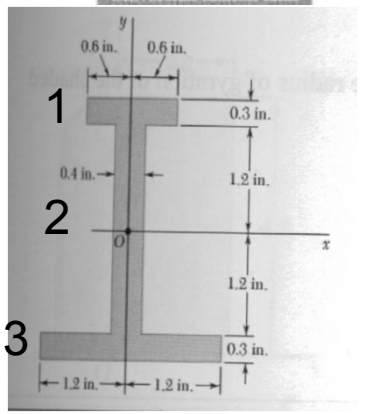
$F_{max}=\mu_s N= 0.3*966=290[N]$

Como la fuerza es mayor que la máxima el bloque se moverá hacia abajo con rozamiento dinámico:

$F=\mu_k N= 0.2*966=193.2[N]$ y la descompensación de fuerzas deriva en una aceleración a estudiar en dinámica.

University Copy For Library Use

- Beer 09_033.



Determinar momento de inercia y radio de giro del perfil de la figura respecto a eje "y".

$A=A1+A2+A3=1.2*0.3+0.4*2.4+2.4*0.3=2.04[in^2]$

$Iy1=1/12*0.3*1.2^2=0.0432[in^4]$

$Iy2=1/12*2.4*0.4^2=0.0128[in^4]$

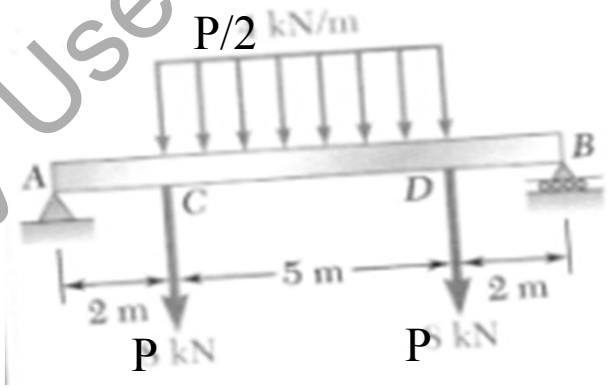
$Iy3=1/12*0.3*2.4^2=0.3456[in^4]$

$Iy=Iy1+Iy2+Iy3=0.4016[in^4]$

$ky=\sqrt{(Iy/A)}=0.444[in]$

University Copy For Library Use

- Examen EXF_0809.



Dada la viga de la figura calcular.

1a: 0.5p. Reacciones en A y en B. Ra=Rb=(0,2.25P)[kN].

1b: 0.5p. Cortante y momento en tramo AC. V=2.25P, M=2.25Px.

1c: 0.5p. Cortante y momento en tramo BD. V=-2.25P, M=2.25P(9-x).

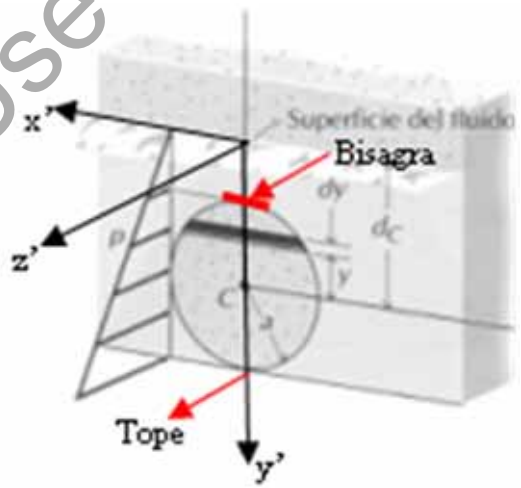
1d: 0.5p. Cortante y momento en tramo CD. V=2.25P-0.5Px, $M=P(1+2.25x-x^2/4)$

1e: 0.5p. Posiciones en x para las que el momento supera los 5.5P[kN·m].

x entre 3 y 6 al igualar el momento con el requerimiento.

University Copy For Library Use

- Examen EXF_0809.



Dada la puerta circular de radio a=1[m] sumergida en agua d_c=5[m] calcular.

0.5p. Fuerza resultante aplicada sobre la compuerta. pg.168 $R=\delta g d_c \pi a^2$.

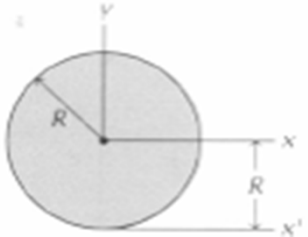
0.5p. Dar la inercia I_x, de la superficie de la compuerta en ejes xyz' de la figura. $I_x'=\pi a^4/4+d_c^2*\pi a^2$.

0.5p. Dar la inercia I_y, y el producto de inercia I_{xy}'. $I_y=\pi a^4/4$, $I_{xy}'=0$.

0.5p. Dar la posición del centro de aplicación de la fuerza desde la superficie del fluido. $x'=0$, $y'= (4d_c^2+a^2)/4d_c= d_c+ a^2/4d_c$.

0.5p. Dar la fuerza en tope y bisagra. $R_t= \delta g d_c \pi a^2*(1+a/4d_c)/2$, $R_b= \delta g d_c \pi a^2*(1-a/4d_c)/2$,.

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}$$



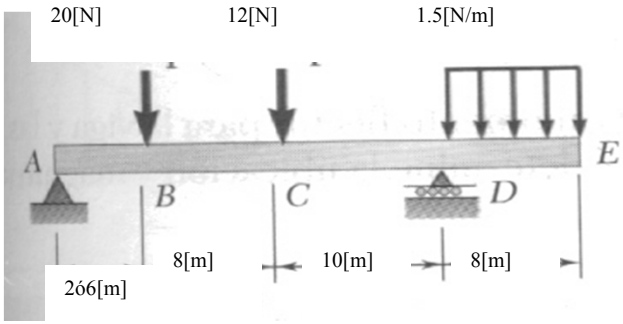
University Copy For Library Use

- Examen EXJ_0809.

Dada la viga de la figura calcular. Beer Est 375

1a: 0.5p. Reacciones en A y en D. 6 . / 2 .

Ra=18[N]; Rd=26[N]. / Ra=21.6[N], Rd=22.4[N].



1b: 0.3p. Cortante y momento en tramo AB (x de 0 a 6 / 0 a 2).

V=18, M=18x., / V=21.6, M=21.6x .

1c: 0.3p. Cortante y momento en tramo BC (x de 6 a 14 / 2 a 10).

V=-2, M=108-2*(x-6) / V=1.6, M=43.2+1.6(x-2) .

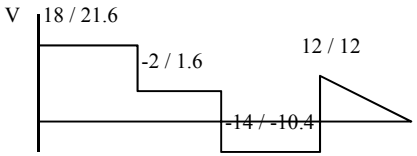
1d: 0.3p. Cortante y momento en tramo CD (x de 14 a 24 / 10 a 20).

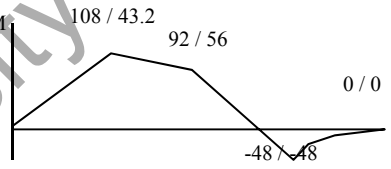
V=-14, M=92-14*(x-14) / V=-10.4, M=56-10.4(x-10) .

1e: 0.3p. Cortante y momento en tramo DE (x de 24 a 32 / 20 a 28).

V=42-1.5x, M=0.75(24-x)^2. / V=42-1.5x ,M=0.75(20-x)^2. .

1f: 0.3p. Dibujar cortante y momento flector.





1g: 0.5p. Posiciones en x para las que el momento supera los 99[N·m].

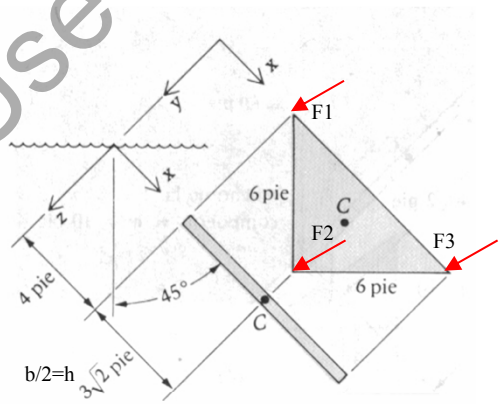
x entre 5.5 y 10.5 al igualar el momento con el requerimiento. /

No sobrepasa el valor de 99 ya que al máximo que se llega es 56 y en negativo -48.

University Copy For Library Use

• Examen EXJ_0809.

Dada la puerta con forma de triángulo rectángulo cuyo vértice está a 4[pies] de la superficie medidos a 45º y cuyo lado largo mide 2*3√2[pies] calcular en unidades métricas: McGill Est 536



0.5p. Fuerza resultante aplicada sobre la compuerta.
pg.168 b/2=h=4.242[pie]=1.293[m], x_1=4[pie]=1.292[m]
x_c=8.24[pie]=2.511[m]
d_c=5.288[pie]=1.792[m]
A=18[pie^2]=1.672[m^2]
R=δgd_cA=1000*9.81*1.792*1.672=29393[N]

0.5p. Dar la inercia I_y, de la superficie de la compuerta en ejes xyz' por centro gravedad de la figura.
I_y'=b/2h^3/36+(h/3)^2*b/2h/2+ b/2h^3/36+(h/3)^2*b/2h/2=b/2h^3/6=54[pie^4]=0.4661[m^4].

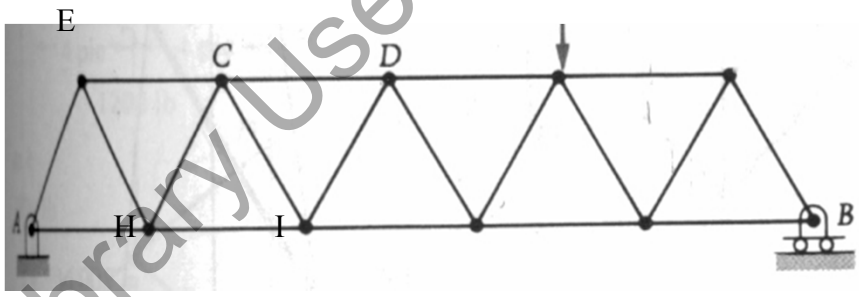
0.5p. Dar la inercia I_x, y el producto de inercia I_{xy}'.
I_x'=bh^3/36=18[pie^4]= 0.1554[m^4] , I_{xy}'=0.

0.5p. Dar la posición del centro de aplicación de la fuerza desde la superficie del fluido.
y'=0, x'= 2.511+0.4661/(2.511*1.672)=2.622[m].

0.5p. Dar la fuerza en cada extremo triángulo.
ΣM_x=29393*1.293/3-F_2*1.293=0⇨F_2=29393/3=979.7 [N]
$\Sigma M_{y\text{-}F1}$=29393*(2.622-1.192)-979.7*1.293-F3*2*1.293=0⇨F_3=29393/3= 15763[N]
ΣF_z=F_1+F_2+F_3-29393=0⇨F_1=12650 [N]

University Copy For Library Use

- Examen EXS_0809.



Dada la estructura de la figura en que cada barra mide L=2 metros y la fuerza aplicada es de P=4 kN calcular indicando tracción positivo y compresión negativo:

1a: 0.5p. Reacciones en A y en B.

R_{by}=P*0.7, R_{ay}=P*0.3, R_{ax}=0.

1b: 0.5p. Fuerzas en barras AE y AH.

AE=-P*0.6/√3, AH=+P*0.3/√3.

1c: 0.5p. Fuerzas en barras EC y EH.

EC=-P*0.6/√3, EH=+P*0.6/√3.

1d: 0.5p. Fuerzas en barras HC y HI.

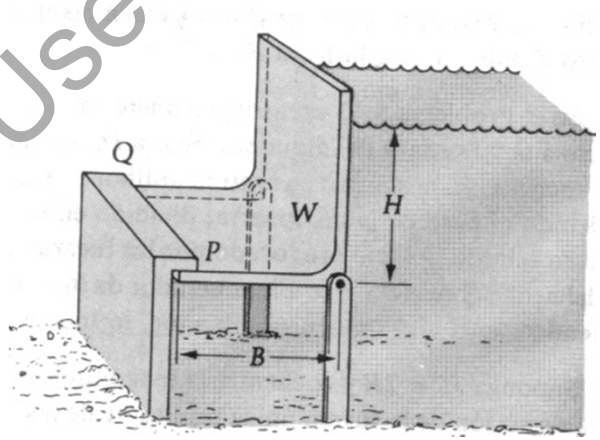
HC=-P*0.6/√3, HI=+P*0.9/√3.

1e: 0.5p. Fuerza en barra CD y CI.

CD=-P*1.2/√3, CI=+P*0.6/√3.

University Copy For Library Use

- Examen EXS_0809.



Dada la compuerta de la figura de peso despreciable calcular para B=1[m], H=1[m] y profundidad L=1[m].

2a: 0.5p. Fuerza resultante aplicada sobre la superficie inferior B.
$R_B=\delta gHBL. \uparrow$
2b: 0.5p. Fuerza resultante aplicada sobre la superficie vertical H.
$R_H=\delta gH^2L/2. \leftarrow$
2c: 0.5p. Fuerza de reacción en apoyo PQ.
$R_{PQy}=R_B/2-R_HH/(3B). \downarrow$
2d: 0.5p. Fuerza de reacción en la bisagra.
$R_{Wy}= R_B-R_{PQy} \downarrow$, $R_{Wx}=\delta gH^2L/2. \rightarrow$
2e: 0.5p. Calcular la altura H para que la compuerta se abra.
$H>B\sqrt{3}$

University Copy For Library Use

- Examen EXF_0910.

1 Esfuerzos internos estática. (2.5p. de 10)

Dada la viga de la figura calcular con una carga concentrada P=36/32/28/24/20/16[kN], una distribuida P/2[kN/m a lo largo de 6 metros y un para en un extremo de valor P/4 antihorario: Riley 8.28.

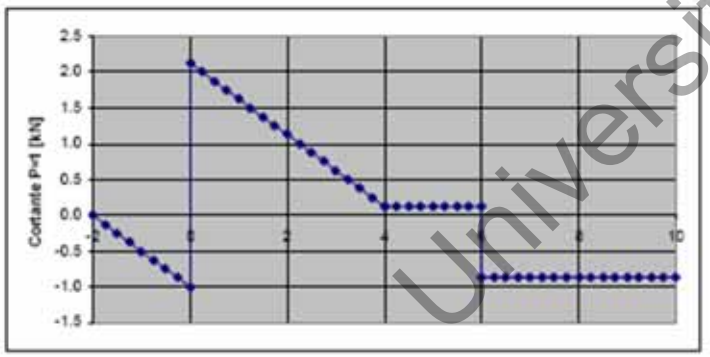
1a: 0.5p. Reacciones en A y en B. Ra=25P/8, Rb=7P/8[kN].
El cortante y momento en x(-2,0) es: $V=-P/2(x+2)$, $M=-P/4-P/2(2+x)^2/2=-5P/4-Px-Px^2/4$

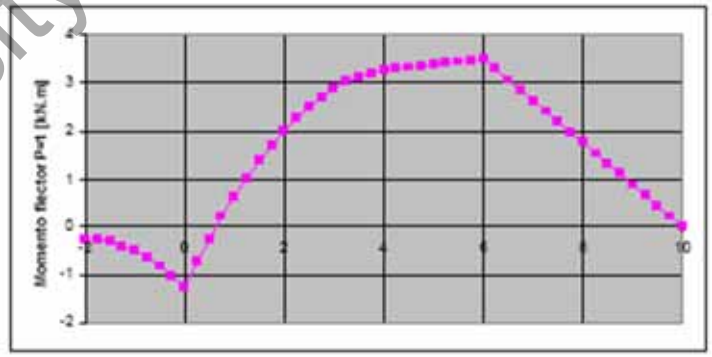
1b: 0.5p. Cortante y momento en tramo x(0,4). $V=17P/8-Px/2$, $M=-P/4-P/2(x+2)^2/2+25Px/8$.

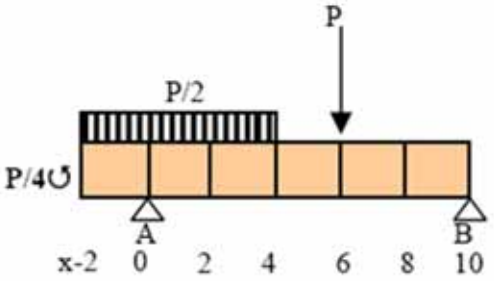
1c: 0.5p. Cortante y momento en tramo x(4,6). V=P/8, M=Px/8+11P/4.

1d: 0.5p. Cortante y momento en tramo x(6,10). V=-7P/8, M=35P/4-7Px/8.

1e: 0.5p. Diagrama de cortante y momentos. Cortante máximo y flector máximo Vmax=17P/8 en x=0der, Mmax=7P/2 para x=6 izq y der.



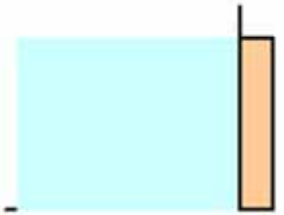




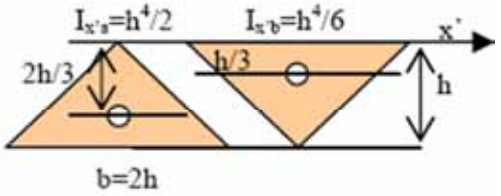
University Copy For Library Use

- Examen EXF 0910.

2 Presión hidráulica en compuerta triangular. (2.5p. de 10)



Dada la puerta triangular de base b=2h y altura h=1.1/1.2/1.3/1.4/1.5/1.6[m] a colocar de dos maneras. Calcular Riley 5.105:



0.5p. Fuerza resultante aplicada sobre la compuerta

$R_A=\delta g 2h^3/3.$

$R_B=\delta g h^3/3.$

0.5p. Dar la inercia I_x de la superficie de la compuerta en ejes centroide

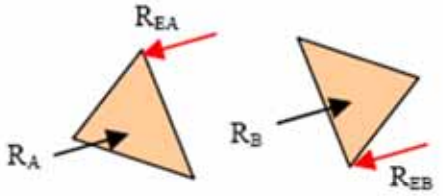
$I_{xA}=h^4/2-(2h/3)^2h^2=h^4/18.$

$I_{xB}=h^4/6-(h/3)^2h^2=h^4/18.$

0.5p. Dar la posición del centro de aplicación de la fuerza desde la superficie del fluido.

$y_A= 2h/3+h^4/18/(2h/3*h^2)= h^4/2/(2h/3*h^2)=3h/4.$

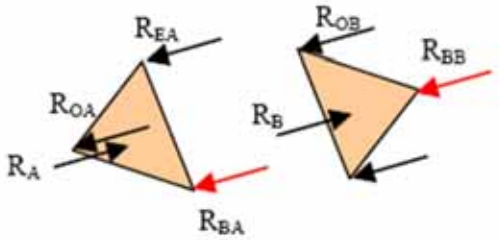
$y_B= h/3+h^4/18/(h/3*h^2)= h^4/6/(h/3*h^2)=h/2.$



0.5p. Dar la fuerza en esquina que evita que la compuerta se abra:

$R_{EA}=R_A(h-y_A)/h=\delta g 2h^3/3*h/4/h=\delta g h^3/6.$

$R_{EB}=R_B(h-y_B)/h=\delta g h^3/3*h/2/h=\delta g h^3/6.$



0.5p. Dar la fuerza en una bisagra que evita que la compuerta se abra:

$R_{BA}=R_A(y_A)/(2h)=\delta g 2h^3/3*3h/4/2h=\delta g h^3/4.$

$R_{BB}=R_B(y_B)/(2h)=\delta g h^3/3*h/2/2h=\delta g h^3/12.$

University Copy For Library Use

- Examen EXJ_0910.

Dada la viga de la figura calcular. McGill Est 312

1a: 0.5p. Reacciones en A y en D.

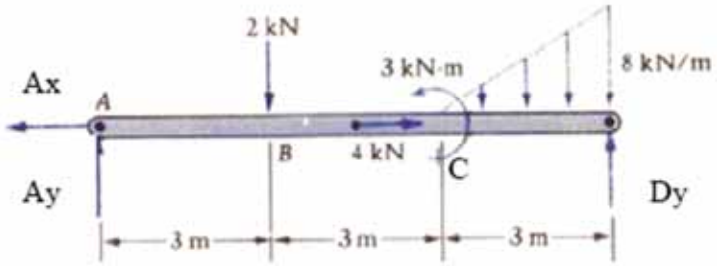
Ax=-4, -2*3-12*8+3+Dy*9=0⇨Dy=11; Ay+Dy=12+2⇨Ay=14-11=3

1b: 0.4p. Cortante y momento en tramo AB (x de 0 a 3).

V=3; M=3x ⇨ V(3)=3, M(3)=9 .

1c: 0.4p. Cortante y momento en tramo BC (x de 3 a 6).

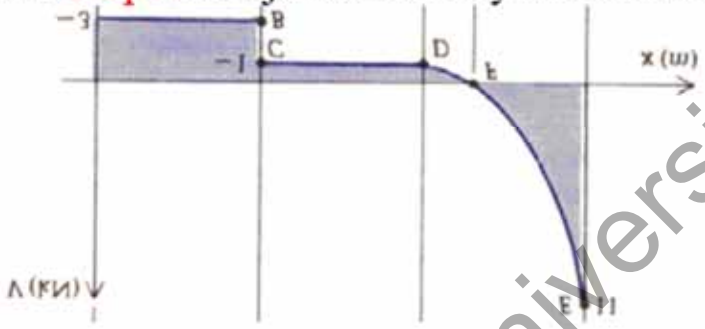
V=1; M=6+x ⇨ V(3)=1, M(3)=9, y V(6)=1, M(6)=12.

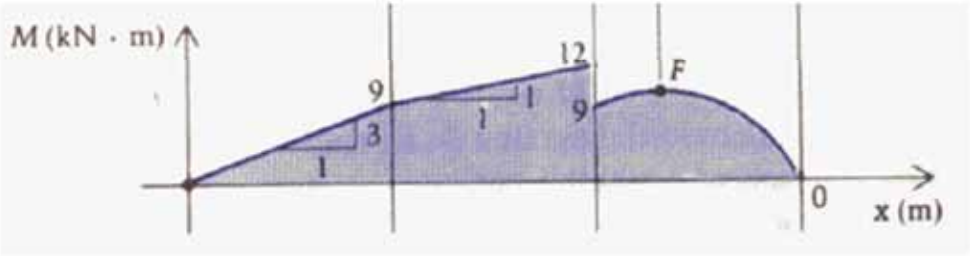


1d: 0.4p. Cortante y momento en tramo CD (x de 6 a 9).

V=1-4/3(x-6)^2; M=4/9(x^3-18x^2+108x-216)-3-x ⇨ V(6)=1, M(6)=9, y V(9)=-11, M(9)=0.

1f: 0.3p. Dibujar cortante y momento flector.





1g: 0.5p. Posiciones en x para las que el momento supera los 10[kN·m] y valor de momento en "F".

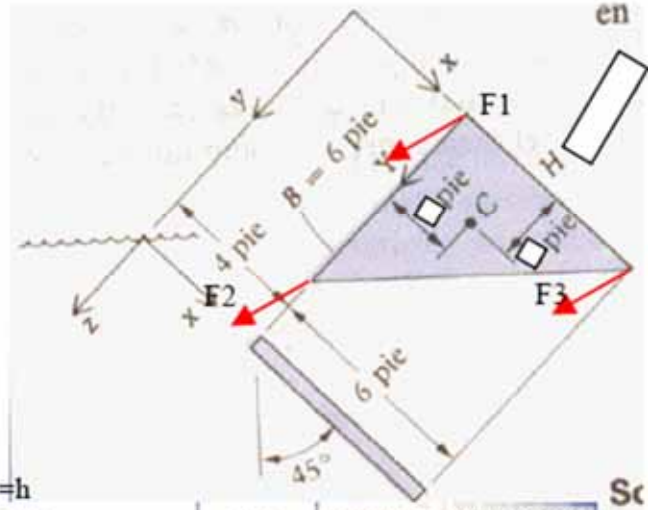
Tramo BC: x+6>10 ⇨ x>4, o sea entre 4y6

Tramo CD no supera. Máximo en F cuando V=0, osea, 0=1-4/3(x-6)^2 ⇨ x=6.866 para el cual M(6.866)=9.58

University Copy For Library Use

- Examen EXJ_0910.

Dada la puerta con forma de triángulo rectángulo cuyo vértice está a 4[pies] de la superficie medidos a 45° y cuyo lado largo mide 2[pies] calcular en unidades métricas (1[pie]=0.3048[m]): McGill Est 537



0.5p. Fuerza resultante aplicada sobre la compuerta.

b=h=6[pie]= 1.829 [m], x_1=4[pie]= 1.219 [m]
x_c=4+2=6[pie]= 1.829 [m]
d_c=6*cos(45)[pie]= 4.243[pie]= 1.293 [m]
A=6*6/2=18[pie^2]= 1.672[m^2]
R=δgd_cA=1000*9.81*1.293*1.672= 21208 [N]

0.5p. Dar la inercia $I_{y'}$ de la superficie de la compuerta en ejes xyz' por centro gravedad de la figura.

$I_{y'}$=bh^3/36=36[pie^4]= 0.3107 [m^4].

0.5p. Dar la inercia $I_{x'}$ y el producto de inercia $I_{xy'}$.

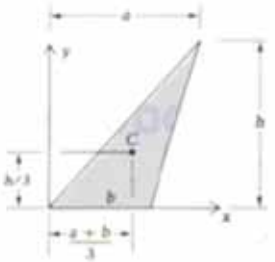
$I_{x'}$=hb^3/36=36[pie^4]= 0.3107 [m^4] , $I_{xy'}$=$(bh)^2$/24-b/3*h/3*bh/2=-$(bh)^2$/72=-18[pie^4]= 0.1553 [m^4].

0.5p. Dar la posición del centro de aplicación de la fuerza desde la superficie del fluido.

y=2-18/((4+2)*18)=1.83[pie]= 1.83 [m], x=4+2+36/((4+2)*18)=6.33[pie]= 1.929 [m].

0.5p. Dar la fuerza en cada extremo triángulo.

ΣM_x= F_2*6=21208*1.83 =0⇨F_2= 6468 [N]
$\Sigma M_{y\text{-}F1}$= F_3*6=21208*2.33 =0⇨F_3= 8238 [N]
ΣF_z=F_1+F_2+F_3-21208=0⇨F_1= 6504 [N]

Figura	Area	Momentos y productos de inercia
	$\frac{1}{2}bh$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_{x'} = \frac{bh}{12}(a^2 + ab + b^2)$ $I_{xy} = +\frac{bh^2}{24}(2a + b)$

University Copy For Library Use

- Examen EXS_0910.

1 Esfuerzos internos estática. (2.5p. de 10)

Dada la viga A-D y la D-F unidas por un pasador en D dar:

1a: 0.5p. Reacciones en F y pasador D.

F= 25 [N] D= 75 [N].

1b: 0.5p. Reacciones en A y C.

A= 75 [N] C= 150 [N].

1c: 0.5p. Cortante y Momento en viga tramos AB,BC y CD.

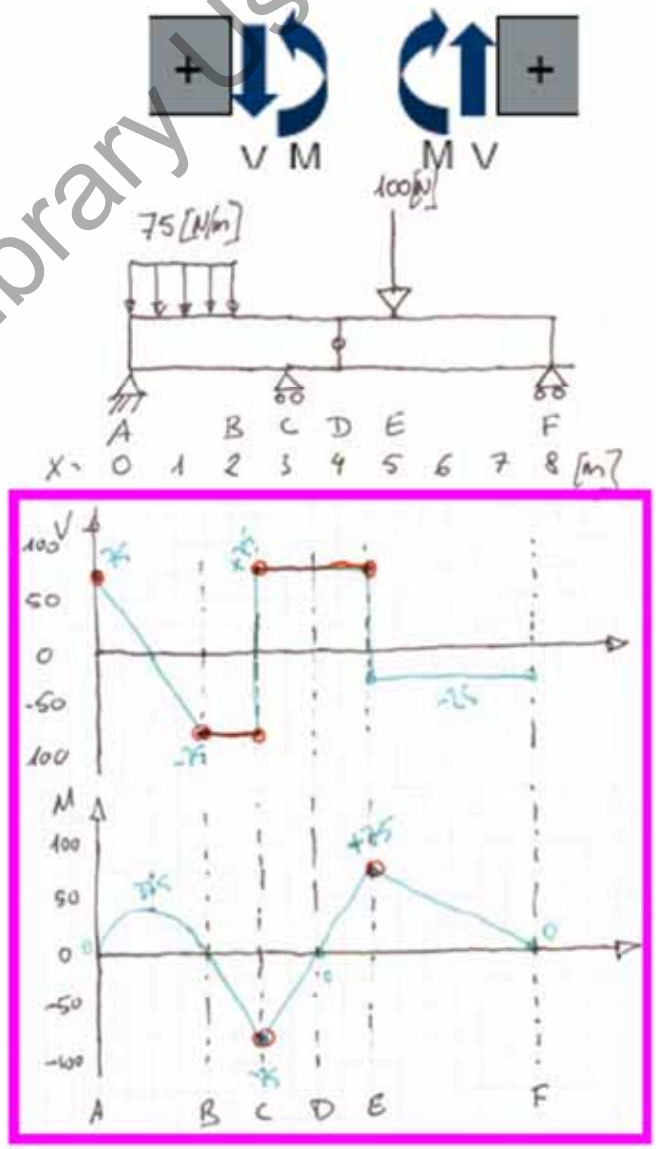
Vab= 75(1-x) [N] Mab= $75(x-x^2/2)$ [N.m].
Vbc= -75 [N] Mbc= -75(x-2) [N.m].
Vcd= 75 [N] Mcd= 75(x-4) [N.m].

1d: 0.5p. Cortante y momento en viga tramos DE y EF.

Vde= 75 [N] Mde= 75(x-4) [N.m].
Vef= -25 [N] Mef= -25(x-8) [N.m].

1e: 0.5p. Valor y posición de cortante y momento máximo en valor absoluto.

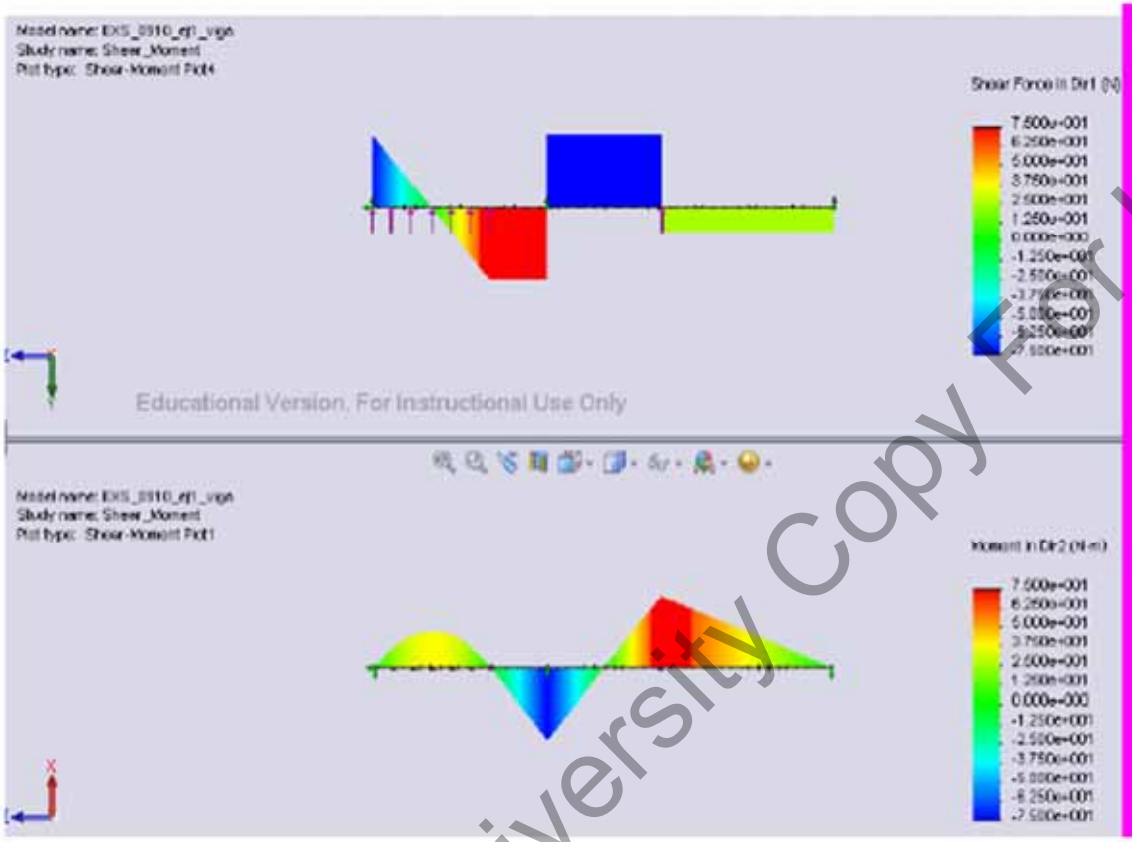
Vmax x= 0,2 a 3y 3 a 5 [m] Vmax= 75 [N]
Mmax x= 3 y 5 [m] Mmax= 75 [N.m].

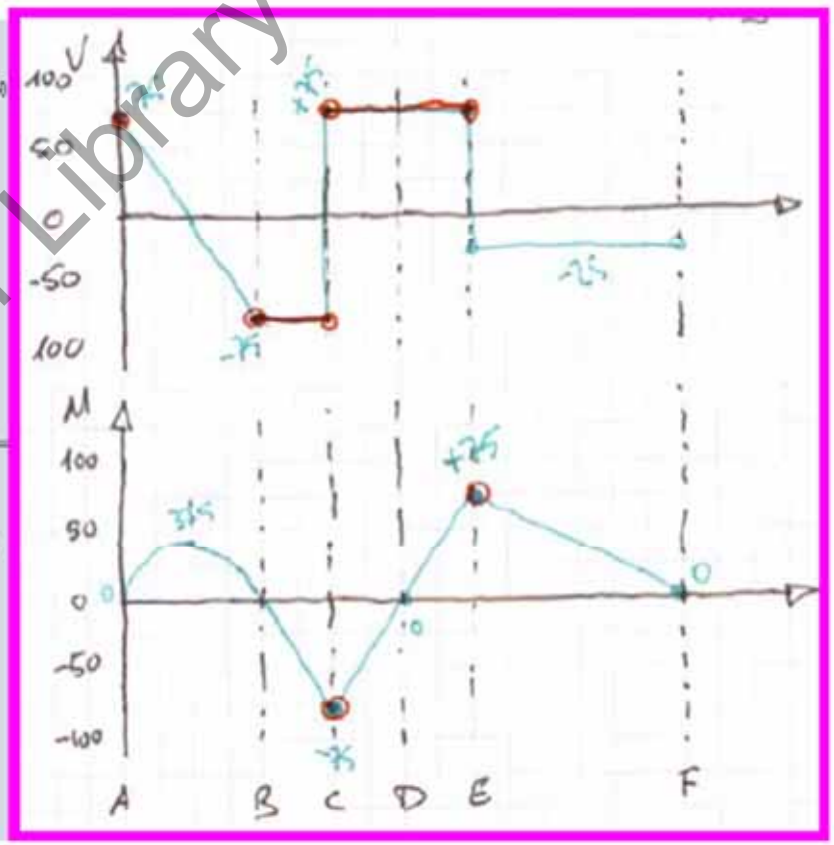


University Copy For Library Use

- Examen EXS_0910.

1.- Los signos de SolidWorks son opuestos a la teoría de Mecánica.





University Copy For Library Use

- Examen EXS_0910.

2 Presión hidráulica en compuerta. (2.5p. de 10)

Dada la compuerta triangular que no está del todo sumergida calcular.

2a: 0.5p. Profundidad de centro de gravedad superficie sumergida.

h_{cg}= (1*2+1.33*2)/(2+2)=1.167[m].

2b: 0.5p. . Fuerza hidráulica resultante aplicada sobre la compuerta.

R=δghA=1000*9.805*(1*2+1.33*2)/(2+2)*(2+2)=45.77[kN].

2c: 0.5p.. Profundidad centro aplicación fuerza hidráulica

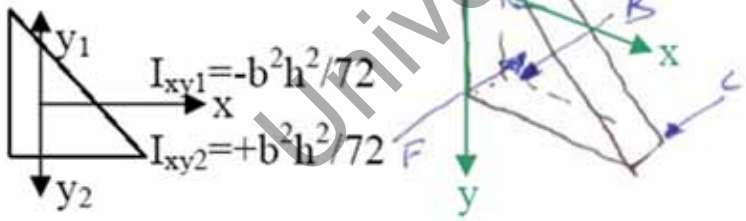
$y_a=I_{xx}/h_{cg}A$=1.429[m].

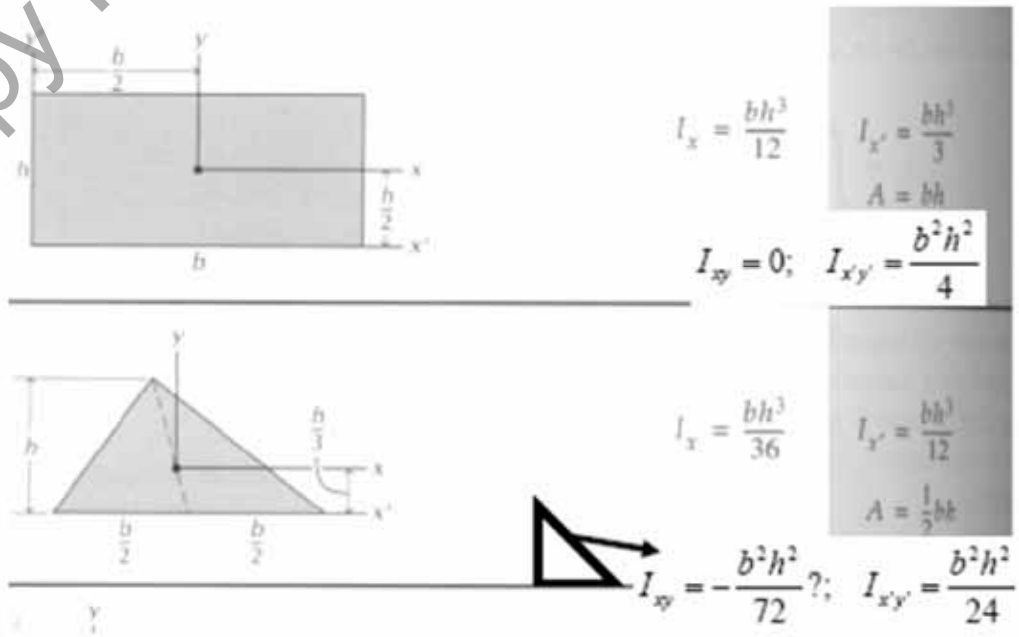
2d: 0.5p.Posición en X de centro aplicación

$x_a=I_{xy}/h_{cg}A$= 1.214[m]

2e: 0.5p..

A=8717[N],
B=18520[N],
C=18520[N]

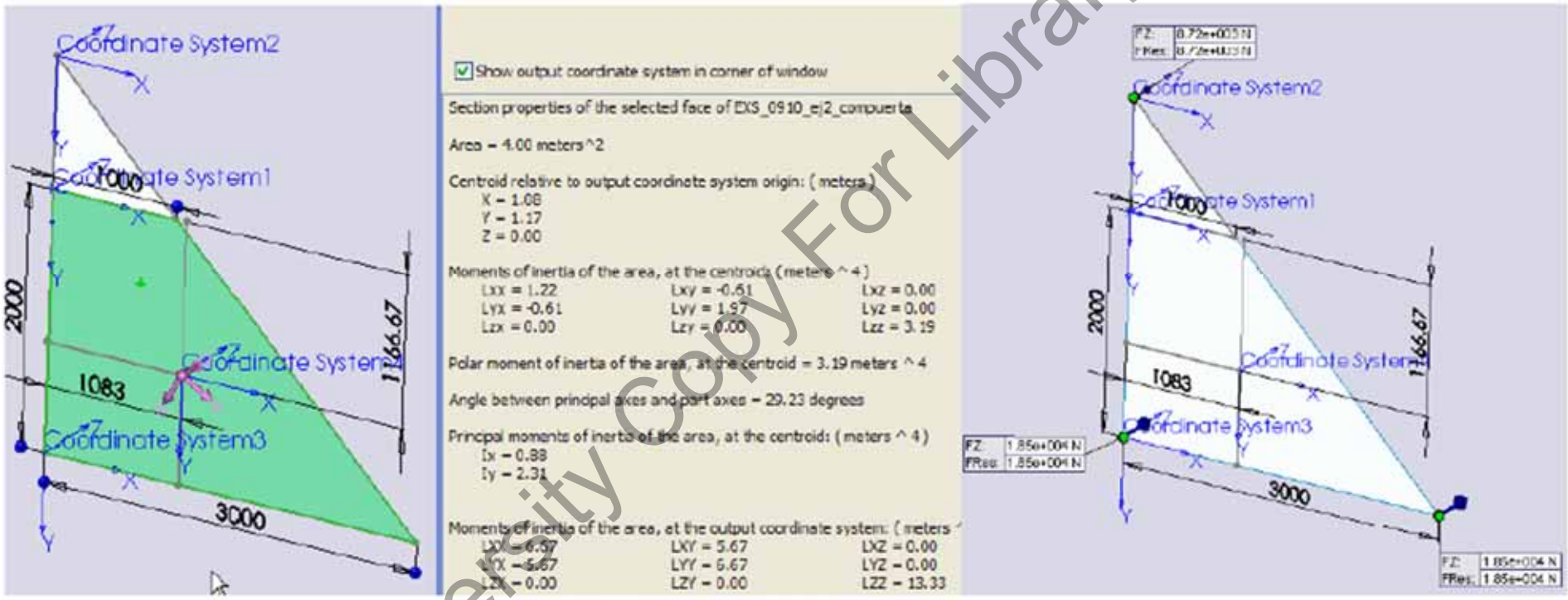




University Copy For Library Use

- Examen EXS_0910.

2.- Las inercias y las reacciones comprobadas con SW.



University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Repaso a ejercicios de estática.

University Copy For Library Use

S40t.- Ejercicios de Estática.

University Copy For Library Use

Mejora 1314 ....

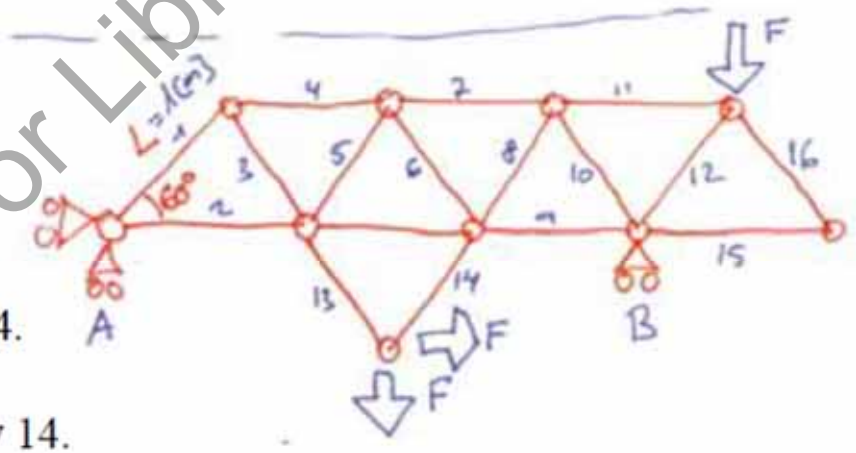
- Repaso sesión anterior.
  - Ejercicios de estática.

University Copy For Library Use

- Examen EXJ_1011 y EXS_1011.

1 Esfuerzos internos estática. (2.5p. de 10)

Dada la estructura de la figura calcular para F=100[N].



1a: 0.5p. Reacciones en A y en B.

A_x=-F=-100[N]; B_y=F(5-0.866)/3=137.8[N]; A_y=2F-By=62.2[N];

1b: 0.5p. Barras de fuerza nula.

Barras nulas 15 y 16 por estar en esquina sin carga.

1c: 0.5p. Esfuerzos tracción (+) o compresión (-) en 3 y 4.

Barra T3=F*0.622/0.866=71.8 [N]; Barra T4=-T3=-71.8 [N];

1d: 0.5p. Esfuerzos tracción (+) o compresión (-) en 13 y 14.

Barra T14=-F*0.366/0.866=-42.3 [N]; Barra T13=2F+T14= 157.7 [N];

1e: 0.5p. Esfuerzos tracción (+) o compresión (-) en 11 y 12.

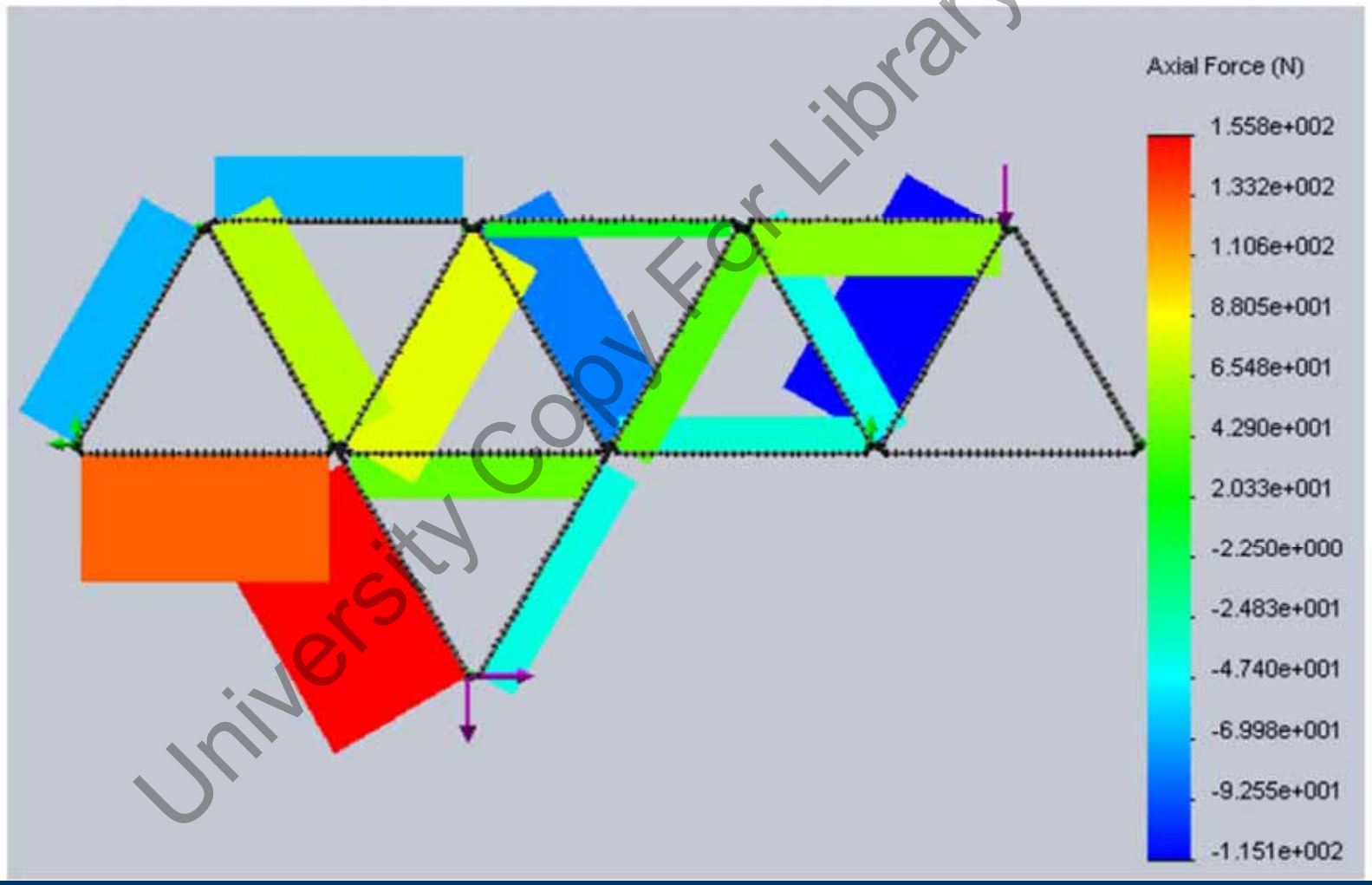
Barra T12=-F*1/0.866=-115.5 [N]; Barra T11=-T12/0.5= 57.7 [N];

University Copy For Library Use

- Examen EXJ_1011 y EXS_1011.

SOLUCIONES SOLIDWORKS

1.-

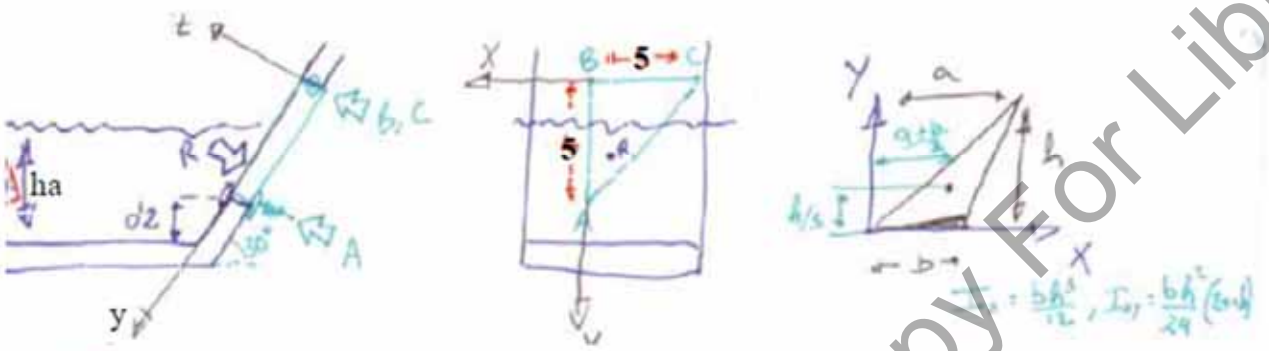


University Copy For Library Use

- Examen EXF1112 y EXJ_1112.

1 Presión hidráulica en compuerta. (2.5p. de 10)

Dada la compuerta triangular de 5[m]x5[m] de acero de densidad δ=8000[kg/m3] y colocada semisumergida según dibujo para una altura de agua ha=1.x[m] calcular:



1a: 0.5p. Fuerza resultante aplicada sobre la compuerta
R= δg2(1.x-0.2)^3/3.

1b: 0.5p. Dar y_{ap} de la fuerza resultante
y_{ap}= 5-(1.x-0.2)2+((1.x-0.2)2)^4/12/((1.x-0.2)2/3(1.x-0.2)^2/2)=5-(1.x-0.2) en mitad zona sumergida.

1c: 0.5p. Dar la reacción en A.
A= R(5-(1.x-0.2))/5.

1d: 0.5p. Dar x_{ap} de la fuerza resultante:
x_{ap}= -((1.x-0.2)2)^4/24/((1.x-0.2)2/3(1.x-0.2)^2/2)=-(1.x-0.2)/2 en una cuarta parte.

1e: 0.5p. Dar la reacción en B y en C.
C= R((1.x-0.2))/10.

B= R((1.x-0.2))/10.

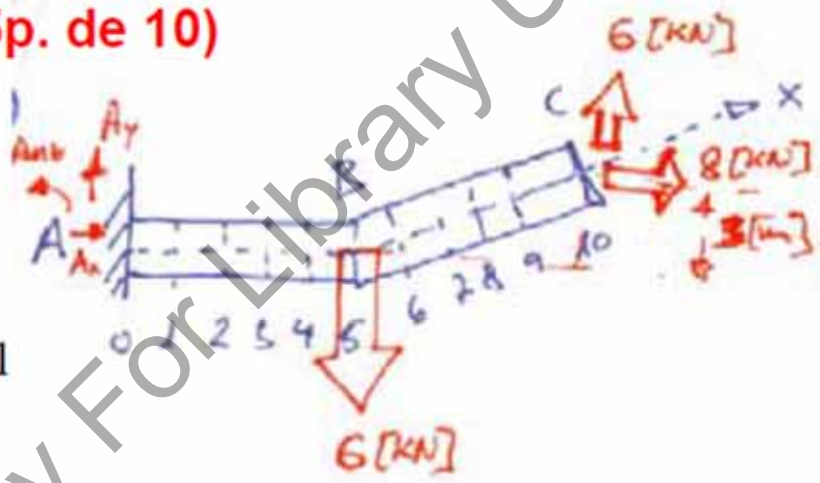
1f: * SUBIR NOTA. Dar altura de agua para la que se abriría la compuerta si en A se coloca un muelle de k=313760[N/m] comprimido 0.1[m] para asegurar estanqueidad hasta la altura a calcular en que se abrirá y dejará pasar el agua.
ha= 31376=δg2(ha-0.2)^3/3(5-(ha-0.2))/5 ⇨ ha=2.2[m]

University Copy For Library Use

- Examen EXS1112.

1 Esfuerzos internos estática. (2.5p. de 10)

Dada la viga empotrada ABC de 5+5 metros de largo calcular.



1a: 0.5p. Reacciones en A.

A_x= -8 [kN]; A_y= 0 [kN]; A_{mz}= 0 [kN.m];

1b: 0.5p. Esfuerzos cortantes V, flector M y axial A en tramo AB en función de x.

A= 8 [kN]. V= 0 [kN] M= 0 [kN.m]

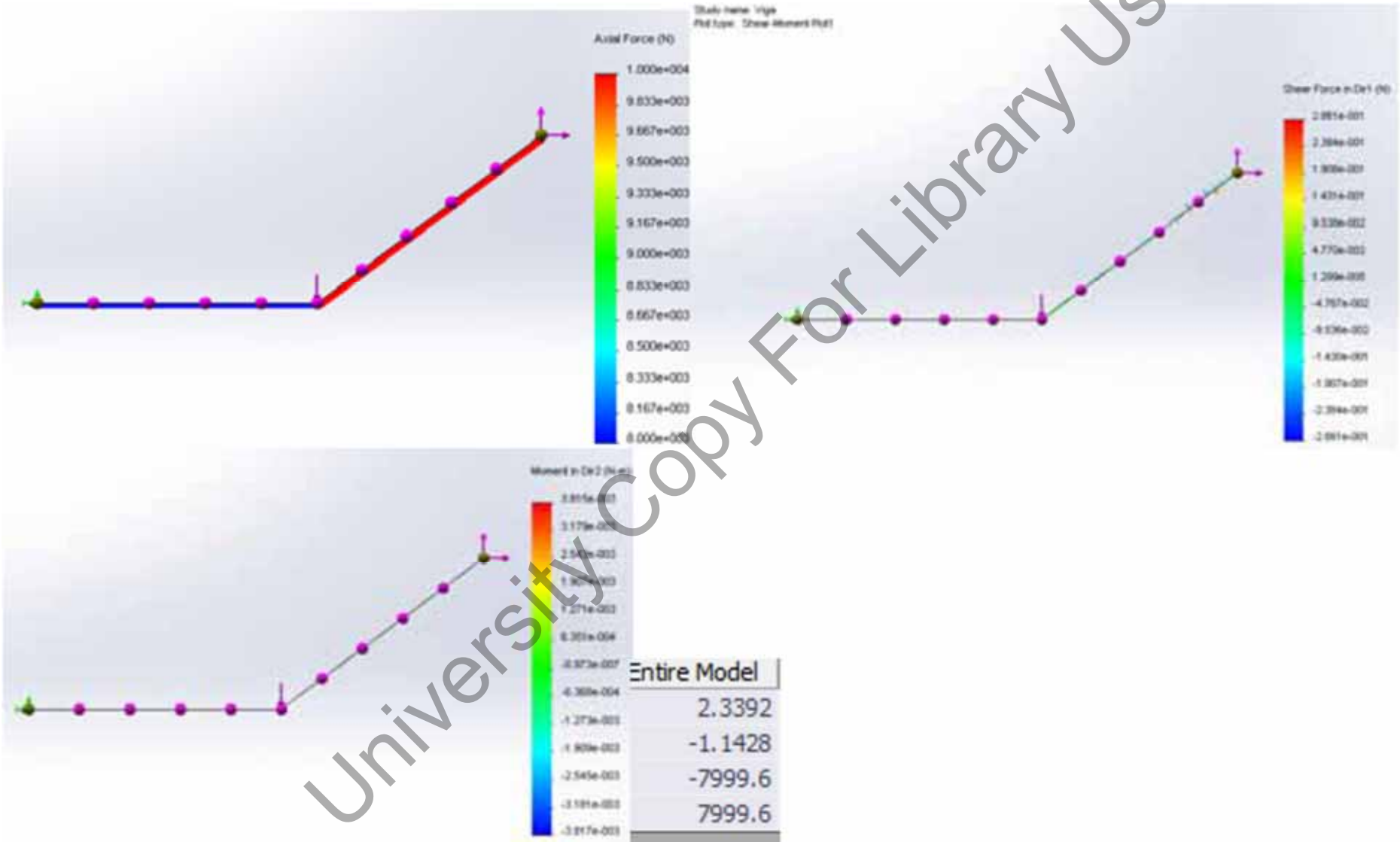
1c: 1.0p. Esfuerzos cortantes V, flector M y axial A en tramo BC en función de x.

A= 10 [kN]. V= 0 [kN] M= 0 [kN.m]

1e: 0.5p. Dibujar gráfica de V, M y A.

University Copy For Library Use

- Examen EXS1112.



University Copy For Library Use

- Examen EXJ_1011 y EXS_1011.

2 Presión hidráulica en compuerta. (2.5p. de 10)

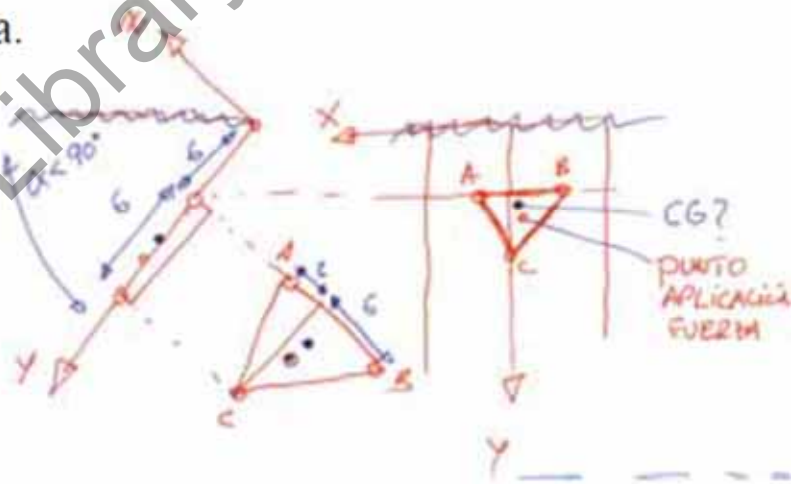
Dada la puerta con forma de triángulo de la figura calcular para α=80º:

2a: 0.5p. Coordenadas (x,y) del centro de gravedad de compuerta.

x_c=(6+9)/3-6= -1 [m]
y_c=(6)/3+6= 8 [m]
A=9*6/2=27[m^2]

2b: 0.5p. Dar fuerza en la compuerta.

R=$\delta g d_c A$=1000*9.805*8*seno(80º)*27= 2.085e6 [N]=2.085[MN]



2c: 0.5p. Dar la coordenada y de aplicación de fuerza.

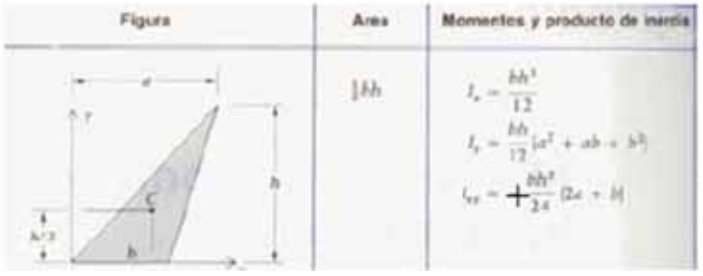
I_{x_cg}=bh^3/12-(h/3)^{2}bh/2=54[m^4]
I_{x_sup}=54+82*27=1782[m^4]
y_{ap}=1782/(8*27)=8.25[m]

2d: 0.5p. Dar la coordenada x de aplicación de fuerza.

I_{xy_cg}=+bh^2(2a+b)/24-(h/3)((a+b)/3)bh/2=13.5[m^4]
I_{xy_sup}=13.5+1(-8)27=-202.5[m^4]
x_{ap}=-202.5/(8*27)=-0.9375[m]

2e: 0.5p. Dar las fuerzas en cada esquina A,B y C que evitan que se abra la compuerta.

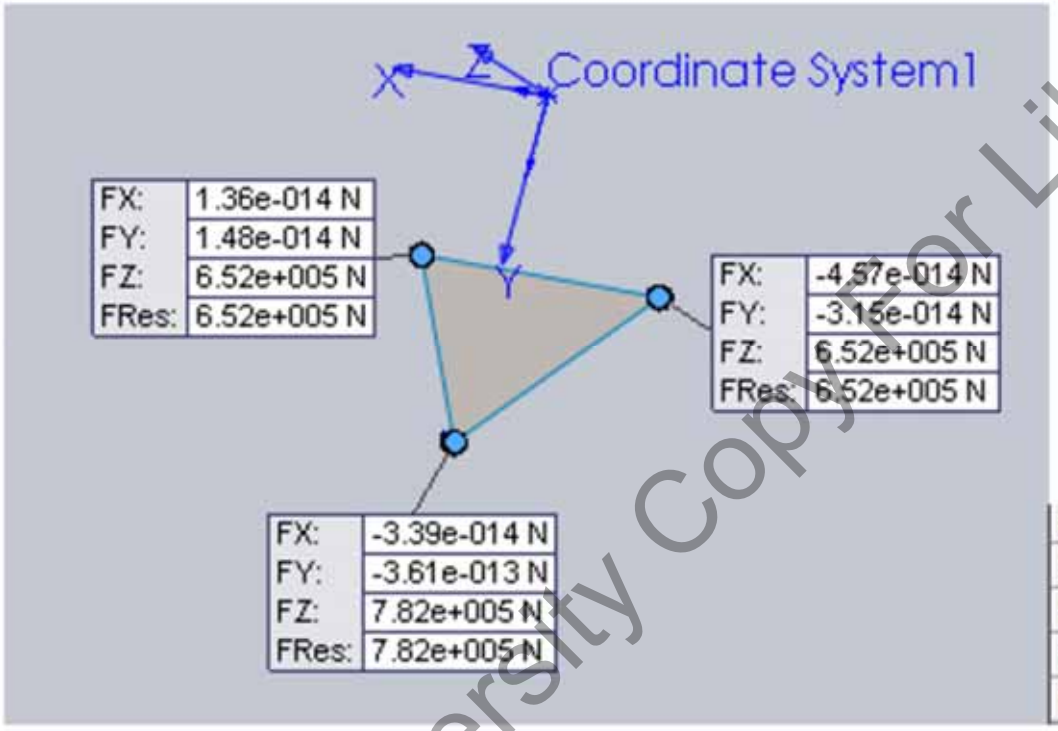
F_B=2.085(8.25-6)/6=0.781[MN]
F_A=(-0.782*6+2.085(5.062)/9=0.652[MN]
F_c=2.085-0.782-0.652=0.652[MN]



University Copy For Library Use

- Examen EXJ_1011 y EXS_1011.

2.-



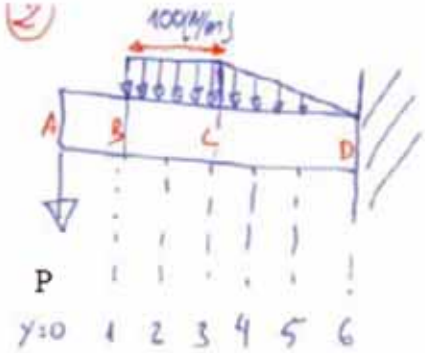
Component	Selection	Entire Model
Sum X:	-6.6002E-014	-6.6002E-014
Sum Y:	-3.7736E-013	-3.7736E-013
Sum Z:	2.0858E+006	2.0858E+006
Resultant:	2.0858E+006	2.0858E+006

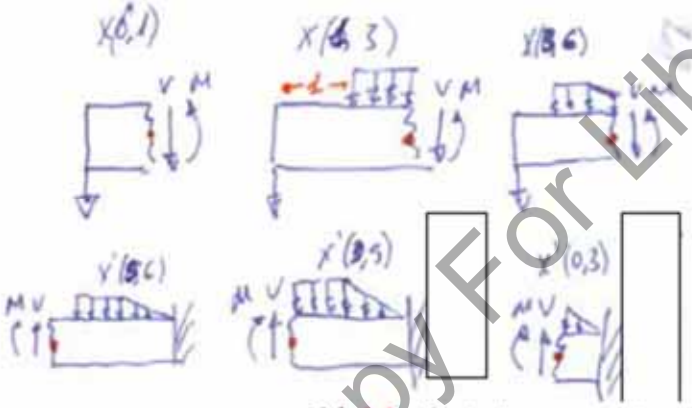
University Copy For Library Use

- Examen EXF1112 y EXJ_1112.

2 Esfuerzos internos estática. (2.5p. de 10)

Dada la viga cargada en un extremo con P=20α[N] y una carga distribuida entre 1y3 de 100[N/m] que cae hasta cero de 3 a 6 como se ve en la figura. Se pide calcular:





2a: 0.5p. Reacciones en D.

D_x= 0.

D_y= 55α

M_{DZ}= -(2300+6α)

2b: 0.5p. Cortante y momento en tramo x(0,1).

V= -20α

M= -20αx. , M(1)= -20α

2c: 0.5p. Cortante y momento en tramo x(1,3).

V= -20α -100(x-1), V(3)=-400-α.

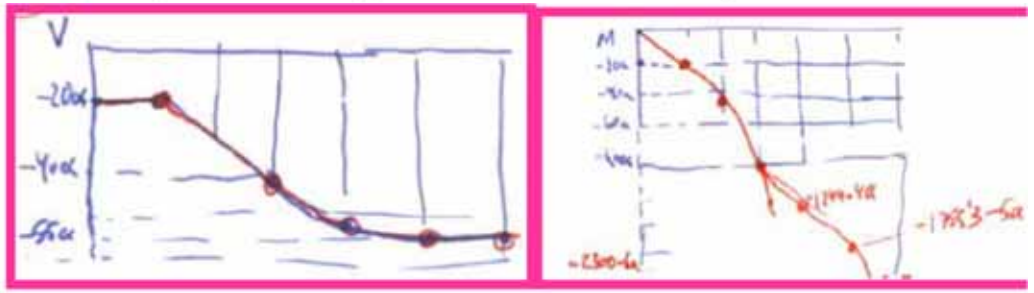
M= -20αx -100(x-1)^2/2. , M(2)=-450-2α, M(3)=-800-3α

2d: 0.5p. Cortante y momento en tramo x(3,6) o x'(0,3) para x'=(6-x).

V= -100x'^{2}/6-55α , V(4,x'=2)=-489-α, V(5,x'=1)=-533-α, V(6,x'=0)=-550-α.

M= 55αx'-(2300+6α)-(100x'^{3}/18). M(4,x'=2)=-1244-4α, M(5,x'=1)=-1755-5α, M(6,x'=0)=-2300-6α

2e: 0.5p. Diagrama de cortante y momentos. Cortante máximo y flector máximo



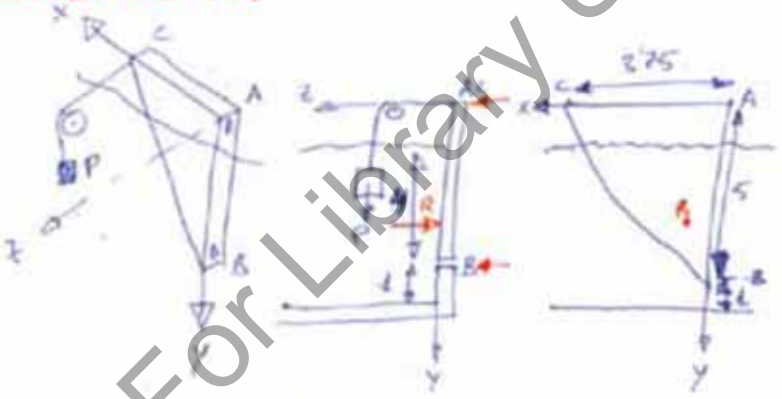
2f: * SUBIR NOTA. Dar posiciones en las que |M|>1244.4+4α.

X entre 4 y 6 [m]

University Copy For Library Use

- Examen EXS1112.

2 Presión hidráulica en compuerta. (2.5p. de 10)



Dada la puerta con forma de triángulo con bisagras en A y B y cierre en C con contrapeso de hormigón P de densidad $\delta=2300[kg/m^3]$ se pide:

2a: 0.5p. Dar fuerza en la compuerta cuando la altu total es 5 metros.

$R=\delta g d_c A= 1000*9.805*4/3*(4*3/2)=78440[N]=78.44\ [kN]$

2b: 0.5p. Dar la coordenada y de aplicación de fuerza cuando la altura de agua total es 5 metros.

$I_{x\_cg}=bh^3/12-(h/3)^2bh/2=bh^3/36=3*4^3/36=5.33\ [m^4]$

$I_{x\_sup}= bh^3/12=16\ [m^4]$

$y_{sp}= 1+4/3+5.33/(4/3*6)=3$ ó $1+16/(4/3*6)=3\ [m]$

2c: 0.5p. Dar la coordenada x de aplicación de fuerza cuando la altura de agua total es 5 metros.

$I_{xy\_cg}= b^2h^2/24-b/3*h/3*bh/2=- b^2h^2/72=3^2*4^2/72=-2[m^4]$

$I_{xy\_sup}= b^2h^2/24=3^2*4^2/24=6=[m^4]$

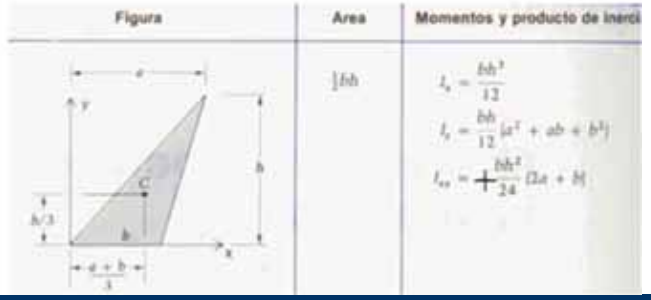
$x_{sp}= 0+3/3+-2/(4/3*6)=0.75$ ó $0+6/(4/3*6)=0.75\ [m]$

2d: 0.5p. Dar las fuerzas en cada esquina A,B y C que evitan que se abra la compuerta.

$F_c= R*x/3.75=78.44*0.75/3.75=15.69\ [kN]$

$F_B= R*y/5=78.44*3/5=47.06\ [kN]$

$F_A= R-Fc-F_B= 78.44-15.69-47.09=15.66\ [kN]$

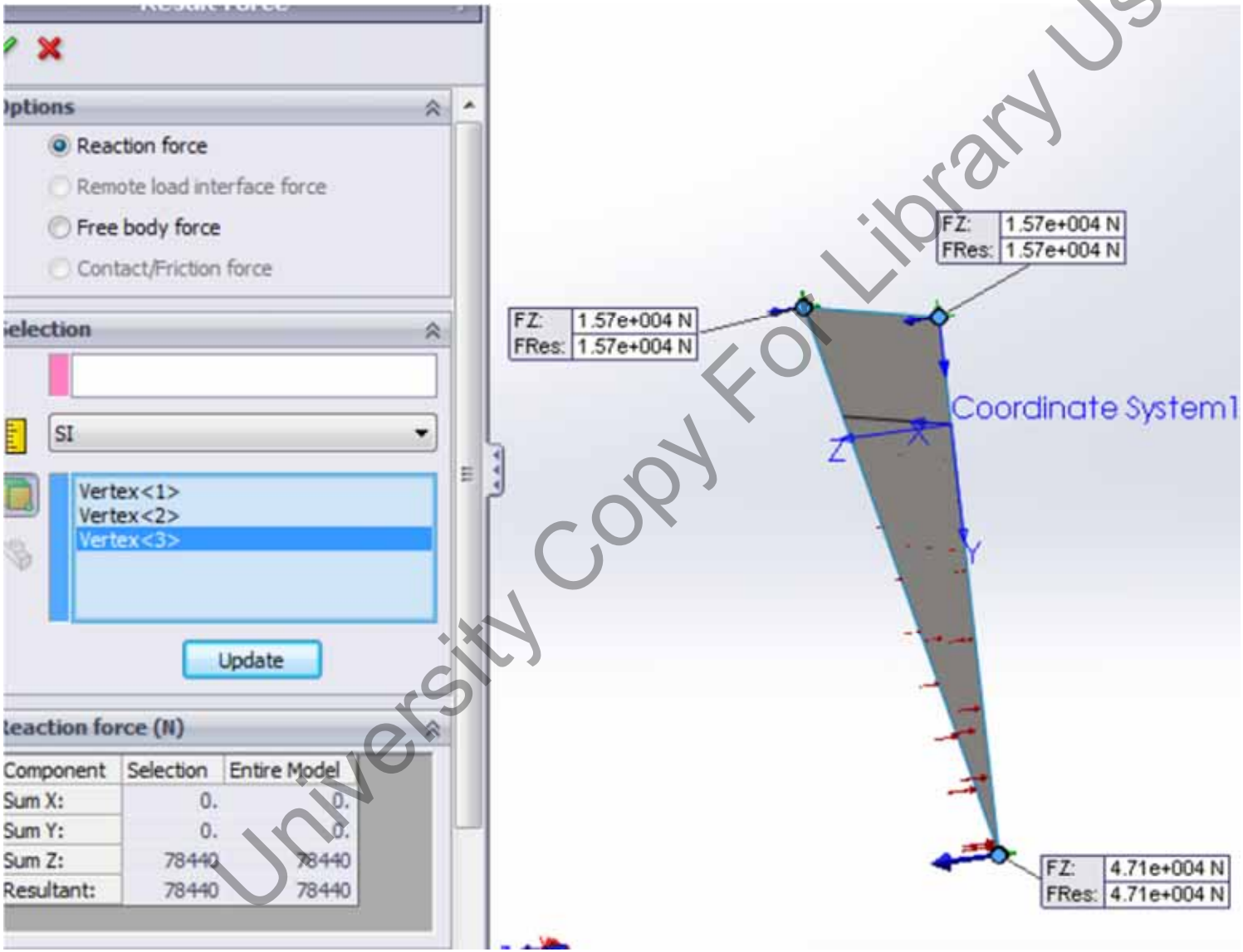


2d: 0.5p. Dar el peso a colocar para garantizar que está cerrada para alturas menores a 5 metros y se abra justo en ese instante.

$P= F_C/(g*(1-\delta_a/\delta_h))=15609/(9.805(1-1000/2300))=2830[kg]=2.83\ [tn]$

University Copy For Library Use

- Examen EXS1112.

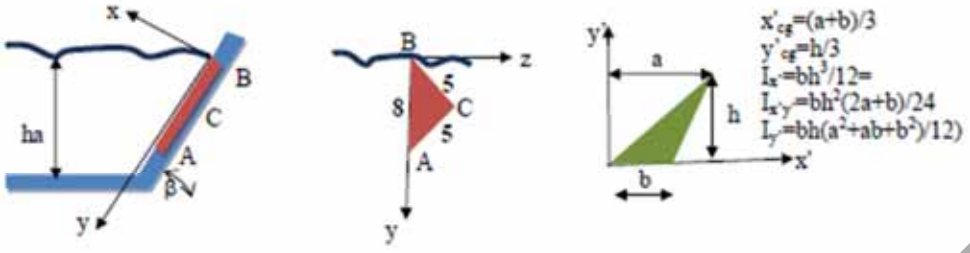


University Copy For Library Use

- Examen EXF1211, EXJ1213.

1 Presión hidráulica en compuerta. (2.5p. de 10)

Dada la compuerta triangular de AB=8[m] BC=5[m] y AC=5[m] de acero de densidad δ=8000[kg/m^3] y colocada con la punta B en la superficie de agua (eje Z) y eje BA en dirección Y. La altura de agua ha=10[m] y el ángulo β es 71°:



1a: 0.5p. Fuerza resultante aplicada sobre la compuerta
R= δ g 4 sin(β) (2*4*3/2)=0.4706 sin(β) [MN]= 0.4450, para b=8, h=3, a=4, A=8*3/2=12.

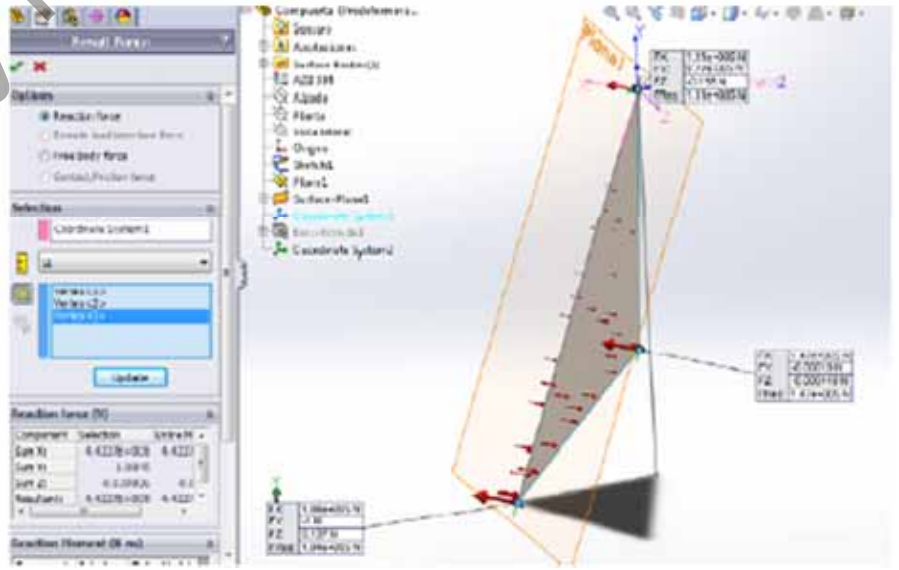
1b: 0.5p. Dar y_{zp} de la fuerza resultante
y_{zp}= ($7b^3h/48$)/(b/2*b*h/2)=7b/12=4.667.

1c: 0.5p. Dar z_{zp} de la fuerza resultante:
z_{zp}= ($b^3h^2/12$)/(b/2*b*h/2)=h/3=1.000 en centroide pues es simétrica y por tanto I_{xy}=0.

1c: 0.5p. Dar la reacción en C.
C= (Rh/3)/h=R/3=0.3333R.

1e: 0.5p. Dar la reacción en B y en C.
A= R(7b/12-(b/2)/3)/b=R5/12=0.4167R.

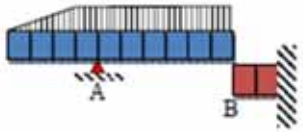
B= R(1-4/12-5/12)=R3/12=0.2500R.



University Copy For Library Use

- Examen EXF1211, EXJ1213.

La viga AB se apoya en la viga empotrada BC. La viga AB tiene una carga triangular que empieza en x= hasta llegar a 100[N/m] en x=3 que se mantiene constante hasta el punto B en x=10[m]. El apoyo A está en x=4[m]. La viga BC mide tan sólo 2 metros desde x=10 hasta x=12[m]. Se pide calcular:



2a: 0.5p. Reacciones en A, B y C.

A_y= (100*7*3.5+100*3/2*8)/6=608.3 [N]

B_y= (100*7*2.5-100*3/2*2)/6=241.7 [N]

C_y= B_y=241.7 [N]

C_{Mz}= -2*By=-483.3 [Nm]

2b: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(0,3).

V(x)= -16.66 x^2 [N]	V(0)= 0 [N]	V(3)= -150 [N]
M(x)= -5.555 x^3 [Nm]	M(0)= 0 [Nm]	M(3)= -150 [Nm]

2c: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(3,4).

V(x)= -150-100 (x-3) [N]	V(3)= -150 [N]	V(4)= -250 [N]
M(x)= -150 (x-2)-100 $(x-3)^2$/2 [Nm]	M(3)= -150 [Nm]	M(4)= -350 [Nm]

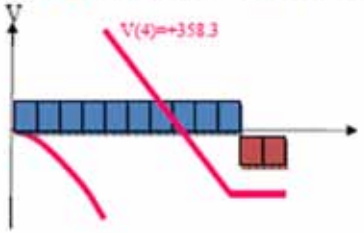
2d: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(4,10).

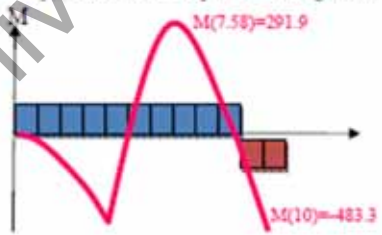
V(x)= -150-100 (x-3)+608.3 [N]	V(4)= +358.3 [N]	V(10)= -241.7 [N]
M(x)= -150 (x-2)-100 (x-4)(x-3)/2+608.3 (x-4)	M(4)= -350 [Nm]	M(10)= 0 [Nm]

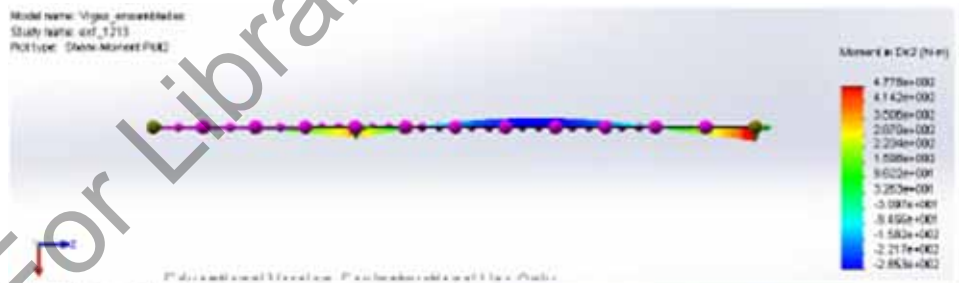
2e: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(10,12) de la segunda viga.

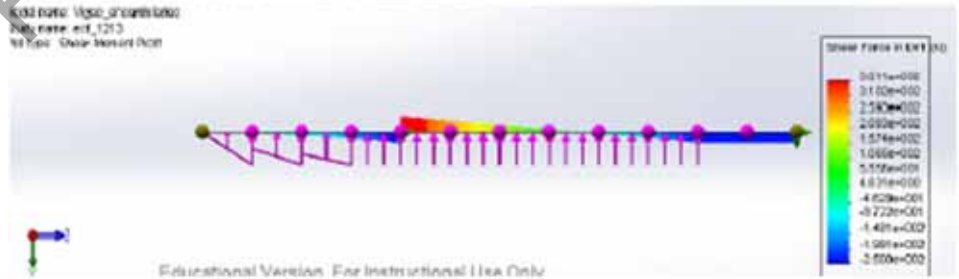
V(x)= -241.7 [N]	V(10)= -B=-241.7 [N]	V(12)= -241.7 [N]
M(x)= -241.7 (x-10) [Nm]	M(10)= 0 [Nm]	M(12)= -483.3 [Nm]

2f: 0.4p. Diagrama de cortante y momentos. Cortante máximo y flector máximo y mínimo negativo







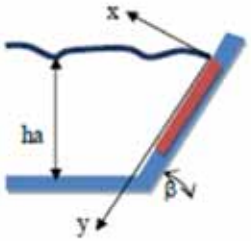


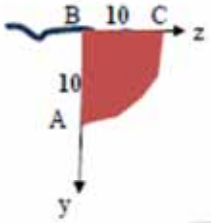
University Copy For Library Use

- Examen EXS1213.

1 Presión hidráulica en compuerta. (2.5p. de 10)

Dada la compuerta de cuarto de círculo de radio r=10[m] de acero de densidad ϑ=8000[kg/m^3] y colocada con la línea BC en la superficie de agua (eje Z) y eje BA en dirección Y. La altura de agua ha=12[m] y el ángulo β es 71° calcular::





$$I_x = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{4R^4}{9\pi}$$

$$I_{xy} = \frac{(9\pi - 32)R^4}{72\pi}; \quad I_{xy} = \frac{R^4}{8}$$

1a: 0.5p. Fuerza resultante aplicada sobre la compuerta

F= ϑ g (4*r/(3π))* sin(β)) (π*r^2/4)=3.268 sin(β) [MN]= 3.090 [MN]

1b: 0.5p. Dar y_{sp} de la fuerza resultante

y_{sp}= (π^4/16)/ ((4*r/(3π))* (π*r^2/4)) =5.890 [m] por debajo de ycg=4.244[m]

1c: 0.5p. Dar z_{sp} de la fuerza resultante:

z_{sp}= (r^4/8)/ ((4*r/(3π))* (π*r^2/4)) =3.750 [m] a la izquierda de centroide

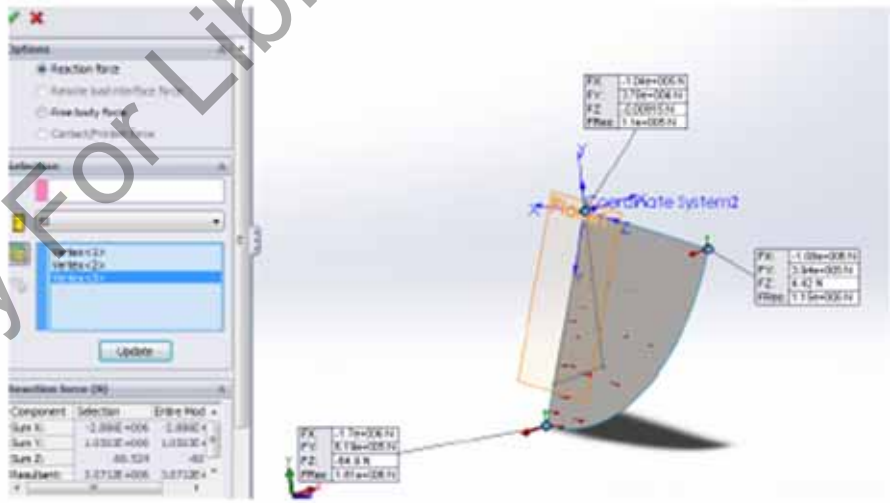
1c: 0.5p. Dar la reacción en C.

C= (F*z_{sp})/r=1.159[MN]

1e: 0.5p. Dar la reacción en B y en A.

A= (F*y_{sp})/r= 1.820[MN]

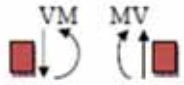
B= F-A-C=0.111[MN]



University Copy For Library Use

- Examen EXS1213.

La viga BC se apoya en las vigas empotrada AB y CD de 1[m] cada una. La viga BC tiene una carga triangular que empieza en x=1 hasta llegar a 100[N/m] en x=4 que se mantiene constante hasta el punto C en x=11[m]. La viga AB va de x=0 a x=1[m] y la viga CD va de x=11 a x=12[m]. Se pide calcular:



2a: 0.5p. Reacciones en A, y D.

D_y= (100*3/2*2/3*3+100*7*(3+3.5))/10=485 [N]

D_{Mz}= -1*Dy= -485[Nm]

A_y= (150+700-D_y)=365[N]

A_{Mz}= 1*Ay=365 [Nm]

2b: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(0,1).

V(x)= 365 [N] V(0)= 365 [N] V(1)= 365 [N]

M(x)= 365(x-1) [Nm] M(0)= -365 [Nm] M(1)= 0 [Nm]

2c: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(1,4).

V(x)= 365-100$(x-1)^2$/6 [N] V(1)= 365 [N] V(4)= 215 [N]

M(x)= 365(x-1)-100$(x-1)^3$/18 [Nm] M(1)= 0 [Nm] M(4)= 945 [Nm]

2d: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(4,11).

V(x)= 365-150-100(x-4)[N] V(4)= 215 [N] V(11)= -485 [N]

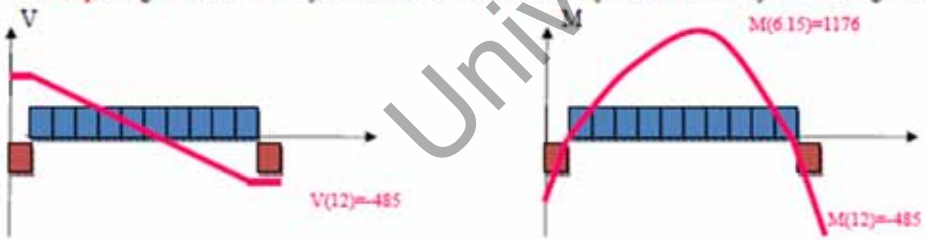
M(x)= 365(x-1)-150(x-3)-100$(x-4)^2$/2[Nm] M(4)= 945 [Nm] M(11)= 0 [Nm]

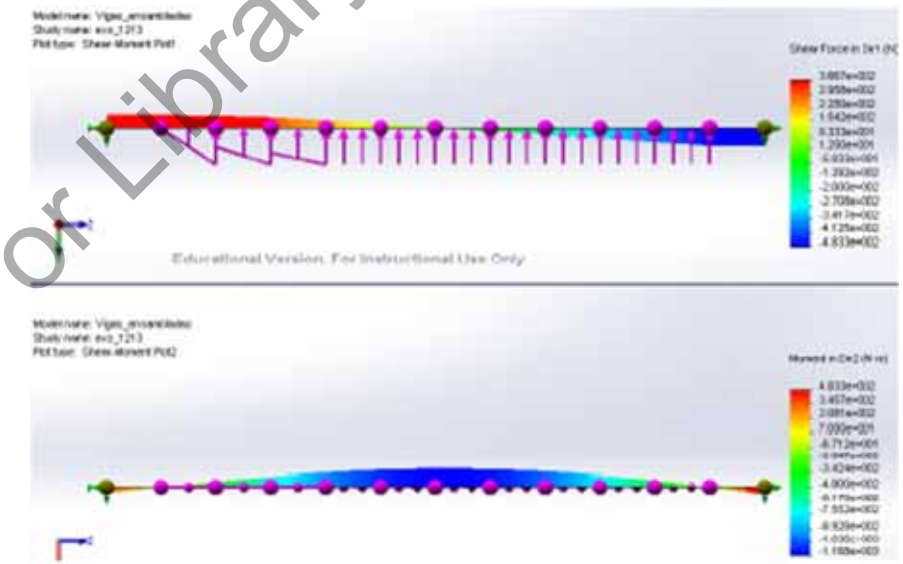
2e: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(11,12).

V(x)= -485 [N] V(11)= -485 [N] V(12)= -485[N]

M(x)= -485(x-11) [Nm] M(11)= 0 [Nm] M(12)= -485 [Nm]

2f: 0.4p. Diagrama de cortante y momentos. Cortante máximo y flector máximo y mínimo negativo





University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Repaso a ejercicios de estática.

University Copy For Library Use

S41t.- Ejercicios de Dinámica.

Mejora 1314 ....

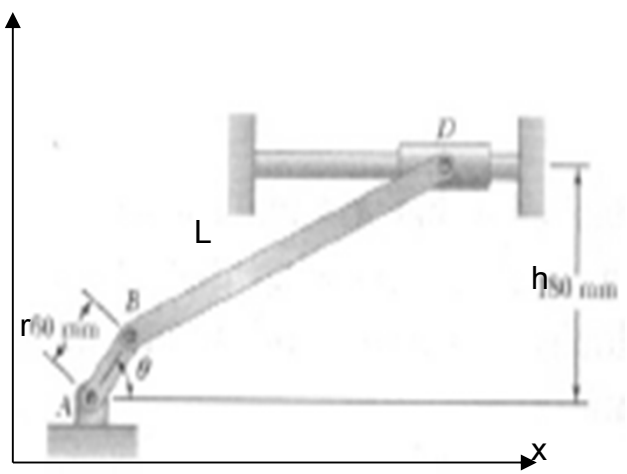
University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.
  - Ejercicios de estática.

University Copy For Library Use

- Cinemática de movimiento plano (EXF 0809).

La barra AB de longitud r=0.5[m] gira con ω_{AB}=5[rad/s]↺. El collar D se desliza horizontalmente. La barra AB BD mide L=1[m]. La altura de A a D es h= 0.8[m]. Calcular para θ=0: Considerar ω_{AB}=constante. Similar a Beer 15_117.



0.5p. v_B.

$(0,\omega_{AB}r)$.

0.5p. ω_{BD}.

$\omega_{AB}r / \sqrt{(L^2-h^2)}$ ↻.

0.5p. v_D.

$(\omega_{AB}rh / \sqrt{(L^2-h^2)},0)$.

0.5p. α_{BD}.

$\omega_{BD}^2h / \sqrt{(L^2-h^2)}$.

0.5p. a_D.

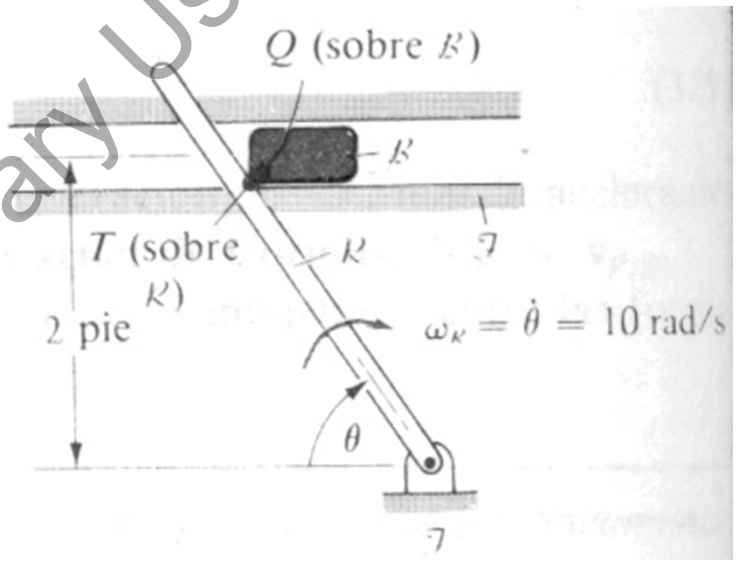
$(-(\omega_{ABD}^2r + \omega_{BD}^2 \sqrt{(L^2-h^2)} + \alpha_{BD}h),0)$.

University Copy For Library Use

- Cinemática de movimiento plano (EXJ 0809).

La barra ω =10[rad/s]↻ y α=30[rad/s^2]↺.

Calcular para instante de la figura θ=60º: McGill Din 208



0.3p. v_T=

(10*2,10*2/√3)=(20,11.54) [pie/s], v_T=23.09[pie/s].

0.3p. v_{QT}=.

$v_{QT}=v_T$*tan(30º)=23.09*0.5774=13.33[pie/s] (6.665, -11.54).

0.4p. v_Q=

v_T+v_{QT}=(26.665,0) [pie/s].

0.3p. a_T.

(-30*2, -30*2/√3)+(10^2*2/√3, -10^2*2)=(55.47,-234.64)[pie/s].

0.3p. $a_{coriolis}$

2(0,0-10)x(6.665,-11.54,0)=(-230.8,-133.3,0)[pie/s].

0.4p. a_{QT}. suponemos a_{QT}*(-0.5,0.8660) despejamos de la coordenada x:

a_{QT}=(234.6+133.3)/0.866=424.8[pie/s^2]

0.5p. a_Q.suponemos a_T(1,0) despejamos de la coordenada y:

55.47-424.8*0.5-230.8=-387.7[pie/s^2]

University Copy For Library Use

- Cinemática de movimiento plano (EXS 0809).

La barra OA de longitud r=0.1[m] gira con ω =30[rpm]↺ constante. El collar B se desliza y el martillo H sube y baja. Calcular para el martillo: McGill Din 212

3a: 0.5p. v_H y a_H para θ=0º

v_A= (0,ωr) y a_A=(-ω^2r,0) ,v_H= (0,ωr) y a_H=(0,0).

3b: 0.5p. v_H y a_H para θ=90º

v_A=(-ωr,0) y a_A=(0,-ω^2r), v_H=(0,0). y a_H=(0,-ω^2r).

3c: 0.5p. v_H y a_H para θ=270º

v_A=(ωr,0) y a_A=(0,ω^2r)., v_H=(0,0) y a_H=(0,ω^2r).

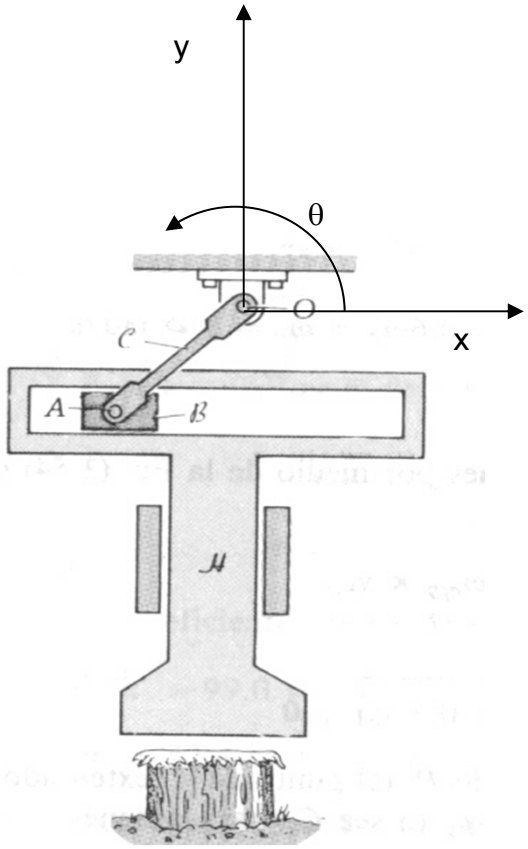
Si para t=0, θ=90º dar:

3d: 0.5p. v_H en función del tiempo:

ωr(0,-sin(ωt)).

3e: 0.5p. a_H en función del tiempo:

ω^2r(0,-cos(ωt)).



University Copy For Library Use

• Cinética de movimiento plano (EXF 0809).

La barra de masa m=2[kg] y longitud L=1[m] es impulsada con una fuerza P=100[N] aplicada en h=0.75[m]. La barra es lo suficientemente estrecha para aceptar que su inercia es $I_G=mL^2/12$.En el instante inicial del movimiento en que v=0 calcular: Beer 16_071.

1.0p. Aceleración angular de la barra α.

$\alpha=-3Ph/(mL^2)$.

0.5p. Aceleración del centro de gravedad.

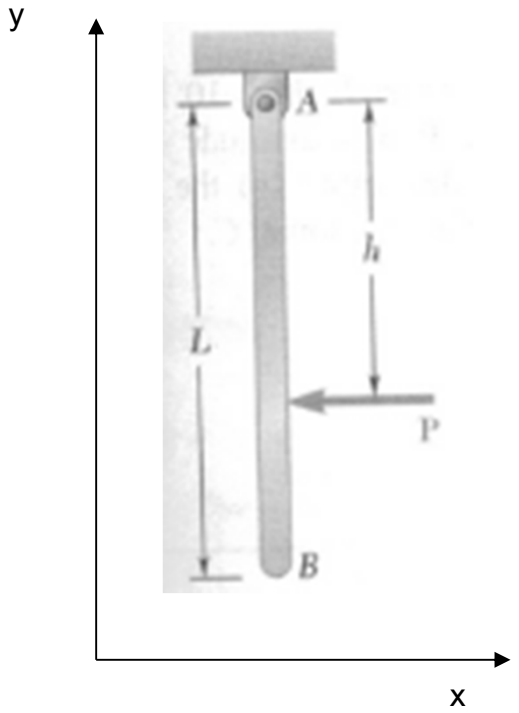
$a_G=-3Ph/(2mL)$.

0.5p. Reacción A_x.

P-m3Ph/(2mL).

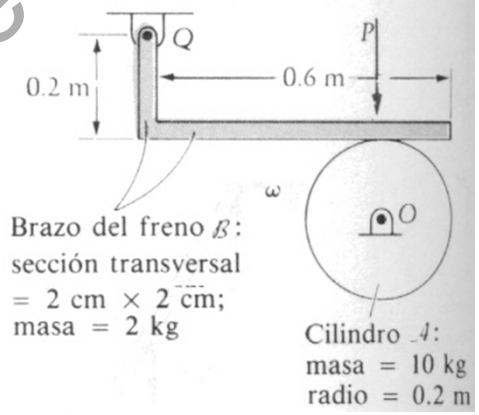
0.5p. Reacción A_y.

mg.



University Copy For Library Use

• Cinética de movimiento plano (EXJ 0809).



El cilindro gira a 1000[rpm] ↻ cuando entra en contacto con la barra con un coeficiente de fricción de 0.3 y la distancia del centro cilindro a Q es 0.4+0.01. Para frenar el disco se aplica una fuerza P=40[N]: McGill Din 246

1.0p. Reacciones estáticas de la barra en Q y punto contacto sin olvidar peso propio. Dibujar esquema de barra con fuerzas y reacciones.
$\Sigma M_Q=0 \Rightarrow N*0.410+0.3N*0.2-40*0.410-1.5*9.81*0.310=0 \Rightarrow N=44.6[N]$
$Q_x=-0.3*N=-13.4[N]$
$Q_y=(40+0.5*9.81+1.5*9.81-N)=15.02[N]$
0.3p. Aceleración angular del cilindro debido al freno.
$\alpha=13.4*0.2/(0.5*10*0.2^2)=13.4[rad/s^2]$.

0.3p. Velocidad angular en función del tiempo. $\omega=-1000*2\pi/60+13.6t[rad/s]$.

0.4p. Tiempo que tarda en pararse. $t=1000*2\pi/60/13.6=7.86[s]$.

0.5p. Fuerzas en el punto O. Dibujar esquema de cilindro con fuerzas y reacciones.
$O_x=13.4[N]$;
$O_y=44.6+98.1=142[N]$.

University Copy For Library Use

• Cinética de movimiento plano (EXS 0809).

La barra de masa m_B=3[kg] y longitud l_B=2[m] con radio r_B=0.01[m] se une a esfera de masa m_E=2[kg] y radio R_E=0.5[m] y se deja caer desde la posición que muestra la figura. McGill Din 245

Calcular:

4a: 0.5p. Distancia centro de masas del conjunto a O:

$d=(m_B l_B/2+m_E(l_B+R_E))/(m_B+m_E)$.

4b: 0.5p. Inercia del conjunto respecto a O:

$I_O=(m_B l_B^2/3+m_B r_B^2/4)+(2\,m_E R_E^2/5+m_E(l_B+R_E)^2)$.

4c: 0.5p. Aceleración angular del conjunto.

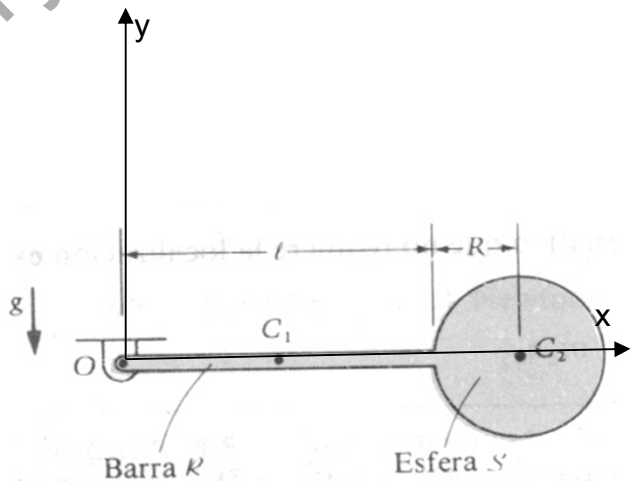
$\alpha=-g(m_B l_B/2+m_E(l_B+R_E))/I_O$..

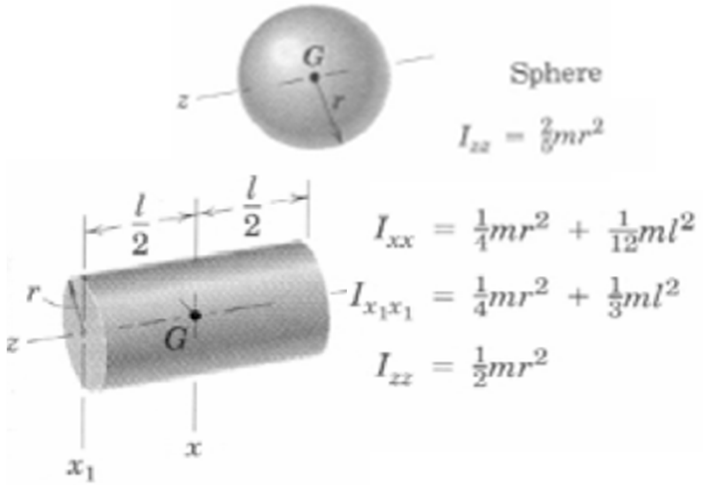
4d: 0.5p. Reacción O_x.

$O_x=0$.

4e: 0.5p. Reacción O_y.

$O_y=g(m_B+m_E)+(m_B+m_E)\alpha d$.



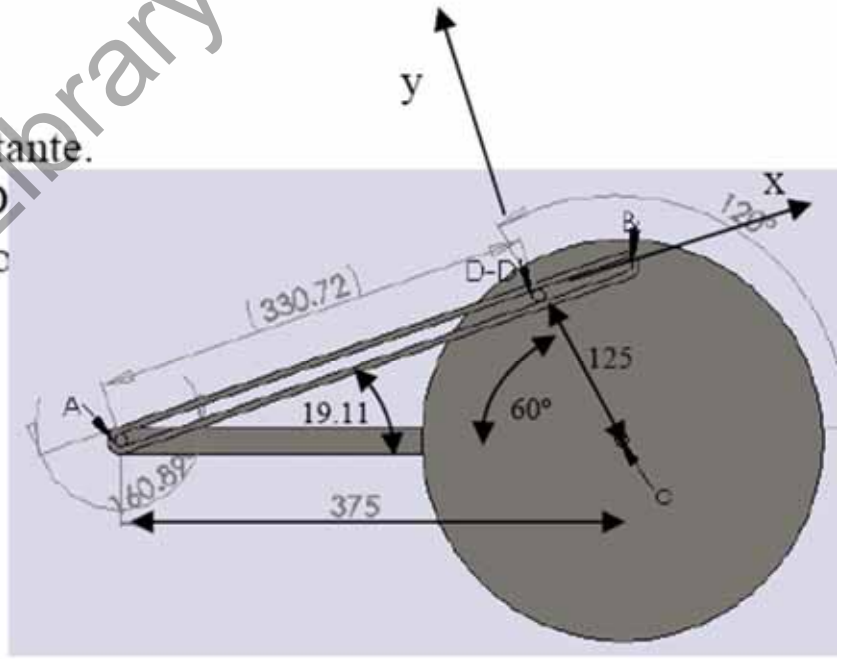


University Copy For Library Use

- Examen EXF 0910.

3 Cinemática movimiento plano. (2.5p. de 10)

El disco CD gira con ω_{CD}=120/130/140/150/160/170[rpm]↻ constante.
El pasador D está a 125mm. Por geometría hemos resuelto que AD
330.7[mm] y que el ángulo β=180-160.89=19.11°. Calcular usando
ejes xy de la guía: Riley 14.119



0.5p. v_D. (ω_{CD}125cos10.89°, ω_{CD}125sin10.89°).

0.5p. ω_{AB}. ω_{CD}125sin10.89°/330.7 ↺.

0.5p. $v_{DD'}$. (ω_{CD}125cos10.89°,0).

0.5p. α_{AB}. (-$\omega_{CD}^2$125cos10.89°-2$\omega_{AB}v_{DD'}$)/330.7 ↺, negativo implica ↻.

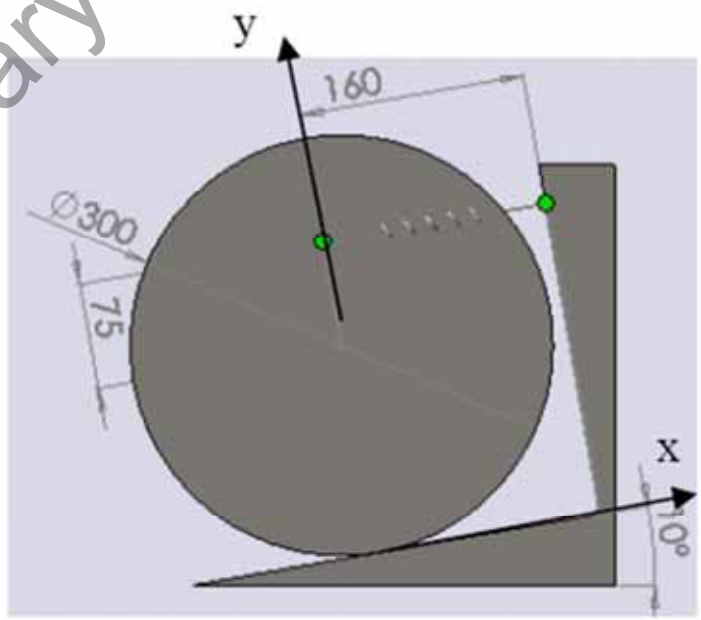
0.5p. $a_{DD'}$. ($\omega_{CD}^2$125sin10.89°+$\omega_{AB}^2$330.7,0).

University Copy For Library Use

- Examen EXF 0910.

4 Cinética movimiento plano. (2.5p. de 10)

Un cilindro de diámetro 300[mm], peso 25[N] rueda sin deslizar por plano inclinado 10º. El cilindro se sujeto por un muelle de constante k=400/410/420/430/440/450[N/m] en un punto E a 75[mm] del centro. Calcular: Riley ejemplo 21.3



0.5p. Alargamiento de muelle para equilibrio estático. $\theta=mg\sin10º(0.150)/(k(0.150+0.075)^2$.

0.5p. Amplitud del movimiento. $A= (150+0.075)\theta$[mm].

0.5p. Ecuaciones de momentos para plantear oscilaciones considerando pequeños ángulos. $\Sigma M: -k0.225\theta=m\theta''0.150^2+0.5m0.150^2\theta''$

0.5p. Frecuencia de oscilación. $\omega_n=\sqrt{(k0.225^2)/(1.5m0.150^2)}$, $T_n=2\pi/\omega_n$.

0.5p. Fuerza de reacción normal en contacto. $N=mg\cos10º$.

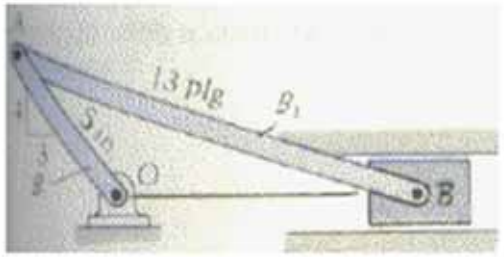
University Copy For Library Use

- Examen EXJ 0910.

3 Cinemática movimiento plano. (2.5p. de 10)

La barra $\omega = 10$[rad/s]↻ y $\alpha = 5$[rad/s^2]↻.

Calcular para instante de la figura: McGill Din 161



0.3p. v_A= (40,30) [pie/s], v_A= 50 [pie/s].

0.3p. ω_{AB}=. -2.425 [rad/s].

0.3p. v_B=. (30.30,0) [pie/s].

0.3p. a_A. (300,-400)+ (-20,-15)= (280, -415)[pie/s^2].

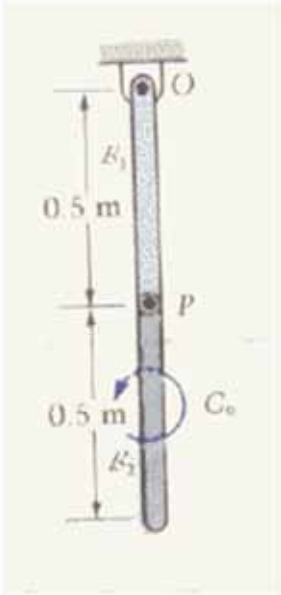
0.5p. α_{AB}. 31.6 [rad/s^2]

0.3p. a_B (333, 0)[pie/s^2].

University Copy For Library Use

- Examen EXJ 0910.

4 Cinética movimiento plano. (2.5p. de 10)



Las barras delgadas idénticas de masa 2kg cada una se aplica para en O de 150[N.m] antihorario: McGill Din 263

0.5p. Ecuaciones barra 1 con momento en O: $O_x-P_x=m\alpha_1 0.25$; $O_y-mg-P_y=0$; $-P_x 0.5=m0.5^2/3\alpha_1$;

0.5p. Ecuaciones barra 2 con momento en c.g. $P_x=m\alpha_1 0.50+ m\alpha_2 0.25$; $-mg+P_y=0$; $150-P_x 0.25=m0.5^2/12\alpha_2$;

0.3p. α_1=-771[rad/s^2]

0.3p. α_2= 2060[rad/s^2]

0.3p. O_x= -129[N].

0.2p. O_y= 39.2[N].

0.2p. P_x= 257[N].

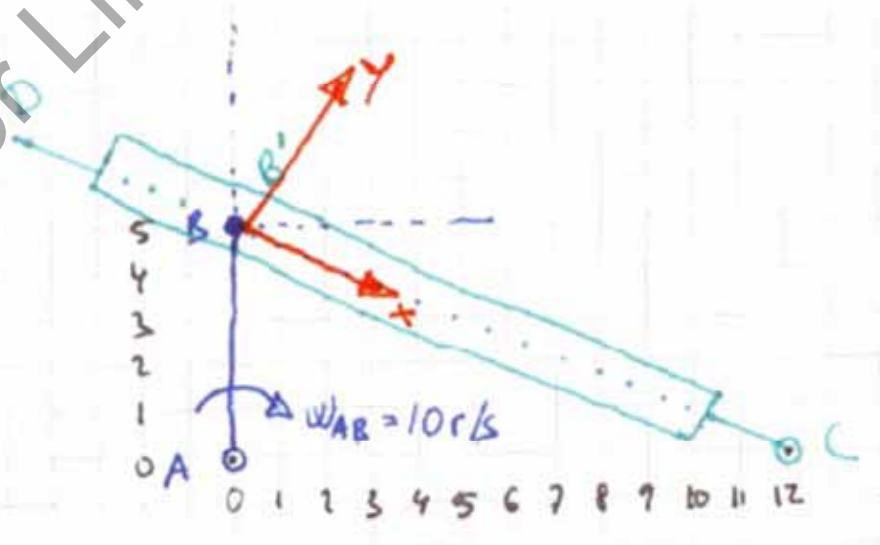
0.2p. P_y= 19.6[N].

University Copy For Library Use

- Examen EXS 0910.

3 Cinemática movimiento plano. (2.5p. de 10)

La barra AB de 5[m] gira con ω =10[rad/s]↻ constante. El punto B desliza sobre guía CD. La distancia de A a B es de 12[m]. La guía CB'D en que B' es el punto que en el instante inicial coincide con B. Usar los ejes x-y dados y calcular:



3a: 0.5p. Dar la velocidad del punto B'

$v_{B'}$=(0, 5/13(10*5)) = (0,19.23) [m/s].

3b: 0.5p. Dar la velocidad relativa entre B' y B.

$v_{B'B}$=(-12/13(10*5) , 0) = (-46.15,0) [m/s].

3c: 0.5p. Dar la velocidad angular de CB'D

$\omega_{CB'D}$= (0,0, -$v_{B'}$/13) = (0,0,-1.479) [rad/s]= (0,0,-84.76) [°/s].

3d: 0.5p. Dar la aceleración angular de CB'D

$\alpha_{CB'D}$= (0,0, (-12/13(5*10^2)+2 $\omega_{CB'D}$$v_{B'B}$)/13) = (0,0,-25.00) [rad/s^2]= (0,0,-1432) [°/s^2].

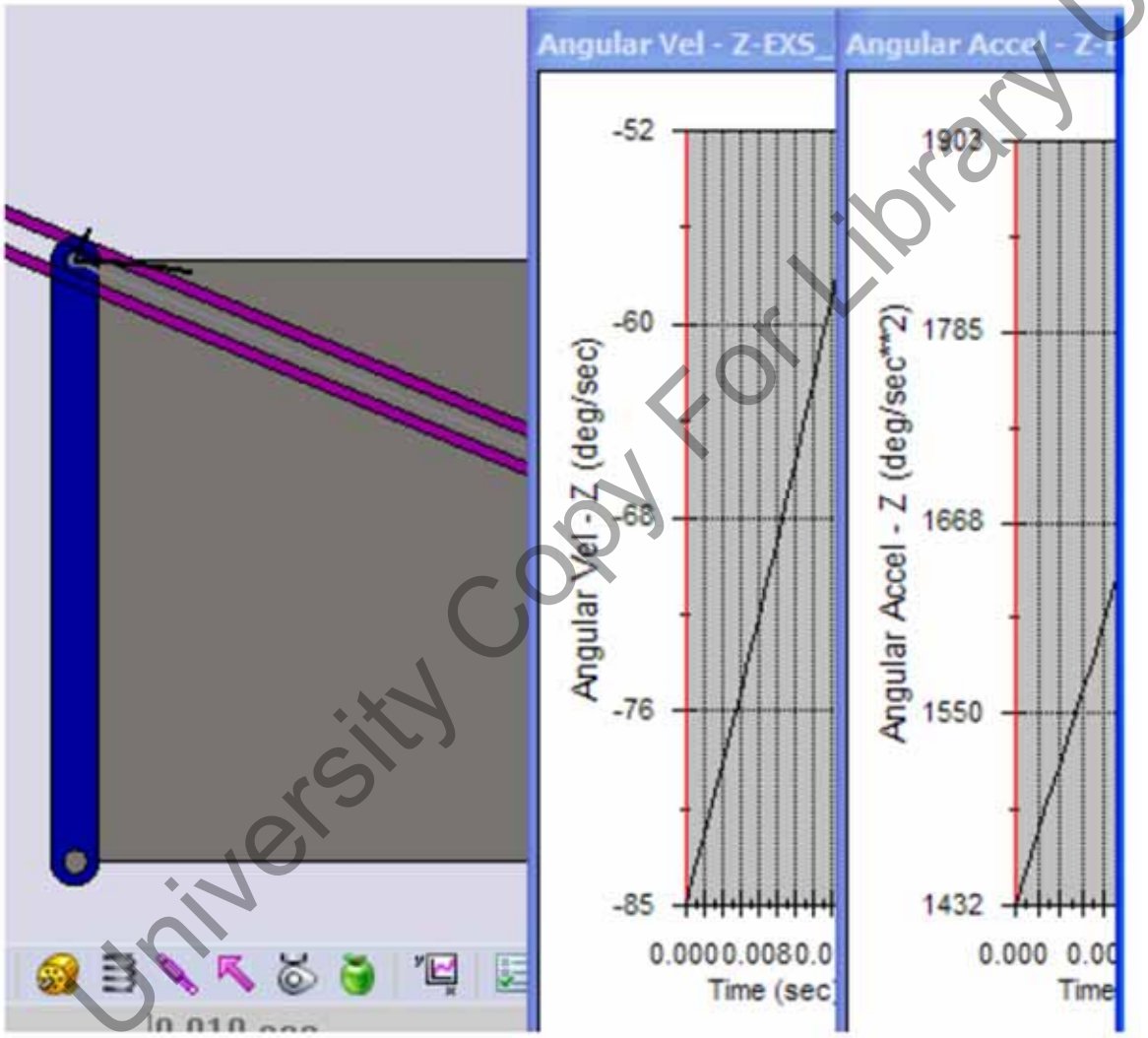
3e: 0.5p. Dar la aceleración relativa de B' respecto a B.

$a_{B'B}$=($\omega_{CB'D}$^{2}*13-5/13*5*10^2)=-163.9[m/s^2].

University Copy For Library Use

- Examen EXS 0910.

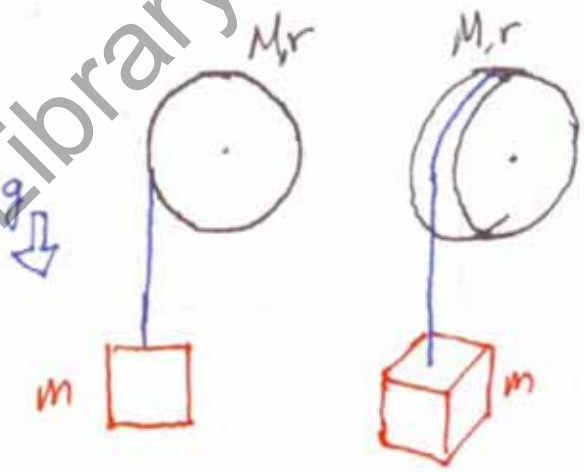
3.- Se comprueban velocidades y aceleraciones incluyendo coriolis.



University Copy For Library Use

- Examen EXS 0910.

La masa m=3[kg] está unida mediante una cuerda a un rodillo de masa M=6[kg] y radio r=0.1[m] de manera que al caer la masa por efecto de la gravedad gira el rodillo. Calcular:



4a: 0.5p. Usando equilibrio de fuerzas y momentos dar aceleración angular del disco:

$\alpha=mgr/(Mr^2/2+mr^2)=49.04[rad/s^2]=2809[°/s^2]$.

4b: 0.5p. Usando equilibrio de fuerzas y momentos dar tensión cable:

$T=m(g-\alpha r)=14.71[N]$.

4c: 0.5p. Usando balance de energía dar altura para velocidad de caja de 1[m/s]

$h=(mv^2+Mv^2/2)/(2gm)=0.102[m]$.

4d: 0.5p. Usando balance de cantidad de movimiento dar velocidad angular de disco al cabo de un segundo

$\omega=mgrt/(mr^2+Mr^2/2)=49.04[rad/s]=2809[°/s]$.

4e: 0.5p..Si se desea que la masa m caiga con una aceleración g/5 cuanto debe ser la masa M

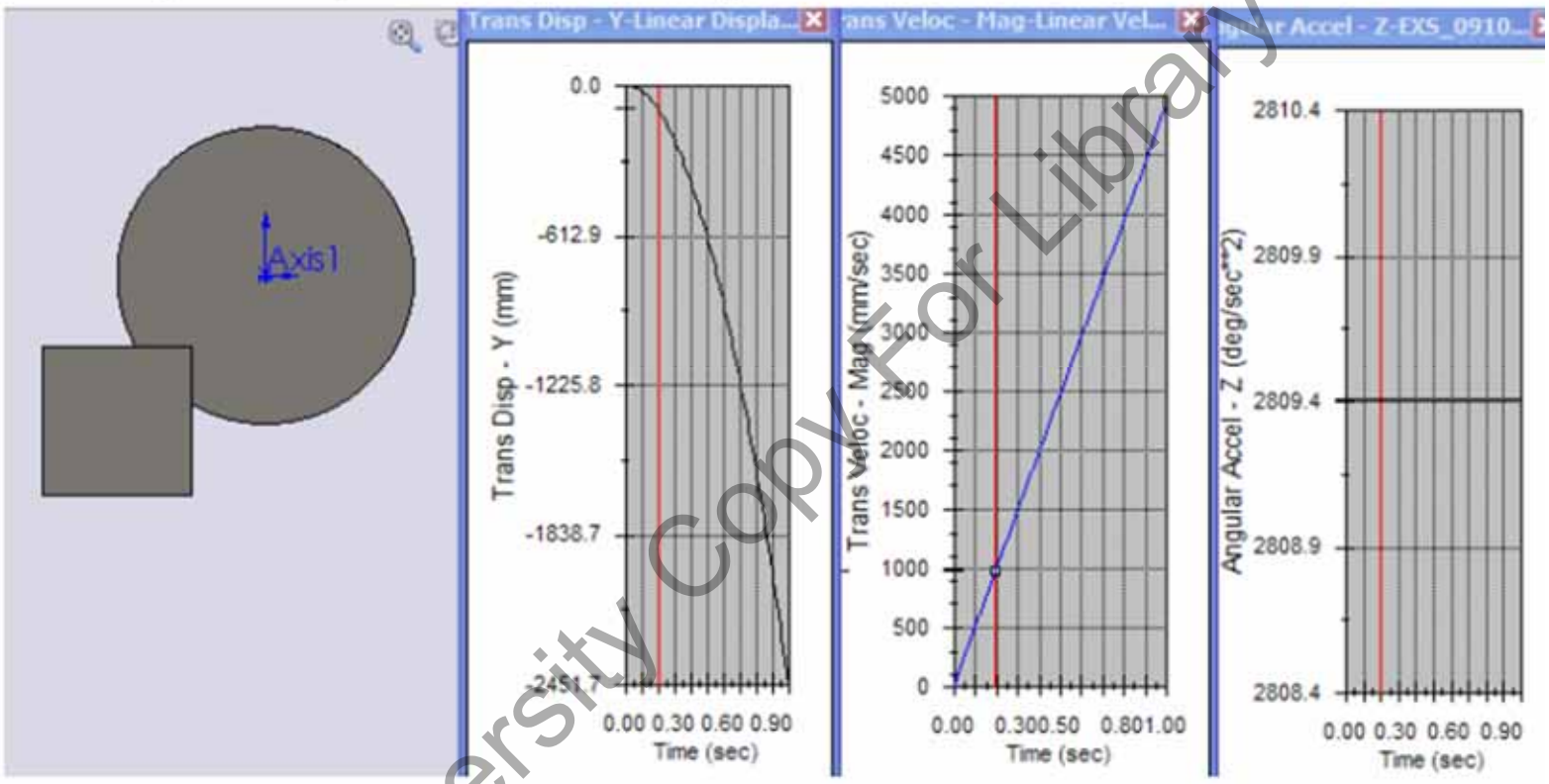
$M=mr^2(5-1)/(r^2/2)=8m = 24[kg]$.

Circular Cylinder	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$

University Copy For Library Use

- Examen EXS 0910.

4.- Se comprueban desplazamientos, velocidades y aceleraciones.



University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Repaso a ejercicios de dinámica.

University Copy For Library Use

S42t.- Ejercicios de Dinámica.

University Copy For Library Use

Mejora 1314 ....

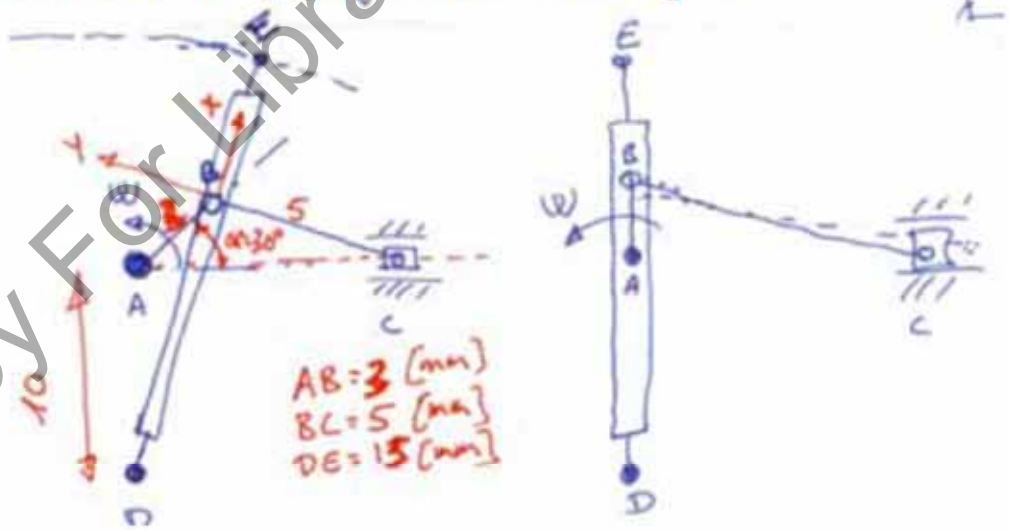
- Repaso sesión anterior.
  - Ejercicios de estática.

University Copy For Library Use

- Examen EXJ_1011 y EXS_1011

3 Cinemática movimiento plano. (2.5p. de 10)

La manivela AB gira a velocidad constante moviendo la biela BC con pistón horizontal en C y además la guía DE. Calcular usando ejes x,y,z de la figura cuando manivela y guía están verticales para $\omega=1$[rad/s]↺.



3a: 0.25p. $v_B=(\ 0\ ,\ 3\ ,\ 0\ )$[mm/s].

3b: 0.25p. $v_C=(\ 0\ ,\ 3\ ,\ 0\ )$[mm/s].

3c: 0.25p. $\omega_{BC}=(\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ )$[rad/s].

3d: 0.25p. $v_E=(\ 0\ ,\ 3.46\ ,\ 0\ )$[mm/s].

3e: 0.25p. $\omega_{DE}=(\ 0\ ,\ 0\ ,$ 0.2308[rad/s]=13.22[º/s]

3f: 0.25p. $a_B=(\ -3\ ,\ 0\ ,\ 0\ )$[mm/s].

3g: 0.25p. $a_C=(\ 0\ ,-2.25,\ 0\ )$[mm/s].

3h: 0.25p. $\alpha_{BC}=(\ 0\ ,\ 0\ ,$ 0.75[rad/s^2]=42.97[º/s^2]

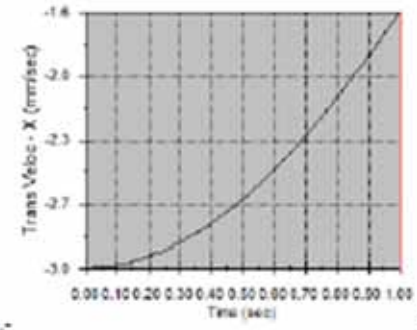
3i: 0.25p. $a_E=(-0.7988,\ 0,\ 0\ )$[mm/s].

3j: 0.25p. $\alpha_{DE}=(\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ )$[rad/s].

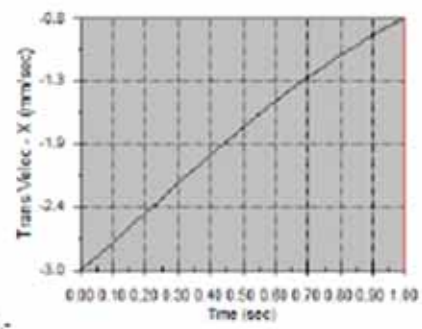
University Copy For Library Use

- Examen EXJ_1011 y EXS_1011

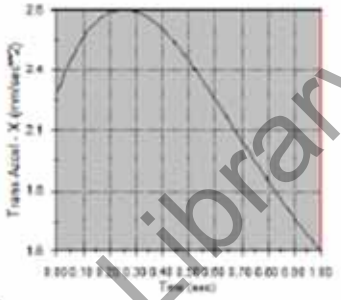
3.-



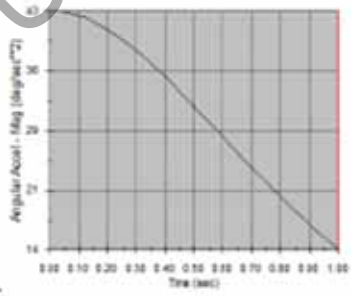
3a.-



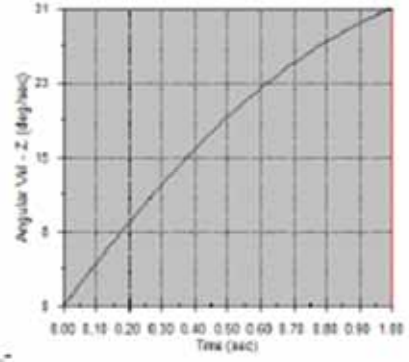
3b.-



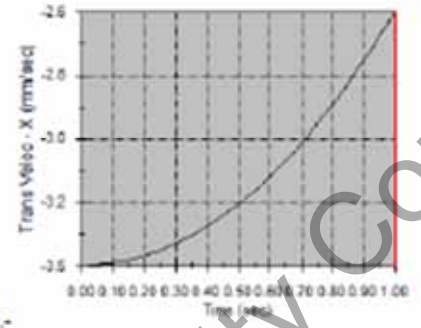
3g.-



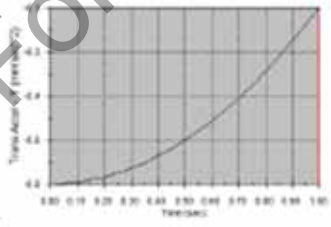
3h.-



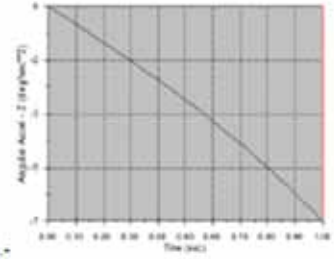
3c.-



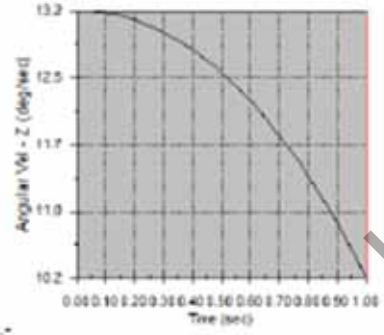
3d.-



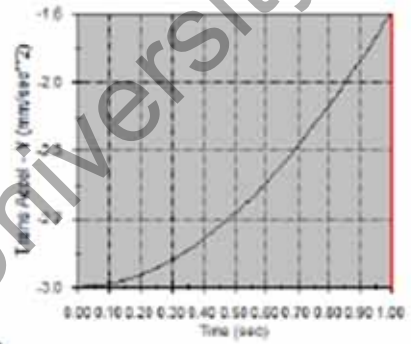
3i.-



3j.-



3e.-



3f.-

University Copy For Library Use

- Examen EXF_1112 y EXJ_1112

3 Cinemática movimiento plano. (2.5p. de 10)

La manivela AB gira con ω=1.x [rad/s] constante. Calcular para θ=180º:

3a: 0.25p. v_B= (0,–5ω).

0.25p. a_B= ($5\omega^2$,0).

3b: 0.25p. v_C= (0,0).

0.25p. ω_{CB}= –5ω/13 ↻.

3c: 0.25p. a_C= ($(5+25/13)\omega^2$,0).

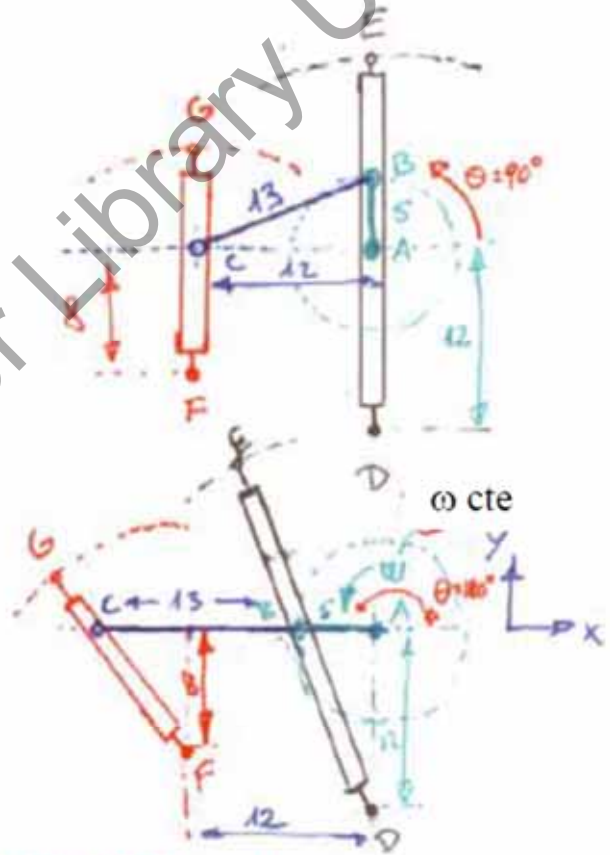
0.25p. α_{CB}= 0.

3d: 0.25p. $v_{B'}$= (0,ω25/13) en ejes (r,t).

0.25p. $\omega_{DB'E}$= $(5/13)^2\omega$ ↺.

3e: 0.25p. $a_{B'B}$= $\omega^2(5^2/13–5^4/13^3)$ dirección radial en ejes (r,t).

0.25p. $\alpha_{DB'E}$= $\omega^2(2*5^3*12/13^4–5^2*12/13^2)$ ↺.



3f: * SUBIR NOTA. $v_{C'}$= 0.

$\omega_{FC'G}$= 0.

3g: * SUBIR NOTA. $a_{C'C}$= $\omega^2(5+25/13)*0.6$ dirección radial en ejes (r,t).

$\alpha_{FC'G}$= $-\omega^2(5+25/13)0.8/10$↻.

University Copy For Library Use

- Examen EXS_1112

3 Cinemática movimiento plano. (2.5p. de 10)

La manivela AB gira a velocidad constante moviendo la guía CDB'. Calcular usando ejes x dirección B'D, ,y dirección CD cuando manivela y guía están alineadas para ω=1[rad/s]↺.

3a: 0.25p. v_B= (0 , 2 , 0) [m/s].

3b: 0.25p. ω_{CD}= (0 , 0 , -1) [rad/s].

3c: 0.25p. $v_{B'}$= (3 , 2 , 0) [m/s]

3d: 0.25p. $v_{D'}$= (3 , 0 , 0) [m/s]

3e: 0.25p. $v_{B'B}$= (3 , 0 , 0) [m/s]

3f: 0.25p. a_B= (-2 , 0 , 0) [m/s].

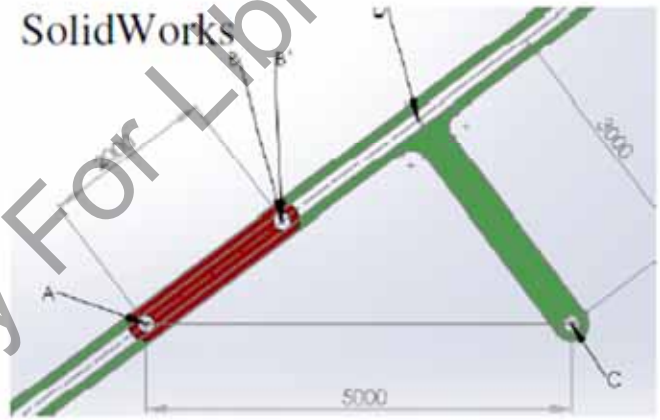
3g: 0.25p. α_{CD}= (0 , 0 , 1.5) [rad/s^2].

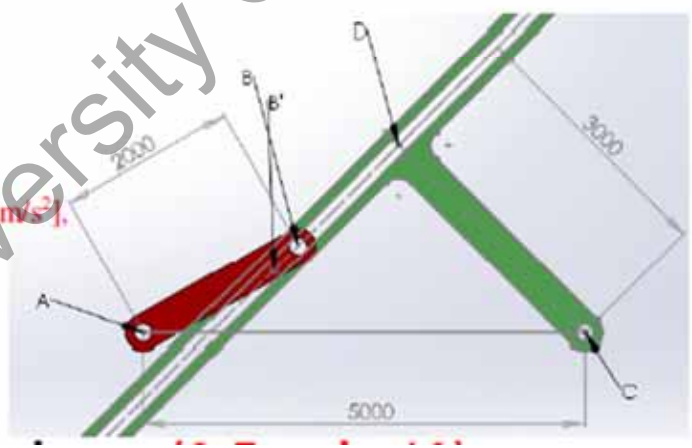
3h: 0.25p. a_B= (-2.5 , -6 , 0) [m/s^2].

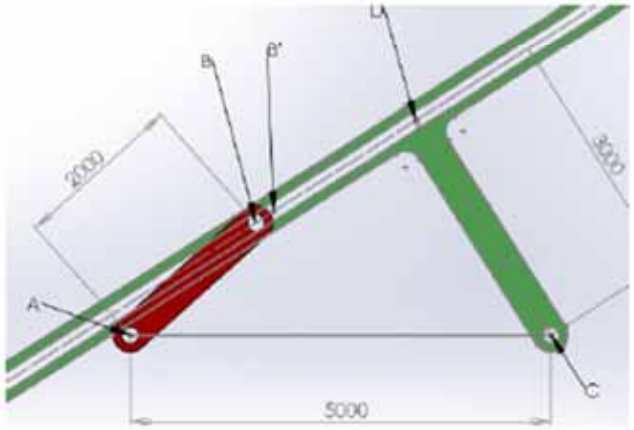
3i: 0.25p. $a_{B'B}$= (0.5 , 0 , 0) [m/s^2].

3j: 0.25p. Coriolis $2\omega_{CD}$ $v_{B'B}$ = (0 , -6 , 0) [m/s^2].

Unidades SolidWorks en [mm]

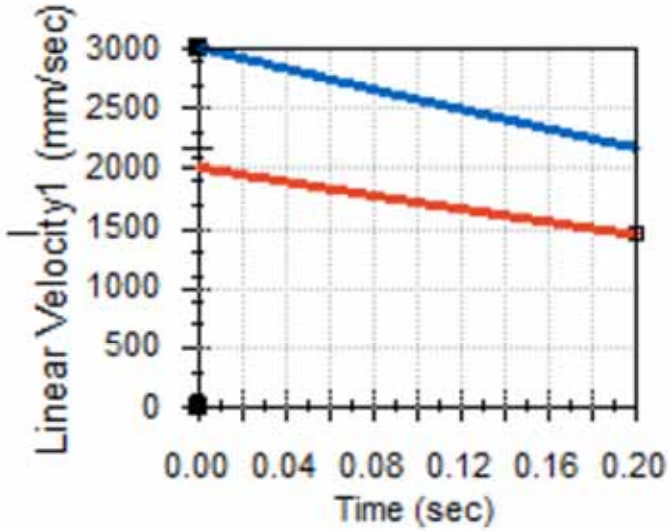


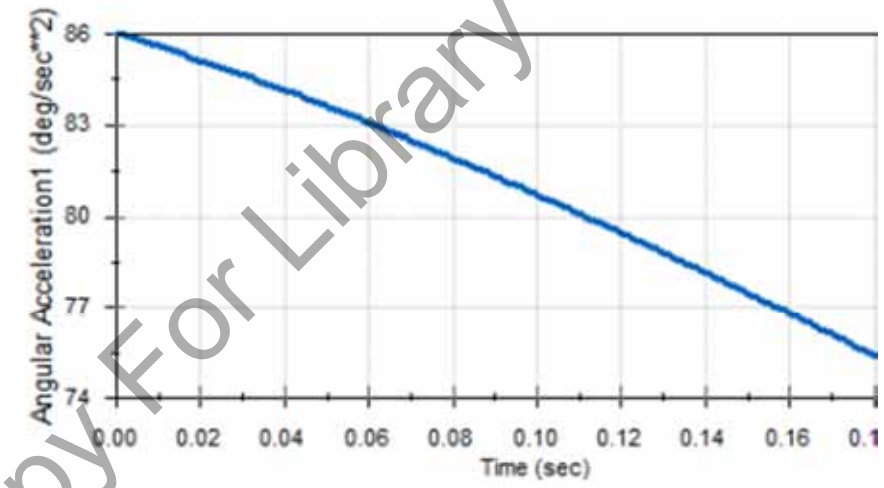


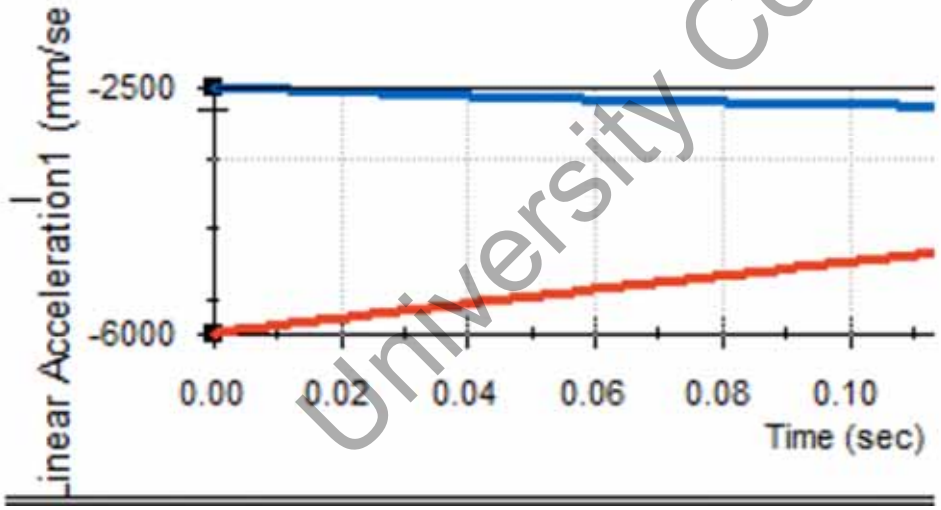


University Copy For Library Use

- Examen EXS_1112





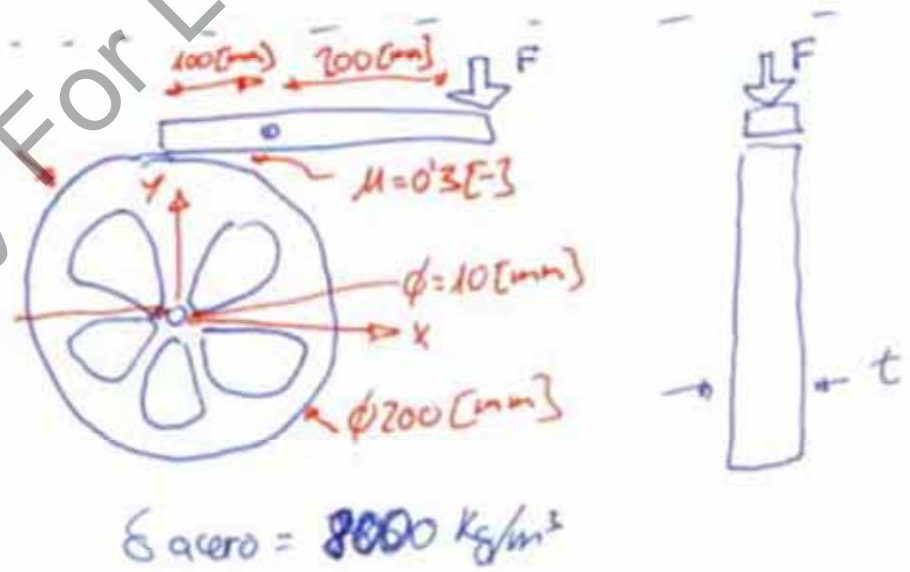


University Copy For Library Use

- Examen EXJ_1011 y EXS_1011

4 Cinética movimiento plano. (2.5p. de 10)

Tenemos un disco aligerado del que conocemos el área de 3400[mm^2] y las inercias de área $I_{xx}=I_{yy}=1e7$[mm^4] fabricado en acero de densidad 8000[kg/m^3] con un espesor constante de t=10[mm]. Dicho disco se acelera con un motor en el eje y se frena con la palanca que muestra la figura con fricción 0.3.



4a: 0.5p. Dar la masa e inercia másica del disco:
M=8e-3[gr/mm^3]10[mm]3400[mm^2]=272[gr]=0.272[kg]
I=8e-3[gr/mm^3]10[mm]2*1.0e7[mm^4]=1.6e6[gr.mm^2]=1.6e-3[kg.m^2]

4b: 0.5p. Calcular el par motor para llegar a ω=100[rad/s] en un segundo.
M=Iω/t=1.6e-3*100/1=0.16 [N.m]

4c: 0.5p. Calcular el par motor para llegar a ω=100[rad/s] en una vuelta.
M=Iω^2/(2*2π)=1.6e-3*100^2/(4π)=1.27 [N.m]

4d: 0.5p. Calcular la fuerza F para frenar desde ω=100[rad/s] en una vuelta.
F=Iω^2/(2μ0.1*2*2π)=1.6e-3*100^2/(2*0.3*0.1*4π)=21.21 [N]

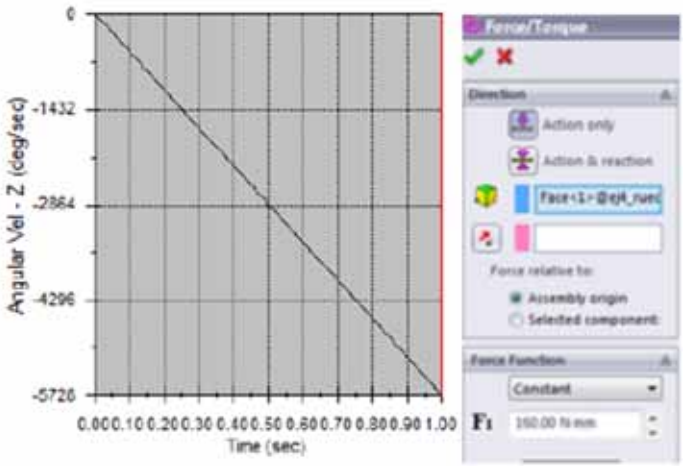
4e: 0.5p. Calcular las fuerzas de reacción en eje durante la frenada.
R_x=2F=42.42 [N]
R_y=-μ2F=-12.73 [N]

University Copy For Library Use

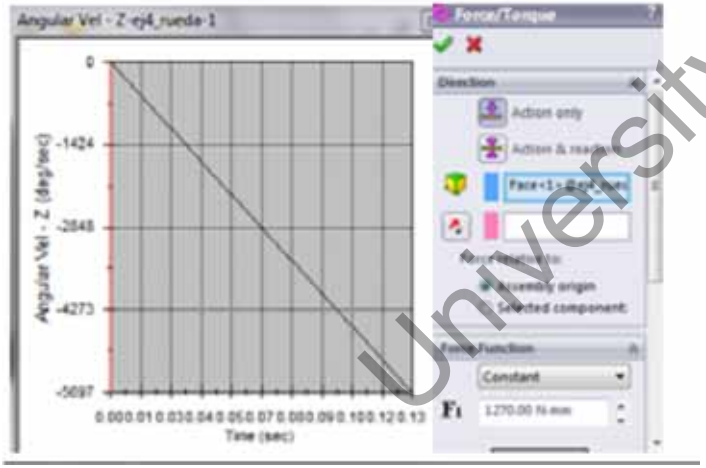
- Examen EXJ_1011 y EXS_1011

4.- 100[rad/s]=5730[°/s]

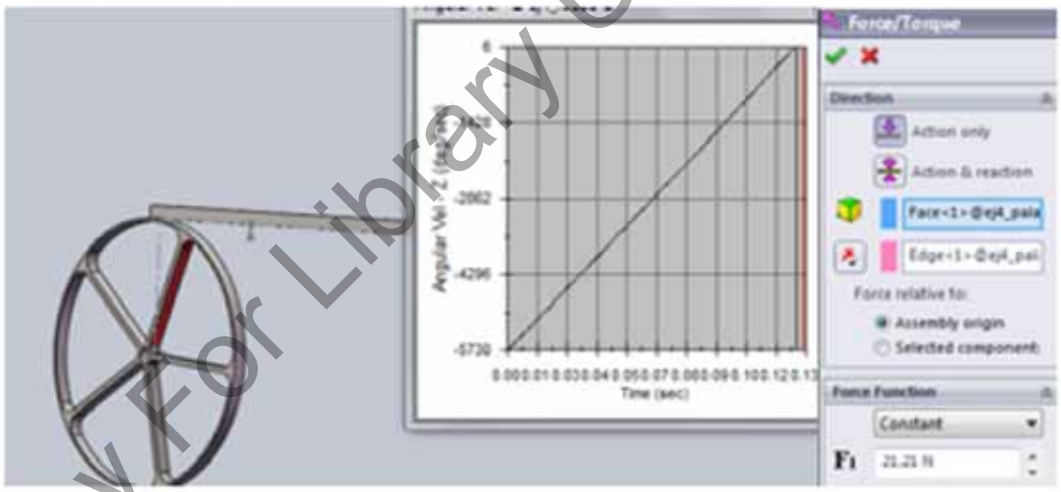
4b.-



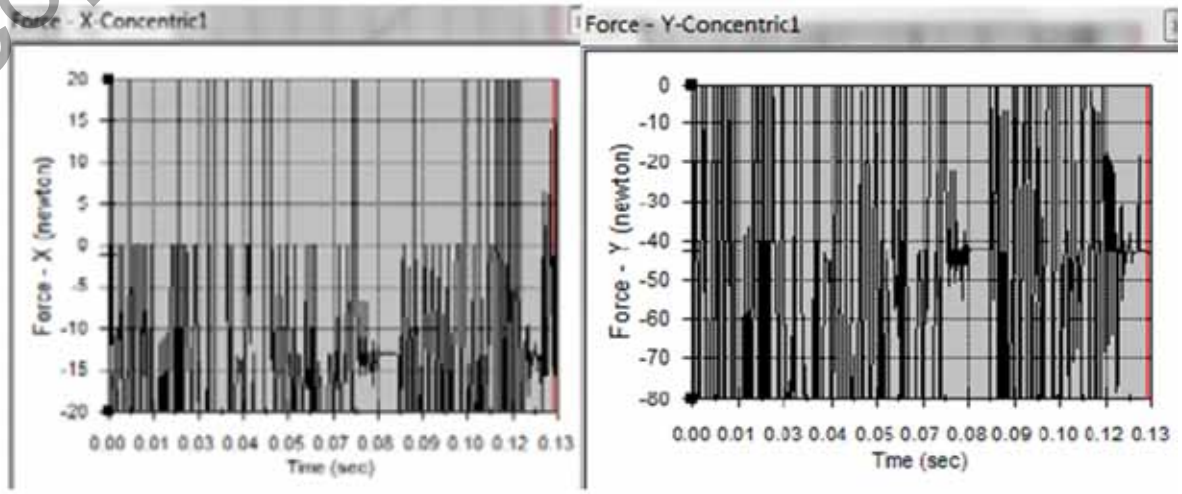
4c.-



4d.-



4e.-

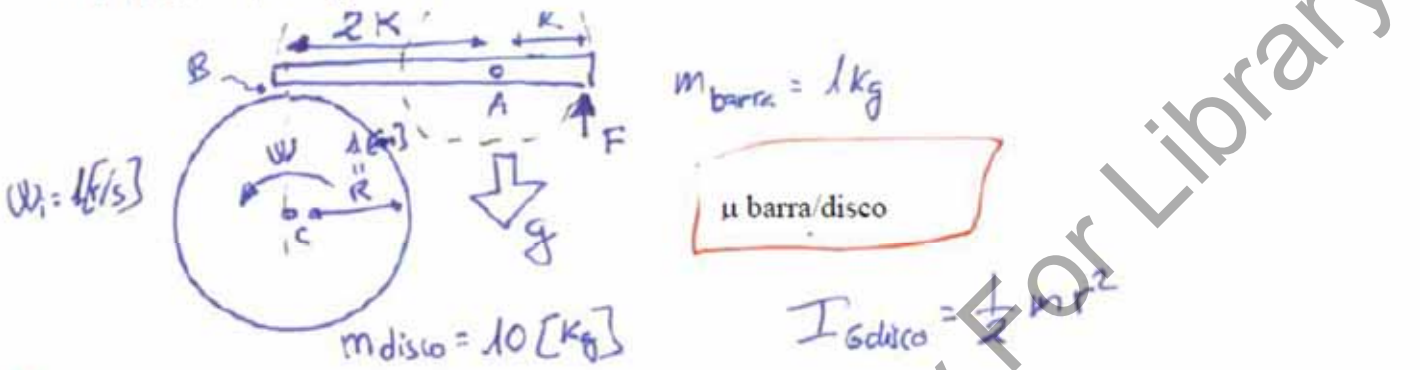


University Copy For Library Use

- Examen EXF_1112 y EXJ_1112

4 Cinética movimiento plano. (2.5p. de 10)

Una disco de masa m_d=10[kg] y radio r=1[m] gira con ω_i=1[r/s] y se frena con una fuerza F y el peso de la barra m_b=1[kg] con μ=0.x[-]. Calcular:

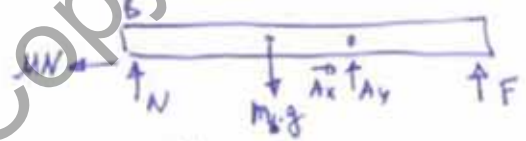


4a: 0.5p. Fuerza normal N para parar en 1[rad]

N= $m_d r\omega^2/4\mu$[N].

4b: 0.5p. Fuerza F en función de N

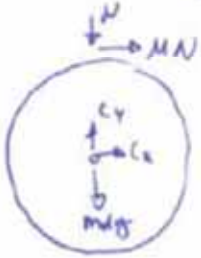
F= $2N-m_b g/2$[N].



4c: 0.5p. Reacciones en A en función de N

A_x= μN [N].

A_y= $m_b g-F-N=3m_b g/2-3N$ [N].



4d: 0.5p. Reacciones en C en función de N

C_x= $-\mu N$ [N].

4e: 0.5p. Fuerza normal N para parar en 1[seg]

N= $m_d r\omega/2\mu$[N].

4e: * SUBIR NOTA. Si el disco se ahueca haciendo agujeros hasta conseguir que la masa se 1[kg] y el área sea de superficie sea 1[m^2] con Inercias de área Imax=Imin=0.4[m^4]. Calcular inercia de masa de la nueva rueda.

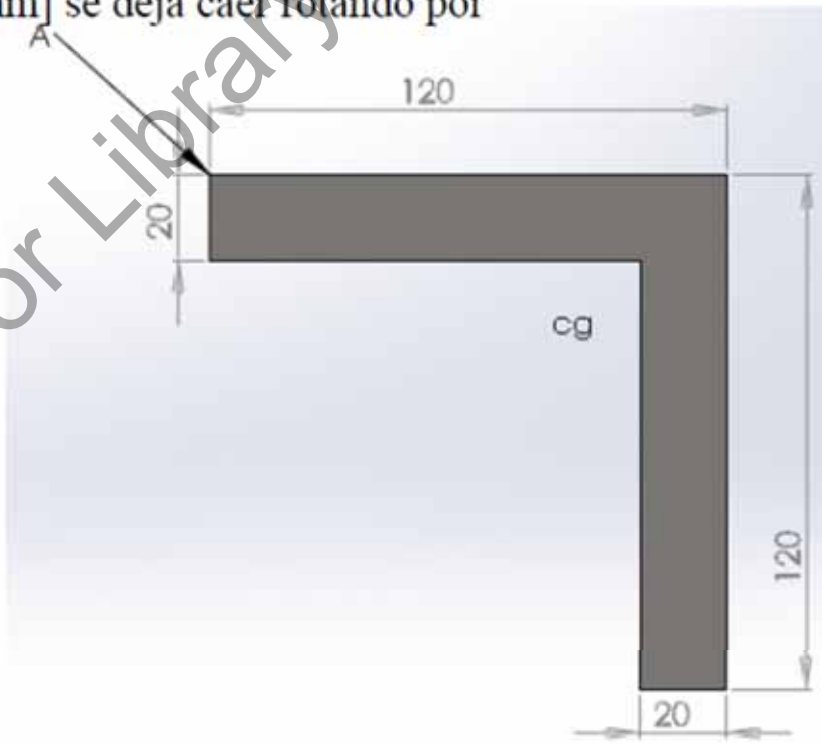
I_m= $(m/A)(I_x+I_y)=0.8$[kg.m^2].

University Copy For Library Use

- Examen EXS_1112

4 Cinética movimiento plano. (2.5p. de 10)

La pieza de la figura de acero d=8000[kg/m3] y espesor 10[mm] se deja caer rotando por vértice A.



4a: 0.5p. Dar la inercia de superficie y centroide:

x_{cg}=82.73[mm]=0.08273[m]
y_{ycg}=-37.27 [mm]=-0.03727 [m]
I_{xx}=1.178e7[mm^4]=1.278e-5[m^4]
I_{yy}=3.578e7[mm^4]=3.578e-5 [m^4]

4b: 0.5p. Dar la masa e inercia másica del disco:

M=8e-3[gr/mm^3]10[mm]44000[mm^2]=352[gr]=0.352[kg]
I=8e-3[gr/mm^3]10[mm](1.178e7+2.578e7] [mm^4]=3.805e6[gr.mm^2]=3.805e-3[kg.m^2]

4c: 0.5p. Calcular sin gravedad el par motor para llegar a ω=100[rad/s] en un segundo.

M=Iω/t=3.805e-3*100/1=0.3805 [N.m]

4d: 0.5p. Calcular sin gravedad el par motor para llegar a ω=100[rad/s] en una vuelta.

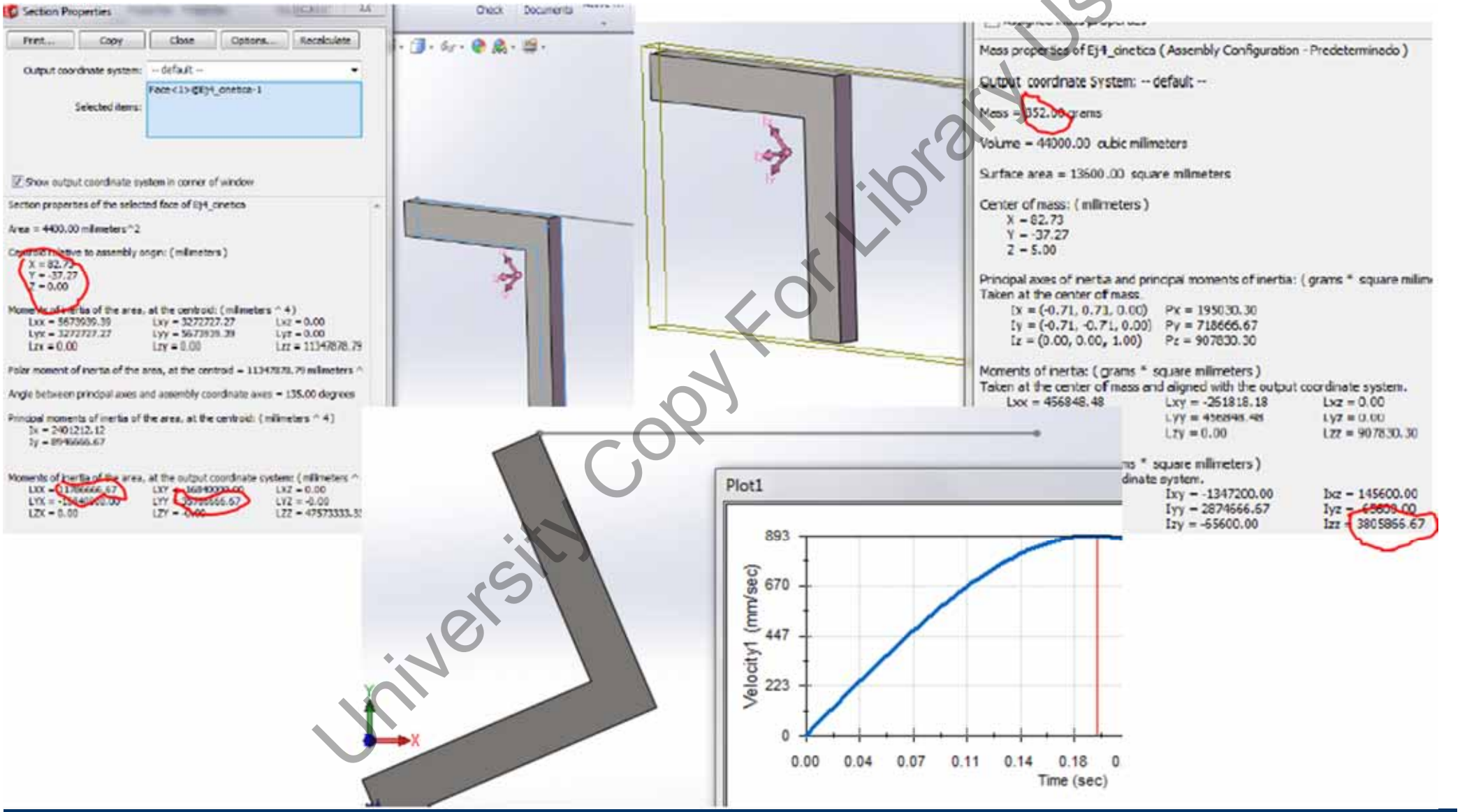
$M=I\omega^2/(2*2\pi)=3.8056e\text{-}3*100^2/(4\pi)=3.026$ [N.m]

4e: 0.5p. Calcular la velocidad máxima a la que llega si cae por el efecto de la gravedad.

$\omega=\sqrt{2mgh/I}=\sqrt{2}*0.352[gr]*9.805[m/s^2]*0.05346[m]/3.805e\text{-}3[kg.m^2]=9.847$ [rad/s]
v=ωr=9.847[rad/s]*0.09073[m]=0.89 [m/s]

University Copy For Library Use

- Examen EXS_1112



University Copy For Library Use

- Examen EXF_1213, EXJ_1213

3 Cinemática movimiento plano. (2.5p. de 10)

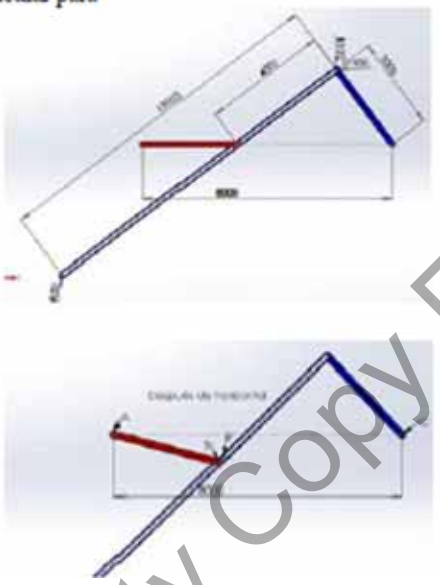
La manivela AB gira con ω_A=-10 [rad/s] constante. Calcular para θ=0° (horizontal) en ejes (x,y):

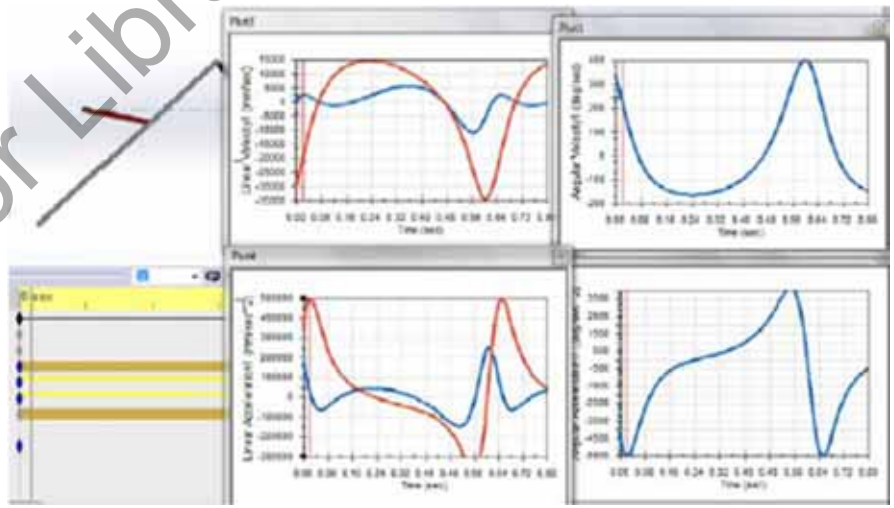
3a: 0.25p. v_B= $(0,-3\omega_A)$.
0.25p. a_B= $(-3\omega_A^2,0)$.

3b: 0.25p. v_B= $(0,-3\omega_A)$.
0.50p. ω_{CB}= $3\omega_A/5$ ↺.
0.25p. $v_{B'B}$= (0*0.8,0*0.6,0).

3c: 0.25p. a_B= $(1.8\omega_A^2,-3.6\omega_A^2)$.
0.25p. α_{CB}= $0.72\omega_A^2$ ↺

3d: 0.25p. $a_{B'B}$= $6\omega_A^2(0.8,0.6)$.
0.25p. coriolis= 0.

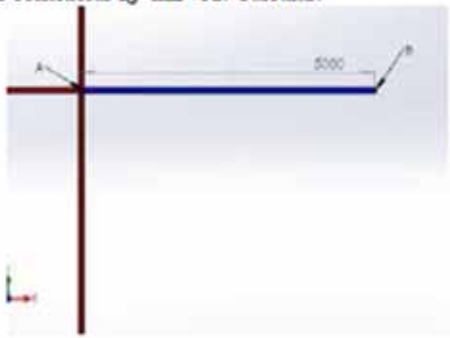




University Copy For Library Use

- Examen EXF_1213, EXJ_1213

Una barra AB de L=5[m] y m=100 [kg] se mueve verticalmente en A y horizontalmente en B por guías sin fricción. Inicialmente la barra está en reposo con A a la misma altura horizontal de B y se deja caer por efecto de la gravedad. La inercia de la barra se puede considerar $I_G=mL^2/12$. Calcular:



4a: 0.5p. Fuerza en A y B y aceleración angular al inicio de la caída:

A= 0[N].

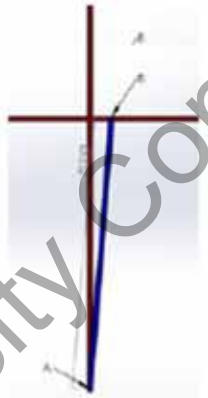
B= mg/4=245.0 [N].

α= 3g/(2L)=0.3g=2.941[rad/s^2] ↺.

4b: 0.5p. Velocidad máxima angular y del centro de gravedad que puede alcanzar

ω= $\sqrt{(3g/L)}$=2.424[rad/s]=138.9[°/s].

v= $\sqrt{(3gL/4)}$=6.063 [m/s].



4c: 0.5p. Fuerza en A y B y aceleración angular cuando A llega al punto más bajo y queda la barra vertical:

A= 0[N].

B= 5mg/2=2450[N].

α= 0[rad/s2].

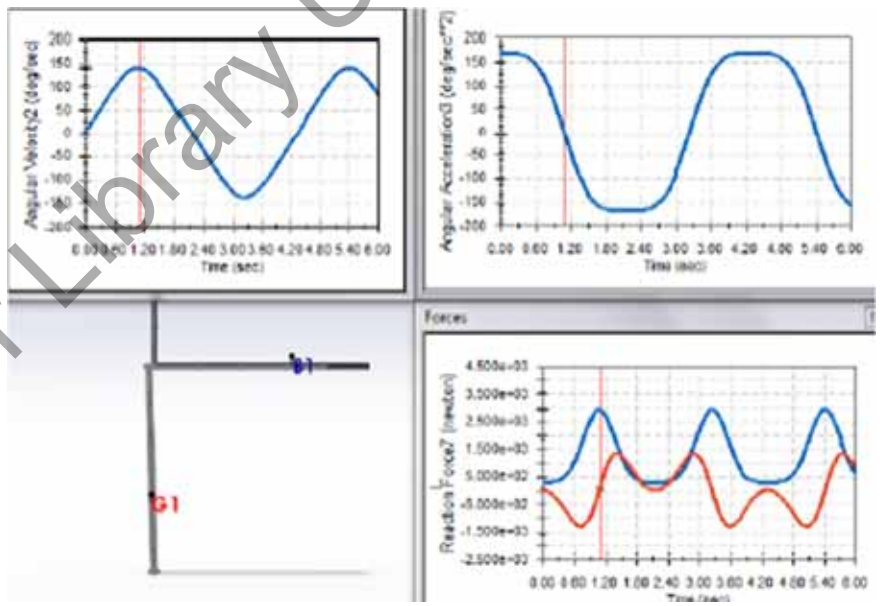
4d: 0.5p. Aceleración de A y de B cuando A llega al punto más bajo y queda la barra vertical:

a_A= ($0,\omega^2L$)=(0,3g)=(0,29.41)[m/s2].

a_B= (-αL,0)=(0,0) [m/s2].

4e: 0.5p. Calcular la constante elástica de muelle vertical frenando a A para que A se pare al bajar 4[m].

K= 2mg2/4^2=mg/4=245.0 [N/m].



University Copy For Library Use

- Examen EXS_1213

La guía CB' gira con ω_C=+10 [rad/s]↺ constante. Las dimensiones en dibujos están en mm. Calcular para θ=0° (AB horizontal) en ejes (x,y):

3a: 0.25p. v_B= $(0,-5\omega_C)$.

0.25p. a_B= $(5\omega_C^2,0)$.

3b: 0.25p. v_B= $(0,-5\omega_C)$.

0.50p. ω_{AB}= $-5\omega_C/3$ ↻.

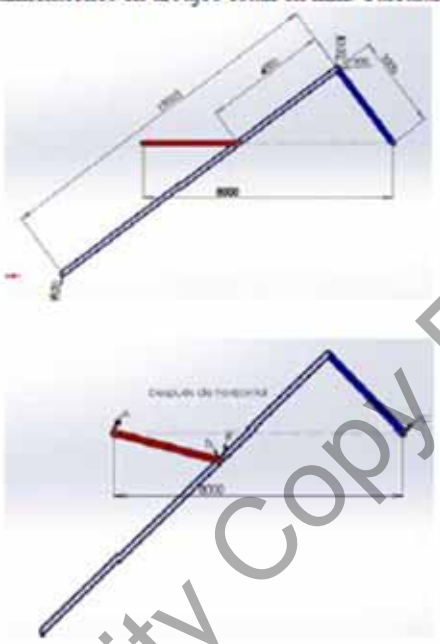
0.25p. $v_{B'B}$= $(0+0.8\omega,0+0.6\omega,0)$.

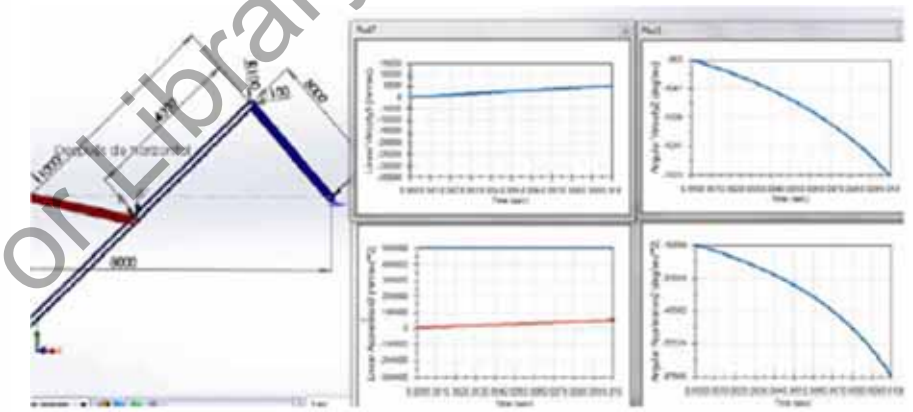
3c: 0.25p. a_B= $(-8.33\omega_C^2,-3.6\omega_C^2)$.

0.25p. α_{AB}= $-3.33\omega_C^2$ ↻

3d: 0.25p. $a_{BB'}$= $-13.33\omega_C^2(0.8,0.6)$.

0.25p. coriolis= 0.

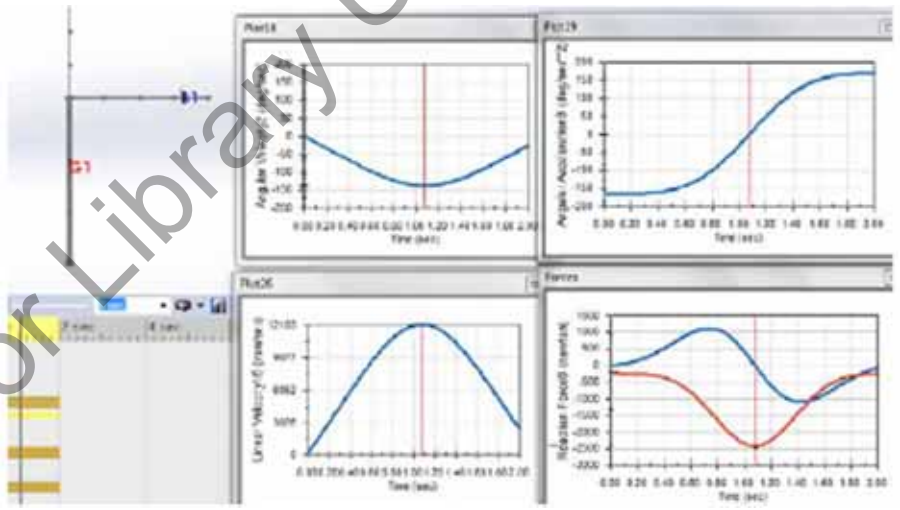




University Copy For Library Use

- Examen EXS_1213

Una barra AB de L=5[m] y m=100 [kg] rota respecto a A y se deja caer por efecto de la gravedad. La inercia de la barra se puede considerar $I_G=mL^2/12$. Calcular:



4a: 0.5p. Fuerza en A y aceleración angular al inicio de la caida:

A= mg/4=245.0 [N]

α= -3g/(2L)=0.3g=2.941[rad/s^2] ↻.

4b: 0.5p. Velocidad máxima angular y del centro de gravedad que puede alcanzar

ω= -$\sqrt{(3g/L)}$=-2.424[rad/s]=-138.9[°/s].

v= -$\sqrt{(3gL/4)}$=-6.063 [m/s]

4c: 0.5p. Fuerza en A y aceleración angular cuando B llega al punto más bajo y queda la barra vertical:

A= 5mg/2=2450[N]

α= 0[rad/s2].

4d: 0.5p. Aceleración de B y G cuando B llega al punto más bajo y queda la barra vertical:

a_G= (0,ω^2L/2)=(0,3g/2)=(0,14.70)[m/s2].

a_B= (0,ω^2L)=(0,3g) =(0,29.40) [m/s2].

4e: 0.5p. Calcular la constante elástica de muelle torsional frenando para que B se pare al girar 0.2[rad].

K= 2mgL/2sin(θ) θ^2=24349 [Nm/rad].

University Copy For Library Use

- Resumen.

➢ Repaso a ejercicios de dinámica.

University Copy For Library Use

S43t.- Simulacro examen.

University Copy For Library Use

Mejora 1314 ....

- Repaso sesión anterior.

➢ Ejercicios de repaso de dinámica.

University Copy For Library Use

• Simulacro de examen.

El examen real se llevará a cabo el día especificado en la web IQS.

El examen constará de un test por valor de 2 puntos y problemas por valor de los restantes 8 puntos.

Para alumnos con buena nota de controles el peso en la nota final será:
10% de test y 40% de problemas y 35% de controles y 15% de laboratorio-taller.
Para alumnos que superen con el examen la nota de los controles:
17% de test y 68% de problemas y 15% de laboratorio-taller.

El test constará de 20 preguntas con 5 respuestas de las cuales tan sólo una es válida. Cada pregunta incorrecta resta el 25% por lo que responder el examen aleatoriamente tien una probabilidad de nota 0.

La parte práctica constará de 4 problemas:
- Equilibrio, Estructuras de barras, Cables.
- Diagramas de momentos-cortantes, Inercias, Presión de líquidos.
- Cinemática del punto, de sólido rígido, métodos de energías, conservación movimiento.
- Cinética plana y 3D, vibraciones, impacto.

University Copy For Library Use

- EXF 1011.

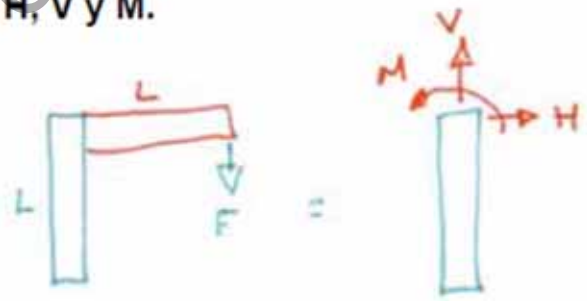
Nombre y apellidos:

IQS, 7 Febrero 2011a

PRIMERA PARTE:

Examen tipo test de 20 preguntas para el que se dispone de máximo 1 hora. Esta parte se puntúa sobre 10 puntos por lo que cada pregunta acertada suma 0.5 puntos y cada fallo resta 0.2 puntos. Se recogerá el test una hora después de comenzar. Marcar tan sólo una opción a cada pregunta con ✓. Anular con ✗.

1 Sustituir la fuerza vertical F por las equivalentes H, V y M.



a) V=F, H=0, M=F.

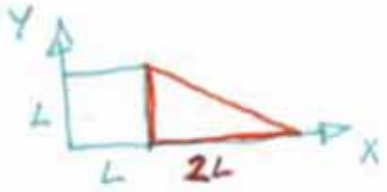
b) V=-FL, H=0, M=FL.

c) V=-F, H=0, M=-FL.

d) V=-F, H=FL, M=0.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

2 Dar posición centroide.



a) x=13L/12, y=5L/12.

b) x=11L/12, y=7L/12.

c) x=5L/6, y=L/3.

d) x=7L/6, 2L/3.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

University Copy For Library Use

- EXF 1011.

3 Dar inercia máxima y mínima.

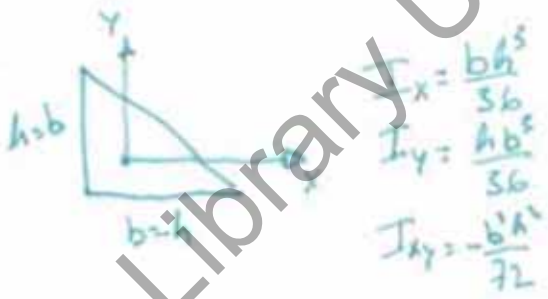
a) $I_{min}=b^4/36$, $I_{max}=b^4/18$.

b) $I_{min}=b^4/144$, $I_{max}=b^4/18$.

c) $I_{min}=b^4/72$, $I_{max}=b^4/24$.

d) No se puede calcular.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



4 Dar I_{x2}.

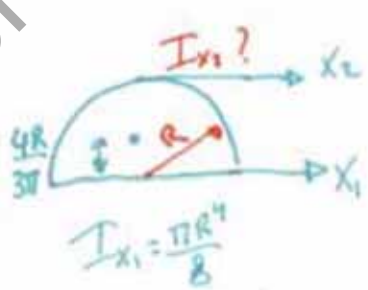
a) $I_{x2}=5\pi R^4/8-8R^4/3$.

b) $I_{x2}=5\pi R^4/8$.

c) $I_{x2}=\pi R^4/8-8R^4/(9\pi)$.

d) No se puede pues saldría negativo.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



5 Dar centroide de línea si superficie esfera es $4\pi r^2$

a) d=2r.

b) $d=4r^3/\pi$.

c) $d=2r/(\pi/2+1)$.

d) $d=5r/(6(\pi/4+1))$.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

University Copy For Library Use

- EXF 1011.

Nombre y apellidos:

IQS, 7 Febrero 2011a

6 Dar centroide de área si volumen esfera es $4\pi r^3/3$

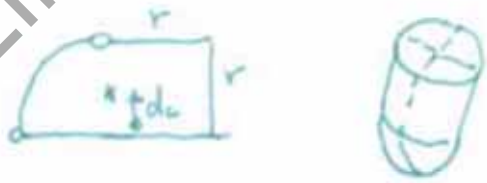
a) d=2r.

b) $d=4r^3/\pi$.

c) $d=2r/(\pi/2+1)$.

d) $d=5r/(6(\pi/4+1))$.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



7 Dar fuerza que soporta la presa

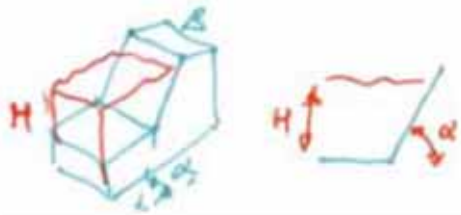
a) $R=\delta g H^2 B/(2\text{seno}(\alpha))$.

b) $R=\delta g H^2 B/2$.

c) $R=\delta g H^2 B\cos(\alpha)/2$.

d) $R=\delta g H^2 B\,\text{seno}(\alpha)/2$

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



University Copy For Library Use

- EXF 1011.

8 Dar momento en punto inferior de presa

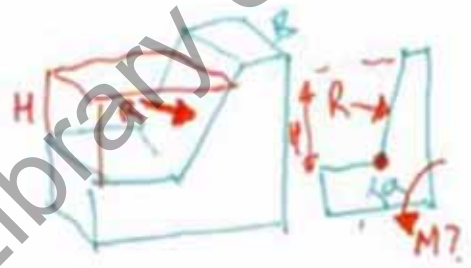
a) M=RH/2.

b) M=RH/3.

c) M=RH2/3.

d) M=RH/(3seno(α))

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



9 Dar fuerzas de barras 1, 2 y 3

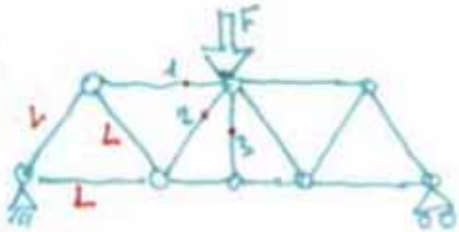
a) $T_1=T_2$ compresión $T_3=0$.

b) $T_1=2T_2$ tracción, $T_3=-F$ compresión.

c) $T_1=-T_2$, $T_3=-F$ compresión.

d) $T_1=-T_2$, $T_3=-F/2$ compresión.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



10 Indicar como garantizar tensión máxima en cable con cargas puntuales en apoyo B

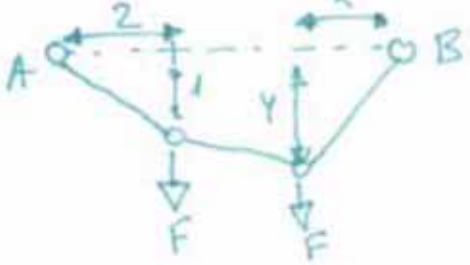
a) Si y>1.

b) Si x<2.

c) Si y>x/2 .

d) Necesitamos saber la longitud del cable.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



University Copy For Library Use

- EXF 1011.

Nombre y apellidos:

IQS. 7 Febrero 2011a

11 Indicar tensión T en x para garantizar 1[m] de altura mínima

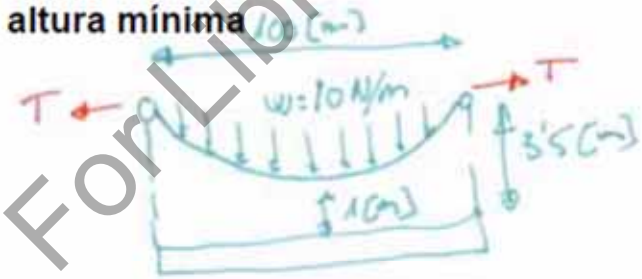
a) T=1327.8[N].

b) T=5000[N].

c) T=12500[N].

d) Necesitamos saber la longitud del cable.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



12 Dar ω_{BC} si C desliza horizontalmente y AB perpendicular a BC.

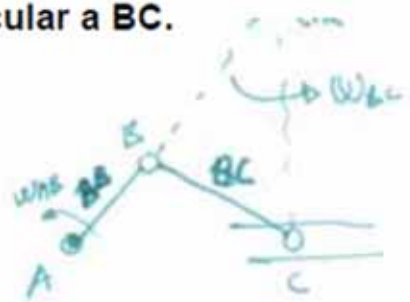
a) $\omega_{BC}= -\omega_{AC}\ (AB/BC)^2$.

b) $\omega_{BC}= -\omega_{AC}\ (AB/BC)$.

c) $\omega_{BC}= -\omega_{AC}\ (BC/AB)$.

d) $\omega_{BC}= -\omega_{AC}\ (\sqrt{(AB^2+BC^2)}/BC)$.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



University Copy For Library Use

- EXF 1011.

13 Dar v_B comparada con v_A.

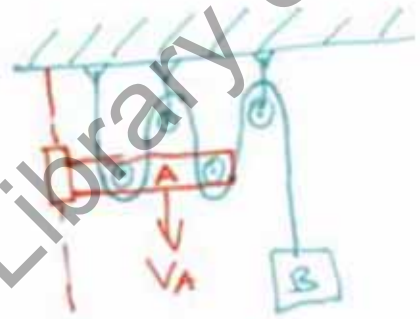
a) $v_B=-3v_A$.

b) $v_B=-2v_A$.

c) $v_B=3v_A$.

d) $v_B=-4v_A$

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



14 Dar aceleración de coriolis

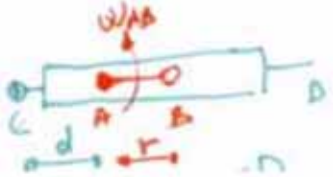
a) $a_c=2\omega_{AB}(r^2/(d^2+r^2))\omega_{AB}r(d/\sqrt{(d^2+r^2)})$.

b) $a_c=2\omega_{AB}(r^2/(d^2+r^2))$

c) $a_c=2\omega^2_{AB}(r^2/(d^2+r^2))x$.

d) $a_c=0$

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



15 Dar aceleración de coriolis si AB vertical

a) $a_c=2\omega_{AB}(r^2/(d^2+r^2))\omega_{AB}r(d/\sqrt{(d^2+r^2)})$.

b) $a_c=2\omega_{AB}(r^2/(d^2+r^2))$

c) $a_c=2\omega^2_{AB}(r^2/(d^2+r^2))x$.

d) $a_c=0$

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

University Copy For Library Use

- EXF 1011.

Nombre y apellidos:

IQS, 7 Febrero 2011a

16 Dar aceleración de coriolis si AB es perpendicular a CD

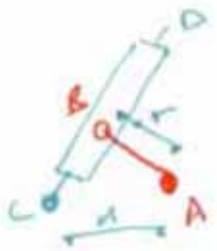
a) $a_c=2\omega_{AB}(r^2/(d^2+r^2))\omega_{AB}r(d/\sqrt{(d^2+r^2)})$.

b) $a_c=2\omega_{AB}(r^2/(d^2+r^2))$

c) $a_c=2\omega^2_{AB}(r^2/(d^2+r^2))x$.

d) $a_c=0$

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



17 Dar par a aplicar M para mantener ω constante ($I_G=mL^2/12$) si ángulo θ=0 horizontal.

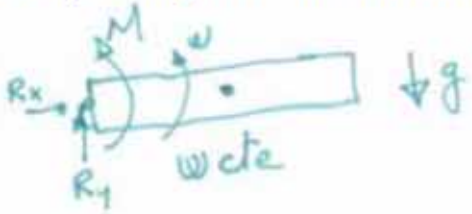
a) M=mgL/2.

b) M=mgLcos(θ)/2.

c) $M=mL^2g/12$.

d) $M=mL^2g/3$.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



University Copy For Library Use

- EXF 1011.

18 Dar velocidad v_f cuando barra está vertical (giro $\theta=90^o$) si $v_i>0$.

a) $v_f=\sqrt{(v_i+gL/3)}$.

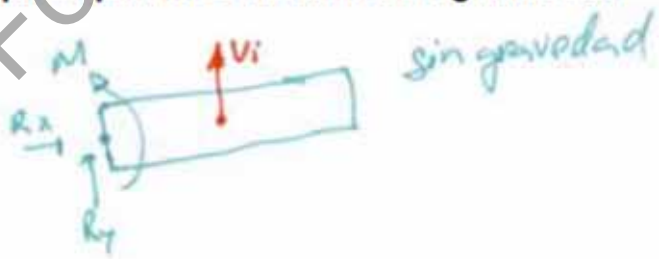
b) $v_f=\sqrt{(gL/2+2v_i^2/3)}$.

c) $v_f=2v_i$.

d) $v_f=0$.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

19 Dar la velocidad v_f al cabo de tiempo t si se aplica par M constante sin gravedad.



a) $v_f=2v_i$.

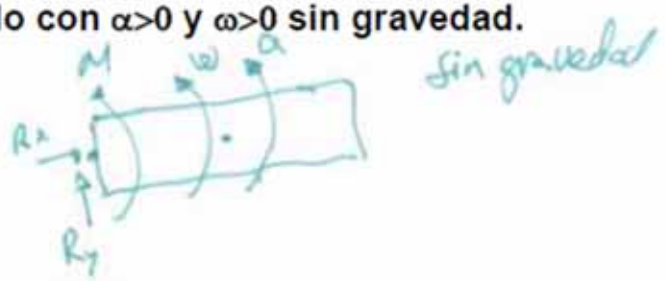
b) $v_f=v_i+Mt$.

c) $v_f=v_i+3Mt/(2mL)$.

d) $v_f=v_i+12Mt/(mL^2)$

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

20 Dar R_x, R_y y el par necesario M en barra rotando con $\alpha>0$ y $\omega>0$ sin gravedad.



a) $Rx=-m\omega^2L/2$, $Ry=m\alpha L/2$, $M=mL^2\alpha/3$.

b) $Rx=0$, $Ry=m\alpha L/2$, $M=mL^2\alpha/3$.

c) $Rx=0$, $Ry=m\alpha L/2$, $M=mL^2\alpha/12$.

d) $Rx=0$, $Ry=m\alpha L/2$, $M=mL^2\alpha/12-m\omega^2L/2$.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

University Copy For Library Use

- EXF 1011.

1 Presión hidráulica en compuerta semicircular. (2.5p. de 10)

Dada la compuerta semicircular de radio r=1[m] en pared inclinada 60° y apoyada en A, B y C calcular:

0.5p. Fuerza resultante aplicada sobre la compuerta
$F=\delta g x^* \text{seno}(60^\circ)^* \pi r^2/2$.

0.5p. Dar la inercia I_x e I_{xy} de la superficie de la compuerta en ejes x, y superiores
$I_x=\pi r^4/8+r^2*\pi r^2/2=5\pi r^4/8$.

$I_{xy}=0+r^*4r/(3\pi)^*\pi r^2/2=2r^4/3$.

0.5p. Dar la posición del centro de aplicación de la fuerza desde la superficie del fluido.
$x_F= 2r^4/3/(r^*\pi r^2/2)=4r/(3\pi)$ (centro gravedad).

$y_F= 5\pi r^4/8/(r^*\pi r^2/2)=5r/4$.

1.0p. Dar la fuerza en las tres esquinas que evita que la compuerta se abra:
$R_B=F^*x_F/r$.

$R_C=(F^*y_F-R_{Bx})/(2r)$.

$R_A=F-R_B-R_C$.

University Copy For Library Use

- EXF 1011.

2 Esfuerzos internos estática. (2.5p. de 10)

Dada las dos vigas AC y CF conectadas por un pasador (M=0) calcular para w=6x.

1a: 0.5p. Reacciones en A, B, F y fuerza en pasador C.

R_A= 2w.

R_B= 10w

R_F= 3w

R_C= 3w.

1b: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(0,3).

V=2w-wx^2,

M=2wx-wx^3/3.

1c: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(3,5).

V=3w,

M=-12w+3wx.

1d: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(5,7).

V=18w-3wx,

M=-49.5w+18wx-1.5wx^2.

1e: 0.4p. Cortante y momento en tramo x(7,8).

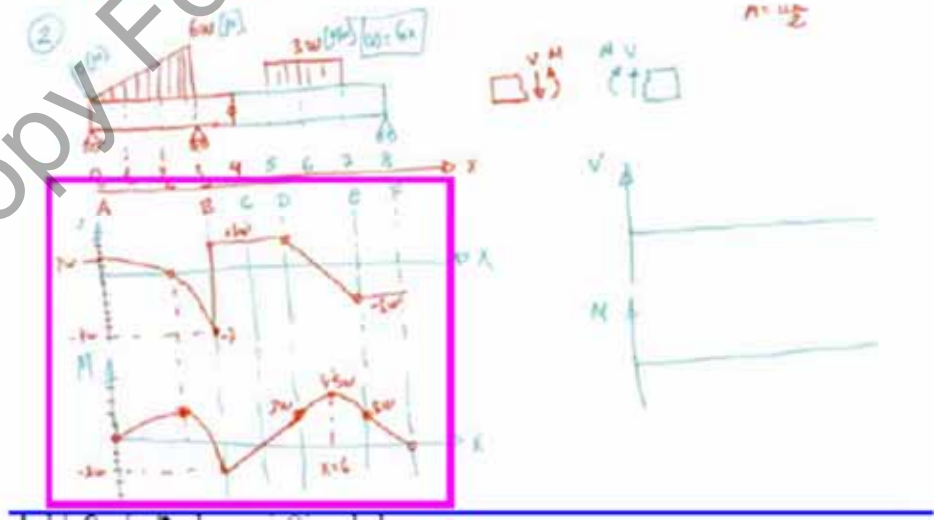
V=-3w,

M=24w-3wx.

1f: 0.4p. Diagrama de cortante y momentos. Cortante máximo y flector máximo

V_{max}=-7w en x=3(Izq).

M_{max}=4.5w en x=x=6.



University Copy For Library Use

- EXF 1011.

3 Cinemática movimiento plano. (2.5p. de 10)

La manivela AB gira con ω=6x [rad/s] constante. Calcular usando los ejes xy de la guía:

Para el primer caso de guía horizontal

0.2p. ω_{CB}= ω/4 ↺.

0.2p. $v_{BB'}$= 0.

0.2p. α_{CD}= 0

0.2p. $a_{BB'}$= 3ω²/4.

Para el segundo caso de manivela vertical

0.2p. ω_{CB}= ω/10 ↺.

0.2p. $v_{BB'}$= 3ω/√10.

0.3p. α_{CD}= ω²((6-10√10)/100)

0.2p. $a_{BB'}$= ω²(9√10/100).

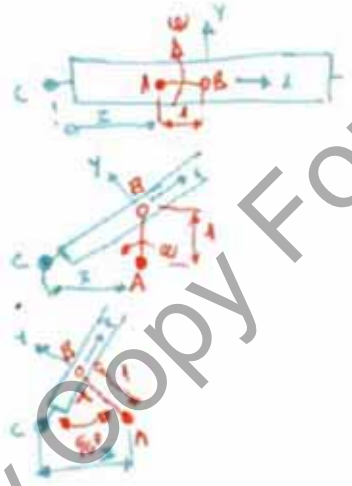
Para el tercer caso de manivela perpendicular a guía

0.2p. ω_{CB}= 0 ↺.

0.2p. $v_{BB'}$= ω.

0.2p. α_{CD}= ω²/√8

0.2p. $a_{BB'}$= 0.



University Copy For Library Use

- EXF 1011.

4 Cinética movimiento plano. (2.5p. de 10)

Una barra gira debido a un motor de par T=6 [N.M] y m=6 [kg] con L=1[m] sin considerar la gravedad. Calcular:

0.5p. $\alpha = 3T/mL^2 = 3[rad/s^2]$.

0.2p. $R_{xbar} = 0[N]$.

0.3p. $R_{ybar} = 1.5T[N]$.

Dar la velocidad angular alcanzada al completar una vuelta.

0.5p. $\omega = \sqrt{(12\pi T/(mL^2))} = \sqrt{12\pi} = 6.14$[rad/s].

Dar la velocidad angular alcanzada al completar un segundo.

0.5p. $\omega = (3T/(mL^2))$[t=1s][rad/s].

Calcular masa M de volante de inercia para que la aceleración baje a 1[rad/s^2].

0.5p. $M = (T\text{-}mL^2/3)*2/L^2 = 4m/3$ [kg].

University Copy For Library Use

- EXF 1112.

1 Sustituir la Fuerza para poder calcular una sola viga.

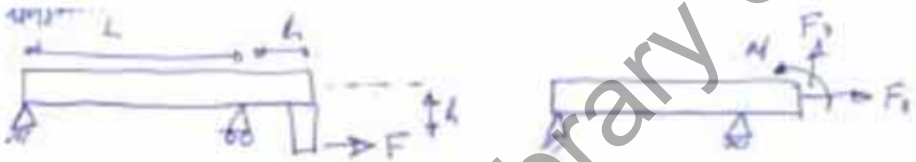
a) Fx=-F, Fy=0, M=Fh.

b) Fx=F, Fy=0, M=Fh.

c) Fx=F, Fy=0, M=-Fh.

d) Fx=F, Fy=-F, M=0.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



2 Con cuatro cifras significativas cuanto es 4π.

a) 12.57

b) 12.5664

c) 12.56

d) 12.6

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

3 Para girar un cuerpo de I=10^8[kg.mm^2] a 1000[vueltas/seg^2] se necesitan.

a) 10^{11}[N.m].

b) 10^{-1}[N.m].

c) 0.6283[N.m].

d) 125.7[N.m].

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____6.283e5[N.m]_____.

University Copy For Library Use

- EXF 1112.

4 Una figura plana de A=1[m^2] cuyo centroide está a 1[m] de un eje gira 90º para crear un sólido de volumen.

a) 1.571[m^3].

b) 90[m^3].

c) 6.283[m^3].

d) No se puede saber sin la inercia de la figura.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

5 Una línea de longitud L=1[m] gira 90º por un eje a 1[m] de los extremos en dos posiciones generando S_1 y S_2. Si el centroide está a 0.2[m] por encima extremos S_2/S_1 es:

a) S_2/S_1=0.2.

b) S_2/S_1=0.8.

c) S_2/S_1=0.6667.

d) S_2/S_1 Depende de si es circular o elíptica.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

University Copy For Library Use

- EXF 1112.

6 Dar posición centro gravedad del área circular restando un cuadrado.

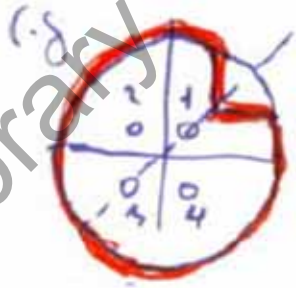
a) Posición 1.

b) Posición 2.

c) Posición 3.

d) Posición 4.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



7 Dar dirección de inercia máxima del área circular restando un cuadrado.

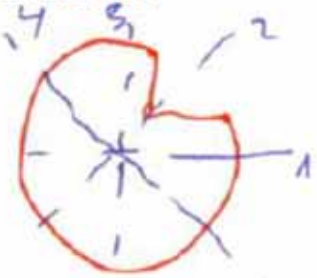
a) I_1.

b) I_2.

c) I_3.

d) I_4.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



8 Dar I_{x2} si $I_{x1}=10^3[m^4]$. Todas las unidades en metros.

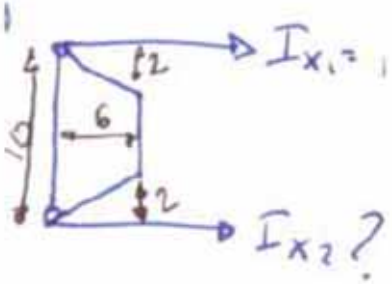
a) $0[m^4]$.

b) $7000[m^4]$.

c) $1000[m^4]$.

d) $5800[m^4]$.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



University Copy For Library Use

- EXF 1112.

9 Dar barras de fuerza nula.

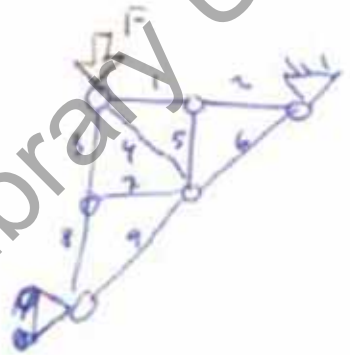
a) Sólo 4, 5 y 7.

b) Sólo 5 y 7.

c) Sólo 2, 4, 6, 8 y 9.

d) Sólo 1, 3 y 4.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



10 Dar relación entre el lado "B" de acero y lado "A" de alumnio (densidad acero=3*densidad aluminio) para que el centro de gravedad esté en la unión de ambos.

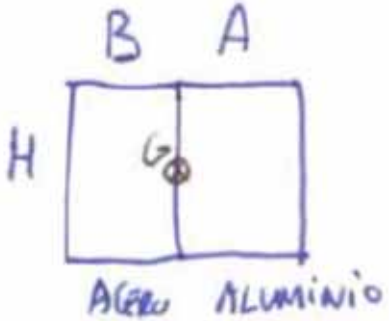
a) A/B=3.

b) A/B=√3.

c) A/B=0.3333 .

d) A/B=2.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



University Copy For Library Use

- EXF 1112.

11 Una compuerta de cuarto de cilindro ha de soportar una fuerza total $R=\sqrt{(H^2+V^2)}$.

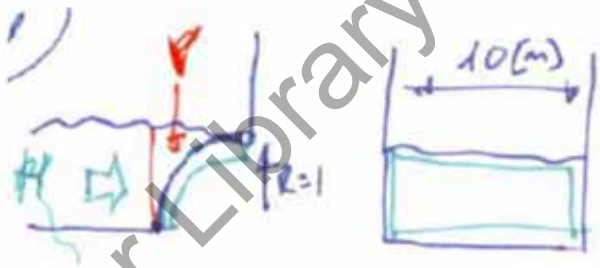
a) 53350[N].

b) 49025[N].

c) 98050[N].

d) Se necesita la tabla de inercia de un círculo para poder calcular.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



12 Dar la torsión en tres tramos sabiendo que el primero es +10[N.m].

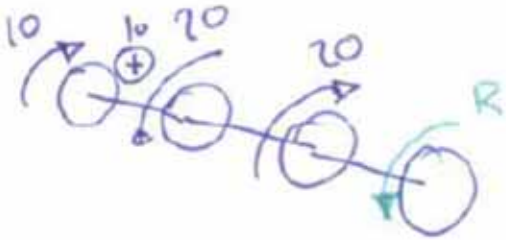
a) +10, -10, +10.

b) +10, -20, +20.

c) +10, +30, +50.

d) +10, +10, +10.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



13 Para calcular un cable con cuatro fuerzas de reacción se necesita.

a) La longitude del cabel.

b) La caida del cable en su punto más bajo.

c) La tensión máxima del cable.

d) Con cualquiera de las anteriores ya se puede calcular.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

University Copy For Library Use

- EXF 1112.

14 Dar posición del CIR de barra BC.

a) Posición 1.

b) Posición 2.

c) Posición 3, 4 ó 5.

d) Necesitamos saber V_B ó V_C.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

15 Dar velocidad de subida de la caja.

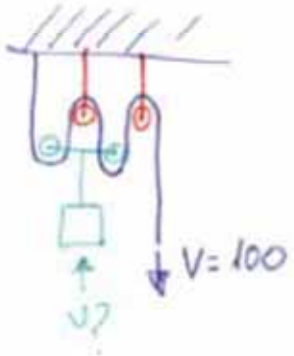
a) 50.

b) 33.33.

c) 25.

d) 20.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



University Copy For Library Use

- EXF 1112.

16 Si un tren circula a velocidad constante de 10[m/s] y se la cae la carga pasando su peso de 3[tn] a 1[tn] en 1[seg]. Dar la fuerza para mantener la velocidad constante.

a) 0[kN].

b) 20[kN].

c) 30[N].

d) 30000[N].

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

17 Si $a=k^2x$ entonces la relación v/x es: .

a) $v/x=k$.

b) $v/x=1/k$.

c) $v/x=k^2$.

d) $v/x=(1-k)$.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

18 Una moto toma una curva de radio "r" a velocidad constante "v". Para no derrapar lo mejor es:

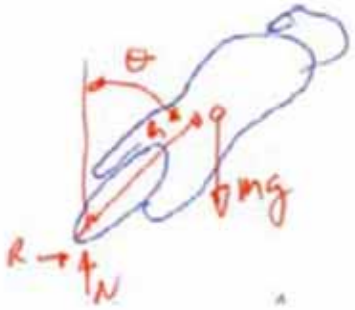
a) Tener un centro de gravedad muy bajo (h pequeño).

b) Tener mucha inclinación (θ grande).

c) Aumentar la masa de la moto para subir N.

d) El no deslizar se cumple si $v^2/r<\mu g$.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



University Copy For Library Use

- EXF 1112.

19 Para girar la barra de masa "m" y longitud "L" por el punto B, sin considerar la gravedad, de manera que se alcance ω=1[rad/s] en 1[rad] se necesita un par M:

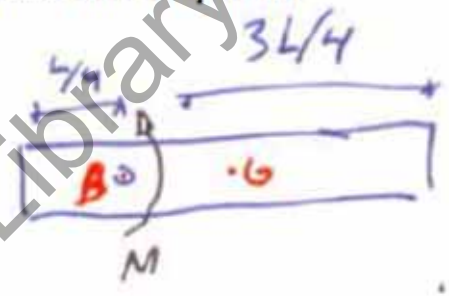
a) $M=mL^2/12$.

b) $M=mL^2/24$.

c) $M=7mL^2/96$.

d) $M=7mL^2/48$.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.



20 Para girar la barra de masa "m" y longitud "L" por el punto B, sin considerar la gravedad, de manera que se alcance ω=1[rad/s] en 1[seg] se necesita un par M:

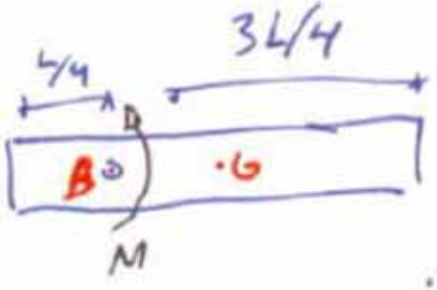
a) $M=mL^2/12$.

b) $M=mL^2/24$.

c) $M=7mL^2/96$.

d) $M=7mL^2/48$.

e) Ninguna de las anteriores. Anotar respuesta_____.

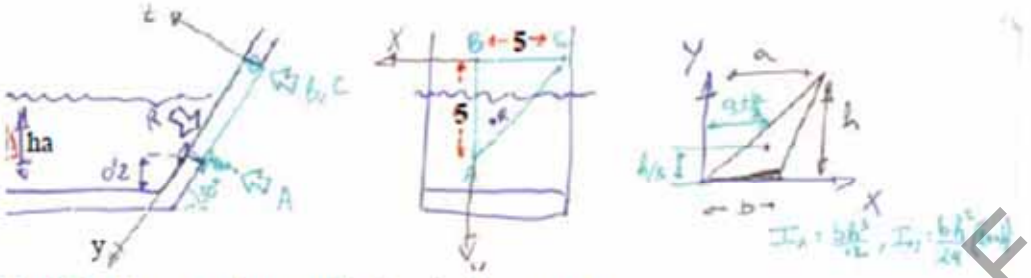


University Copy For Library Use

- EXF 1112.

1 Presión hidráulica en compuerta. (2.5p. de 10)

Dada la compuerta triangular de 5[m]x5[m] de acero de densidad δ=8000[kg/m3] y colocada semisumergida según dibujo para una altura de agua ha=1.x[m] calcular:



1a: 0.5p. Fuerza resultante aplicada sobre la compuerta
R= δg2(1.x-0.2)^3/3.

1b: 0.5p. Dar y_{xp} de la fuerza resultante
y_{xp}= 5-(1.x-0.2)2+((1.x-0.2)2)^4/12/((1.x-0.2)2/3(1.x-0.2)^2/2)=5-(1.x-0.2) en mitad zona sumergida.

1c: 0.5p. Dar la reacción en A.
A= R(5-(1.x-0.2))/5.

1d: 0.5p. Dar x_{xp} de la fuerza resultante:
x_{xp}= -((1.x-0.2)2)^4/24/((1.x-0.2)2/3(1.x-0.2)^2/2)=-(1.x-0.2) en una cuarta parte.

1e: 0.5p. Dar la reacción en B y en C.
C= R((1.x-0.2))/10.

B= R((1.x-0.2))/10.

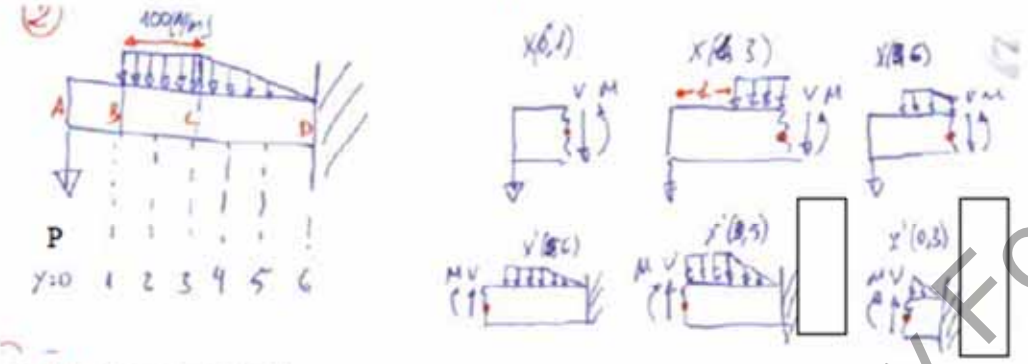
1f. * SUBIR NOTA. Dar altura de agua para la que se abriría la compuerta si en A se coloca un muelle de k=313760[N/m] comprimido 0.1[m] para asegurar estanqueidad hasta la altura a calcular en que se abrirá y dejará pasar el agua.
ha= 31376=δg2(ha-0.2)^3/3(5-(ha-0.2))/5 ⇨ ha=2.2[m]

University Copy For Library Use

- EXF 1112.

2 Esfuerzos internos estática. (2.5p. de 10)

Dada la viga cargada en un extremo con P=20α [N] y una carga distribuida entre 1y3 de 100[N/m] que cae hasta cero de 3 a 6 como se ve en la figura. Se pide calcular:



2a: 0.5p. Reacciones en D.

D_x= 0.

D_y= 55α

M_{DZ}= -(2300+6α)

2b: 0.5p. Cortante y momento en tramo x(0,1).

V= -20α

M= -20αx. , M(1)= -20α

2c: 0.5p. Cortante y momento en tramo x(1,3).

V= -20α -100(x-1), V(3)=-400-α.

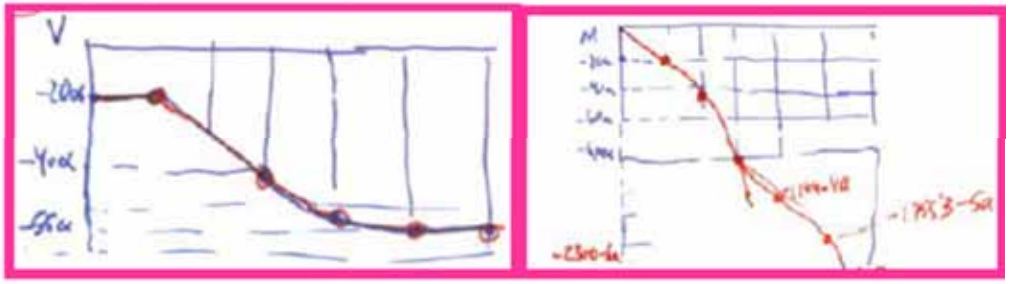
M= -20αx -100(x-1)^2/2. , M(2)=-450-2α, M(3)=-800-3α

2d: 0.5p. Cortante y momento en tramo x(3,6) o x'(0,3) para x'=(6-x).

V= -100x'^{2}/6-55α , V(4,x'=2)=-489-α, V(5,x'=1)=-533-α, V(6,x'=0)=-550-α,

M= 55αx'-(2300+6α)-(100x'^{3}/18), M(4,x'=2)=-1244-4α, M(5,x'=1)=-1755-5α, M(6,x'=0)=-2300-6α

2e: 0.5p. Diagrama de cortante y momentos. Cortante máximo y flector máximo



2f: * SUBIR NOTA. Dar posiciones en las que |M|>1244.4+4α.

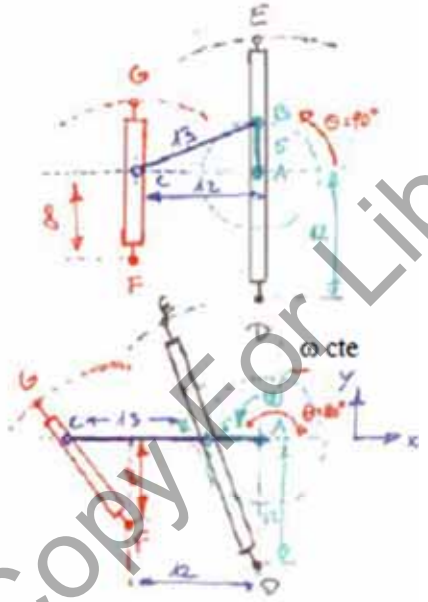
X entre 4 y 6 [m]

University Copy For Library Use

- EXF 1112.

3 Cinemática movimiento plano. (2.5p. de 10)

La manivela AB gira con ω=1.x [rad/s] constante. Calcular para θ=180°:



3a: 0.25p. v_B= (0,−5ω).

0.25p. a_B= (5ω²,0).

3b: 0.25p. v_C= (0,0).

0.25p. ω_{CB}= −5ω/13 ↻.

3c: 0.25p. a_C= ((5+25/13)ω²,0).

0.25p. α_{CB}= 0.

3d: 0.25p. $v_{B'}$= (0,ω25/13) en ejes (r,t).

0.25p. $\omega_{DB'E}$= (5/13)²ω ↺.

3e: 0.25p. $a_{B'B}$= ω²(5²/13−5⁴/13³) dirección radial en ejes (r,t).

0.25p. $\alpha_{DB'E}$= ω²(2*5³*12/13⁴−5²*12/13³) ↺.

3f: * SUBIR NOTA. $v_{C'}$= 0.

$\omega_{FC'G}$= 0.

3g: * SUBIR NOTA. $a_{C'C}$= ω²(5+25/13)*0.6 dirección radial en ejes (r,t)..

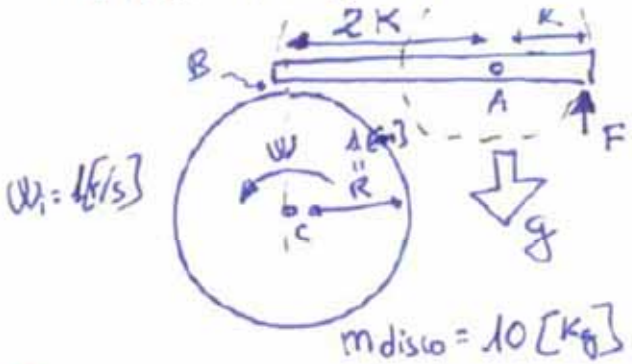
$\alpha_{FC'G}$= −ω²(5+25/13)0.8/10↻.

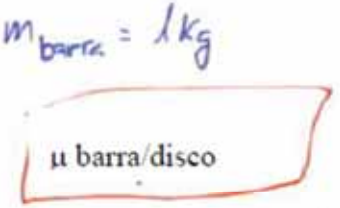
University Copy For Library Use

- EXF 1112.

4 Cinética movimiento plano. (2.5p. de 10)

Una disco de masa m_d=10[kg] y radio r=1[m] gira con ω_i=1[r/s] y se frena con una fuerza F y el peso de la barra m_b=1[kg] con μ=0.x[-]. Calcular:





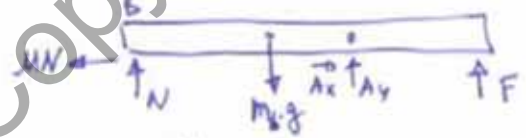
$m_{barra} = 1kg$

$I_{Gdisco} = \frac{1}{2} m r^2$

$m_{disco} = 10[kg]$

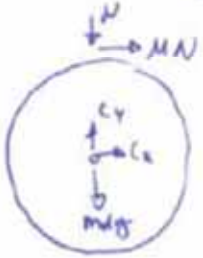
4a: 0.5p. Fuerza normal N para parar en 1[rad]

$N = m_d r\omega^2/4\mu[N]$.



4b: 0.5p. Fuerza F en función de N

$F = 2N - m_b g/2[N]$.



4c: 0.5p. Reacciones en A en función de N

$A_x = \mu N$ [N].

$A_y = m_b g - F - N = 3m_b g/2 - 3N$ [N].

4d: 0.5p. Reacciones en C en función de N

$C_x = -\mu N$ [N].

4e: 0.5p. Fuerza normal N para parar en 1[seg]

$N = m_d r\omega/2\mu[N]$.

4e: * SUBIR NOTA. Si el disco se ahueca haciendo agujeros hasta conseguir que la masa se 1[kg] y el área sea de superficie sea 1[m^2] con Inercias de área Imax=Imin=0.4[m^4]. Calcular inercia de masa de la nueva rueda.

$I_m = (m/A)(I_x + I_y) = 0.8[kg.m^2]$.

University Copy For Library Use

ANTIGUO

University Copy For Library Use

• Simulacro test.

En el examen se recogerá el test una hora después del inicio. Como en el examen hay cuatro horas y en simulacro 1 hora se hará una cuarta parte, o sea, cinco preguntas en lugar de 20. Se estima 2 minutos por pregunta tipo test.

1.- Indicar momento correcto de par de fuerzas:

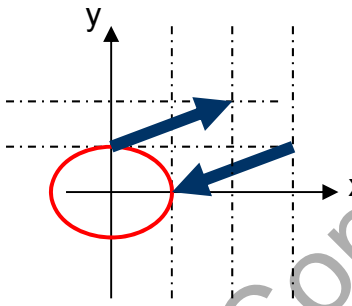
(a) M=(0,0,3)

(b) M=(0,0,-3)

(c) M=(0,0,√10)

(d) M=(0,0,-√10)

(e) ninguna de las anteriores



2.- Dar posición del centroide de la línea en forma "L"

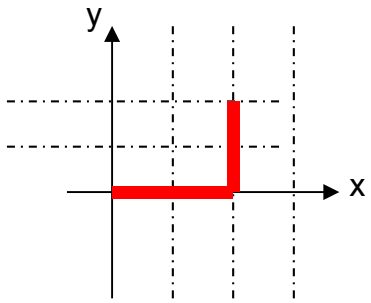
(a) (0,2)

(b) (1,1)

(c) (1.5,0.5)

(d) (0,0)

(e) ninguna de las anteriores



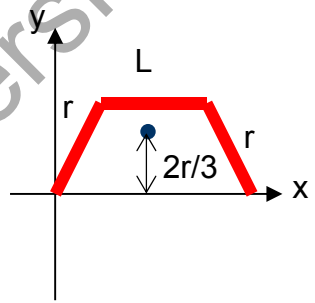
3.- Si la línea tiene el centro de gravedad a 2r/3, r=3, el área de revolución es 40π dar L:

(a) L=6

(b) L=8

(c) L=2 (d) L=4

(e) ninguna de las anteriores



4.- Dar la velocidad de B en este instante:

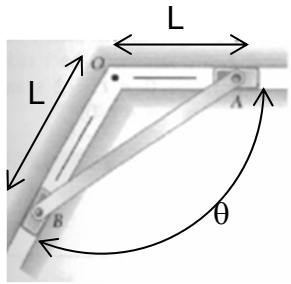
(a) Se necesita saber θ.

(b) $|v_B|=2|v_A|$

(c) $|v_B|=|v_A|$

(d) $|v_B|=3|v_A|$

(e) ninguna de las anteriores



University Copy For Library Use

5.- La barra de masa m gira por la acción de P con α=-3P/mL. Dar reacción en A al inicio v=0:

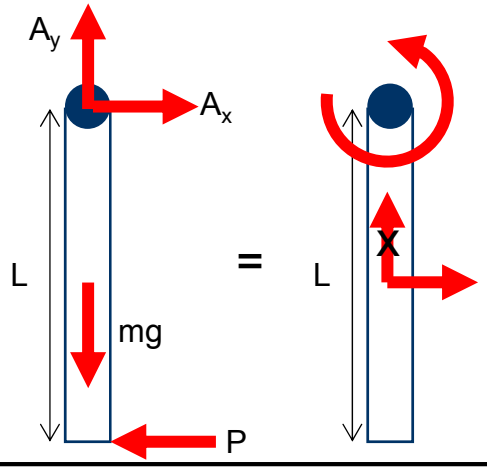
(a) (P,2mg)

(b) (P,mg)

(c) (-P/2,mg)

(d) (-P,mg)

(e) ninguna de las anteriores



6.- Si las inercias de superficie son Ix=20, Iy=10, Ixy=5 cuál es la dirección principal de inercia:

(a) (0.7071,0.7071)

(b) (1,0)

(c) (0,1)

(d) (0.9239,-0.3827)

(e) ninguna de las anteriores

7.- Dar fuerza equivalente para la viga e la figura para L=6[m] y w=2[N/m].

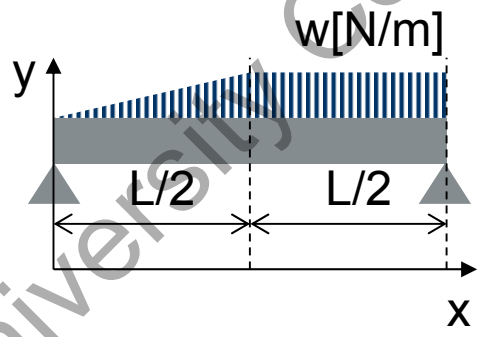
(a) 9[N] en x=2[m]

(b) 9[N] en x=3.667[m]

(c) 9[N] en x=4.5[m]

(d) 9[N] en x=4[m]

(e) ninguna de las anteriores



8.- Para una viga apoyada con fuerza F en y negativo en el centro x=L/2:

(a) Cortante V=F de 0 a L/2 y V=-F de L/2 a L.

(b) Cortante V=F/2 de 0 a L/2 y V=-F/2 de L/2 a L.

(c) Cortante V=F de 0 a L.

(d) Cortante V=-F de 0 a L.

(e) ninguna de las anteriores

University Copy For Library Use

9.- Indicar barras de fuerza nula:

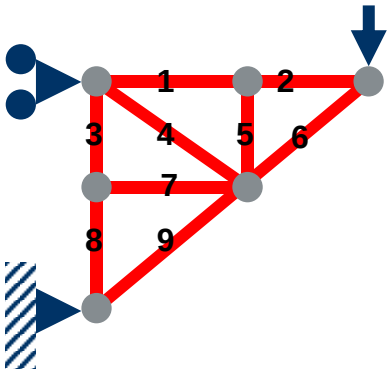
(a) 4,5 y 7

(b) sólo 4 y 5

(c) sólo 4

(d) sólo 7

(e) ninguna de las anteriores



10.- En un cable con una carga concentrada en el centro y extremos a diferente altura la tensión máxima está :

(a) En el centro

(b) En el extremo en que el cable esté más horizontal.

(c) En el extremo en que el cable esté más vertical.

(d) En cualquiera de los extremos.

(e) ninguna de las anteriores

11.- Si la velocidad del aire es 1[m/s] y disminuye al alejarse x en metros v=1/(x+1) ¿Tiempo en recorrer 2[m]?

(a) t=1[h]

(b) t=10[s]

(c) t=1[min]

(d) t=4[s]

(e) ninguna de las anteriores

12.- En un movimiento plano 2 rectas de una misma pieza:

(a) Son siempre paralelas.

(b) Son siempre perpendiculares.

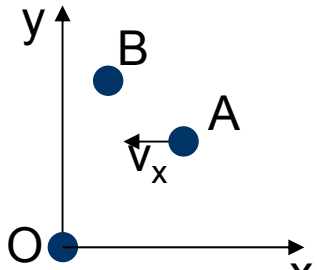
(c) Tienen la misma velocidad angular.

(d) Tienen la misma velocidad lineal.

(e) ninguna de las anteriores

University Copy For Library Use

13.- En una rotación plana respecto a un eje fijo O conocido si sabemos la velocidad en x de un punto A para calcular la velocidad de B:



(a) Podemos saber la velocidad de B.

(b) Necesitamos v_{ay}.

(c) Se puede si α=0.

(d) No se puede.Se necesita otra dirección para el CIR.

(e) ninguna de las anteriores

14.- Si ω_{ab}=(0,0,2) y r_{ab}=(1,0,0), v_a=0 la velocidad de b es:

(a) (0,-2,0)

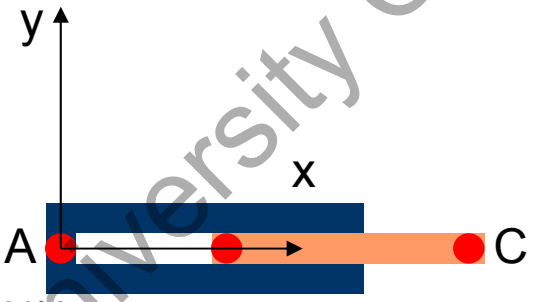
(b) (2,0,0)

(c) (-2,0,0)

(d) (0,2,0)

(e) ninguna de las anteriores

15.- Si la barra AB gira con velocidad constante ω=5[rad/s]↺ y v_{CA}=1[m/s] coriolis vale:



(a) (1,0,0)

(b) (0,10,0)

(c) (0,-10,0)

(d) (-1,0,0)

(e) ninguna de las anteriores

16.- Si conozco la inercia de superficie en "x" y en "y" de una pieza plana y su masa la inercia de la masa se puede calcular :

(a) En x,y,z para cualquier espesor de pieza.

(b) En x,y para espesores grandes.

(c) En z para cualquier espesor.

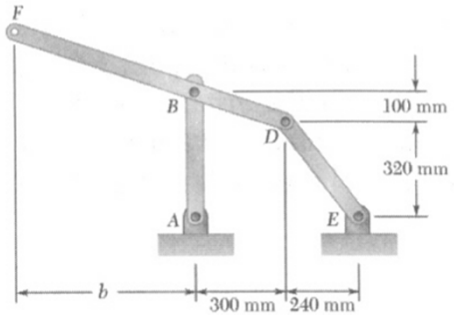
(d) Se necesita los productos de inercia "xy"

(e) ninguna de las anteriores

University Copy For Library Use

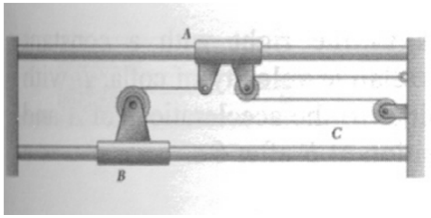
17.- Dónde está en CIR de barra BDF:

(a) En la vertical de E.
(b) En la vertical de D.
(c) En la vertical de A.
(d) En la vertical de F.
(e) ninguna de las anteriores



18.- Dar relación de velocidad entre A y B:

(a) $v_a=4v_b$.
(b) $v_a=-7v_b$.
(c) $v_a=7v_b$.
(d) $v_a=-2v_b$.
(e) ninguna de las anteriores



19.- Calcular la fuerza en un codo de tubería de 180º que transporta líquido a velocidad v con caudal másico m':

(a) F=1*m'*v
(b) F=2*m'*v
(c) F=0
(d) F=10*m'/v
(e) ninguna de las anteriores

20.- La frecuencia natural de una masa m que cuelga de dos muelles idénticos en serie de constante k es:

(a) $\omega=\sqrt{k/m}$
(b) $\omega=\sqrt{2k/m}$
(c) $\omega=\sqrt{m/k}$
(d) $\omega=\sqrt{k/(2*m)}$
(e) ninguna de las anteriores

University Copy For Library Use

- Simulacro práctica sobre 10 puntos.

El examen se recogerá las 4 horas del inicio. Como en el examen hay cuatro horas y en simulacro 1 hora se hará una cuarta parte, o sea, 2.5 puntos de 10 (un problema).

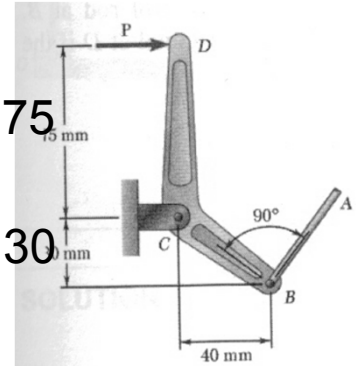
Problema 1:

A la palanca se le aplica un fuerza P=200[N] que contrarresta el "cable" AB de manera que no se mueve. Determinar:

1a 1p. La tensión del cable AB.

1b 1p. La reacción en x en el apoyo C.

1c 0.5p. La reacción en y en el apoyo C.



University Copy For Library Use

Problema 2:

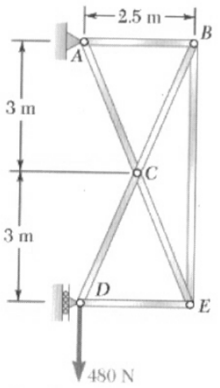
Para la estructura de la figura determinar:

2a 1p. La reacción en A y en D.

2b 0.5p. La tensión en las barras AB, AC.

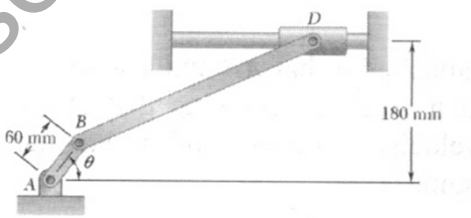
2c 0.5p. La tensión en las barras BE, BC.

2d 0.5p. .La tensión en las barras CD, CE y DE.



University Copy For Library Use

Problema 3:



La barra BD mide 300[mm] está conectado a barra AB y collar D de masa despreciable sin fricción. Si AB rota con ω_{ab}=300[rpm]↺ constante determinar para θ=0:

3a 0.5p. v_B.

3b 0.5p. ω_{BD}.

3c 0.5p. v_D.

3d 0.5p. α_{BD}.

3e 0.5p. a_D.

University Copy For Library Use

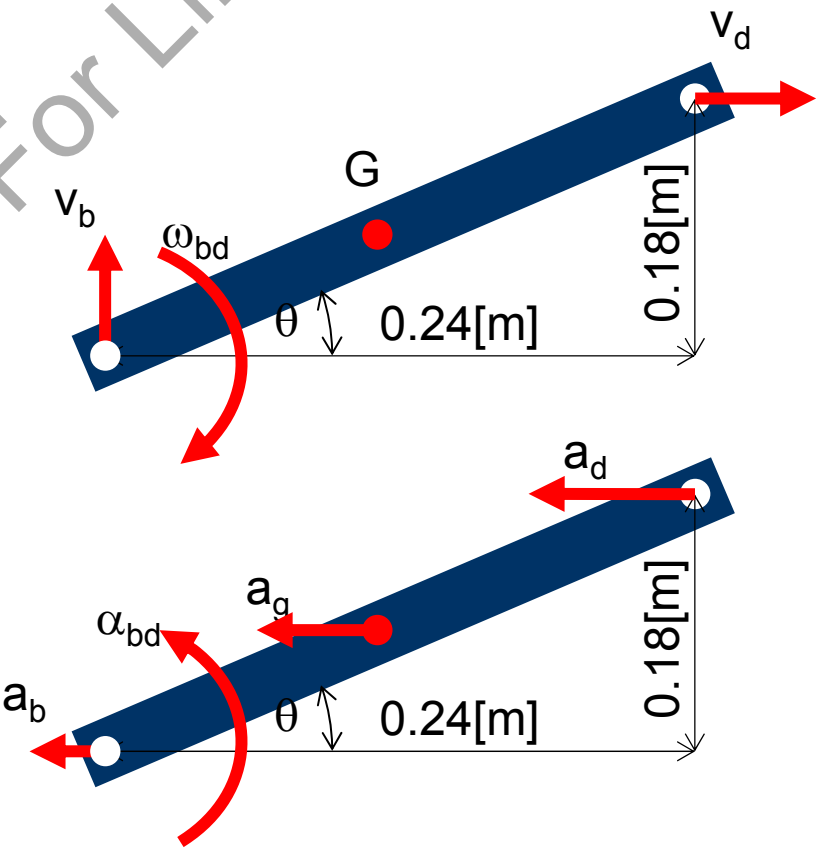
Problema 4:

La barra BD mide 300[mm] y pesa 3[kg] está conectado a un pasador en B y una guía horizontal en D. Se sabe que v_b=1.885[m/s]↑ y v_d=1.414[m/s]→, ω_{bd}=7.854[rad/s^2]↻, y α_{bd}=46.27[rad/s^2]↺. El centro de gravedad tiene una aceleración con estos datos que resulta tan sólo en x negativa a_g=70.78[m/s^2]←, a_b=59.22[m/s^2]←, a_d=82.50[m/s^2]←

4a 1p. reacción en D (sólo en y, en x es cero).

4b 1p. reacción vertical en B.

4b 0.5p. reacción horizontal en B.



University Copy For Library Use

- Soluciones.

➢ Test.

o 1(d), 2(c) , 3(d) , 4(c) , 5(c) , 6(d) , 7(b) , 8(b) , 9(a), 10(c), 11(d), 12(c), 13(a), 14(d), 15(b), 16(c), 17(c), 18(d), 19(b), 20(d).

➢ Problemas:

o 1a: T_{ab}=300[N] , 1b: C_x=-380[N] , 1b: C_y=-240[N]

o 2a: A=(0,480)[N], D=(0,-480aplicada), 2b: AB=-200[N], AC=+520[N], 2c: BE=-480[N], BC=+520[N], 2d: CD=CE=+520[N], DE=-200[N]

o 3a: v_B=(0,1.885,0)[m/s] , 3b: ω_{bd}=(0,0,-7.854)[rad/s], 3c: v_d=(1.413,0,0)[m/s], 3d: α_{bd}=(0,0,46.27)[rad/s^2], 3e: a_d=(-82.5,0)[m/s^2]

o 4a: D_x=98.7[N], 4b: B_y=-69.26[N], 4c: B_x=-212.34[N]

University Copy For Library Use

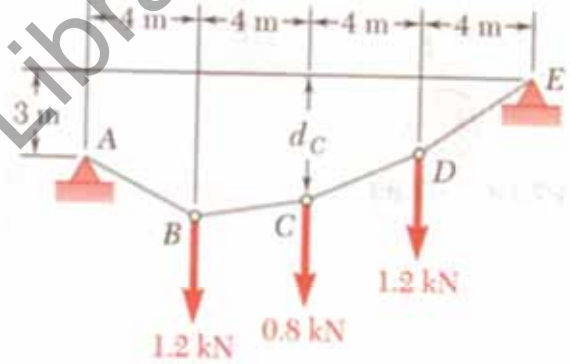
• Ejemplo examen cursos Reyes (1/2).

En cursos anteriores se hacían tres problemas en tres horas como en este ejemplo.

1. Se tiene un cable cargado como se muestra en la figura. Si se sabe que la distancia d_C es de 4m, calcule:

   a. La reacción en el extremo A **(1,5 puntos)**

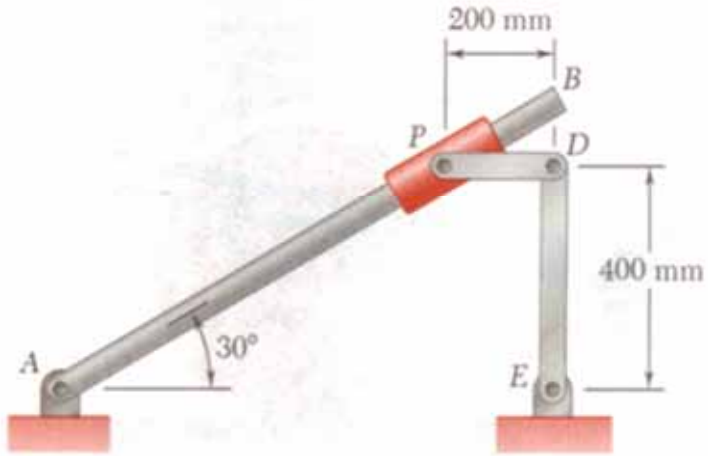
   b. La reacción en el extremo E **(1,5 puntos)**



2. El collarín P se desliza hacia el punto A con una velocidad de 2 m/s a lo largo de la varilla AB que gira en sentido contrario al del movimiento de las agujas de un reloj con una velocidad angular constante de 5 rad/s. Calcule:

   a. La velocidad y aceleración del punto P, que representa el centro del pasador de unión del collarín con la barra PD **(1 punto)**

   b. La velocidad y aceleración del punto D **(2 puntos)**



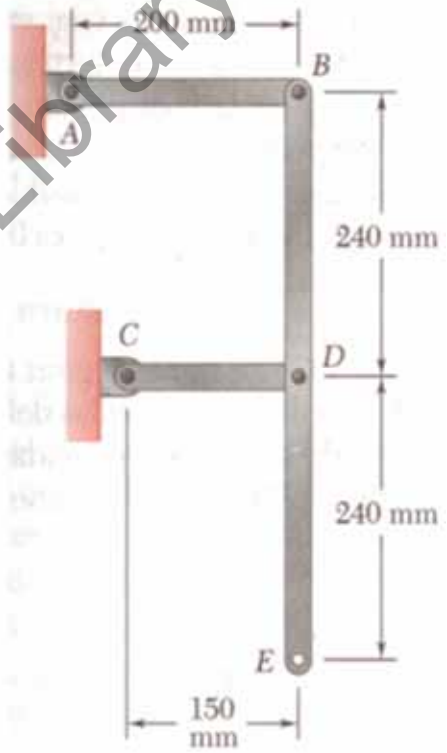
University Copy For Library Use

- Ejemplo examen cursos Reyes (2/2).

3. La barra uniforme BDE, de 5 kg de masa, se fija a dos varillas AB y CD. Si se sabe que en el instante indicado la varilla AB tiene una velocidad angular constante de 6 rad/s en sentido horario, calcule:

a. La fuerza que actúa en el pasador B **(2 puntos)**

b. La fuerza que actúa en el pasador D **(2 puntos)**



Soluciones:

1a. A=(-3.200,1.000)[kN]

1b. E=(3.200, 2.200)[kN]

2a. v_p=(-3.7,2.5)[m/s], a_p=(-7.3,27.3)[m/s^2]

2b. v_d=(-3.7,0)[m/s], a_d=(37.7,-34.8)[m/s^2]

3a. B=(4,-m_{ab}g/2)

3b. A=(-52,m_{bd}g+m_{ab}g/2)

University Copy For Library Use

- Resumen.
  - Simulacro de examen.

University Copy For Library Use

S44t.- Repaso Asignatura.

Mejora 1314 ....

University Copy For Library Use

- Repaso sesión anterior.
  - Simulacro de examen.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Repaso de conceptos importantes.

- Traducir unidades. En examen se dará la relación de unidades americanas a ISO si se necesitaran.
- Sumar fuerzas como vectores. Productos vectoriales de fuerzas y vectores de posición.
- Usar cuatro cifras significativas.
- Par de fuerzas y momentos.
- Sustituir par de fuerzas y fuerza por una fuerza en un punto.
- Colocar las fuerzas de reacción de acorde a los puntos de fijación o guía. Criticar el caso de cables en que el resultado sala a compresión. Criticar el caso de apoyos en que el resultado salga negativo (posibilidad de vuelco).
- Considerar la fricción máxima con coeficiente estático y dinámico.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

• Repaso de conceptos importantes.

$$\bar{x}_{cg} = \frac{1}{m_t}\sum_{i=1}^{n} x_i \times m_i$$

➢ Calcular centroides de líneas, superficies y volúmenes. Se entregará tabla de figura básica excepto rectángulo y triángulo que se supone se conocen.

$$A = \theta \bar{z} L \qquad \bar{z} = \frac{1}{L}\int_L z dL$$

$$V = \theta \bar{z} A \qquad \bar{z} = \frac{1}{A}\int_A z dA$$

➢ Aplicar teorema de Pappus-Guldin para superficies y volúmenes de revolución.

➢ Calcular momentos de superficie y componerlos a partir de centro de gravedad con Steiner. En caso de agujeros Steiner se restan las superficies.

$$I_x = \int_A y^2 dA; \; I_y = \int_A x^2 dA; \qquad I_{x'} = I_x + A\bar{y}^2$$

➢ Calcular radio de giro de una superficie.

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}};$$

➢ Calcular ejes principales y direcciones principales de inercia. (círculo de Mohr)

$$I_{xy} = \int_A xy dA;$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{(I_x - I_y)}$$

$$I_{u,v} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \left[\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2\right]^{1/2}$$

University Copy For Library Use

- Pasar cargas distribuidas a cargas concentradas equivalentes.
- Calcular la resultante de la presión hidráulica en sólidos.

$$R = p_{\bar{y}} A = \gamma \cos(\theta) \bar{y} A$$

- Colocar la fuerza hidráulica resultante por centroide de volumen de presiones, usando Steiner y momentos de inercia para superficies planas o método aproximado dividiendo en zonas planas la presión para formas complejas.

$$x_p = \frac{I_{xy_{\text{sup}}}}{\bar{y} \cdot A} = \bar{x} + \frac{I_{\bar{x}\bar{y}}}{\bar{y} \cdot A};$$

$$y_p = \frac{I_{x_{\text{sup}}}}{\bar{y} \cdot A} = \bar{y} + \frac{I_{\bar{x}}}{\bar{y} \cdot A}$$

- Esfuerzos internos axiales, torsión, cortante y momento flector. Importancia en signos de los esfuerzos internos (compresión negativo, tracción positivo).

$$V = \frac{dM}{dx}$$

- Cálculo de estructuras de barras por método secciones o nudos. Identificar barras con fuerza cero.

University Copy For Library Use

- Indicar zonas de tensión máxima en un cable cargado con fuerzas concentradas.
- Calcular la altura mínima en función de la tensión de cable para cargas distribuidas.
- Calcular la longitud de cable a partir de separación de apoyos y altura mínima para cargas distribuidas.
- Calcular alturas y tensiones y longitudes para peso propio de cables.

DINÁMICA

- Posición, trayectoria, desplazamiento, velocidad y aceleración y relaciones entre ellas.
- Usar posiciones, velocidades y aceleraciones relativas.
- Relaciones en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.
- Definición de radio de curvatura.
- Equivalencia de velocidades y aceleraciones en traslaciones curvilíneas.
- Equivalencia en movimiento plano general y rotación respecto eje fijo.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

University Copy For Library Use

- Calcular la posición del centro instantáneo de rotación (CIR) incluso para movimientos paralelos.

$$v_B = v_A + \omega \times r_{B/A} + v_{Brel}$$
$$a_B = a_A + \omega \times (\omega \times r_{B/A}) + \alpha \times r_{B/A} + a_{Brel} + 2\omega \times v_{Brel}$$

- Calcular con Coriolis cuando hay deslizamiento.
- Calcular momentos de inercia de masa y radios de giro.
- Pasar de momentos de superficie a momentos de masa para piezas planas.
- Aplicar Steiner a momentos de inercia de masa respecto centroide.
- Productos de inercia de masa y ejes principales.

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$

- Simplificar el problema al detectar que el movimiento es traslación curvilínea.
- Relacionar posiciones, velocidades y aceleraciones en ejercicios de poleas.
- Usar regla de los senos en un triángulo para saber calcular velocidades.
- Calcular equilibrio de fuerzas con fuerzas inerciales de traslación y rotación.

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Calcular el trabajo de un fuerza para un recorrido lineal o de un para un angular.
- Usar métodos de energía conservativa y no conservativa (rozamiento).
- Calcular potencia y rendimiento de motor lineal o rotatorio.
- Calcular con conservación de cantidad de movimiento lineal y angular.
- Calcular impulsos por incrementos de masa.
- Calcular los pares transmitidos en engranajes y correas con correspondencia de velocidades.
- Usar simplificaciones para movimiento plano.

$$mv_1 + \int_1^2 F\partial t = mv_2$$

$$r \times mv_1 + I \times \omega_1 + \int_1^2 r \times F\partial t + \int_1^2 M\partial t = r \times mv_2 + I \times \omega_2$$

Si $\bar{z} = 0$;

$$M_{Ax} = -\alpha I_{Azx} + \omega^2 I_{Ayz}$$

$$M_{Ay} = -\alpha I_{Ayz} - \omega^2 I_{Azx}$$

$$M_{Az} = a_{Ay}\bar{x}m - a_{Ax}\bar{y}m + \alpha I_{Az}$$

Si $I_{Azx} = I_{Ayz} = 0$;

$$M_{Ax} = 0$$

$$M_{Ay} = 0$$

$$M_{Az} = a_{Ay}\bar{x}m - a_{Ax}\bar{y}m + \alpha I_{Az}$$

Si respecto a G con $I_{Gzx} = I_{Gyx} = 0$;

$$M_{Gx} = -\alpha I_{Gzx} + \omega^2 I_{Gyz} = 0$$

$$M_{Gy} = -\alpha I_{Gyz} - \omega^2 I_{Gzx} = 0$$

$$M_{Gz} = a_{Gy}\bar{x}m - a_{Gx}\bar{y}m + \alpha I_{Gz} = \alpha I_{Gz}$$

University Copy For Library Use

Andrés García, andres.garcia@iqs.url.edu ,Vía Augusta, 390 – 08017. Barcelona. (+34) 932 672 000-ext.283 F. (+34)932 056 266

- Aplicar simplificaciones para traslaciones, traslaciones curvilíneas, rotaciones centradas, rotaciones con centro de gravedad descentrado, para cuerpos no simétricos al plano de movimiento con centro de gravedad en eje o fuera.
- Ensamblar conjuntos de piezas y pasar las fuerzas-reacciones en las uniones de una pieza a otra o solucionar el conjunto matricialmente. (Se ampliará durante la carrera).
- Considerar rotaciones finitas en el orden adecuado.
- Considerar ecuaciones de cinética en 3D.
- Simplificar energía cinética para traslaciones y rotaciones y movimiento plano general.
- Pensar en método energías cuando se da fuerza y distancia o par y ángulo.
- Pensar en métodos momentos cuando se da fuerza y tiempo o par y tiempo.
- Aplicar coeficiente de restitución de impacto C_R ó e. (e=0 plástico, e=1 elástico)

$$\begin{cases} M_1V_{1f} + M_2V_{2f} = (M_1V_1 + M_2V_2) \\ -V_{1f} + V_{2f} = C_R(V_1 - V_2) \end{cases}$$

University Copy For Library Use

- Calcular momentos en 3D $M_G=H'_G=I\alpha+\Omega x I\omega$.
- Calcular frecuencias en [rad/s] y en [Hz] y periodos [s] para oscilaciones libres.
- Calcular la rigidez equivalente de muelles en serie o paralelo.
- Calcular la rigidez equivalente para péndulos.
- Calcular la masa equivalente para péndulos.
- Calcular la constante de amortiguamiento crítico.
- Calcular la amplitud de oscilaciones forzadas.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$c_{crit}=2\sqrt{(mk)}$

$\xi=c/c_{crit}$

$$FM = \frac{\chi'}{\chi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2\zeta r\right)^2}}$$

University Copy For Library Use

- Resumen.
  - Repaso de la asignatura.

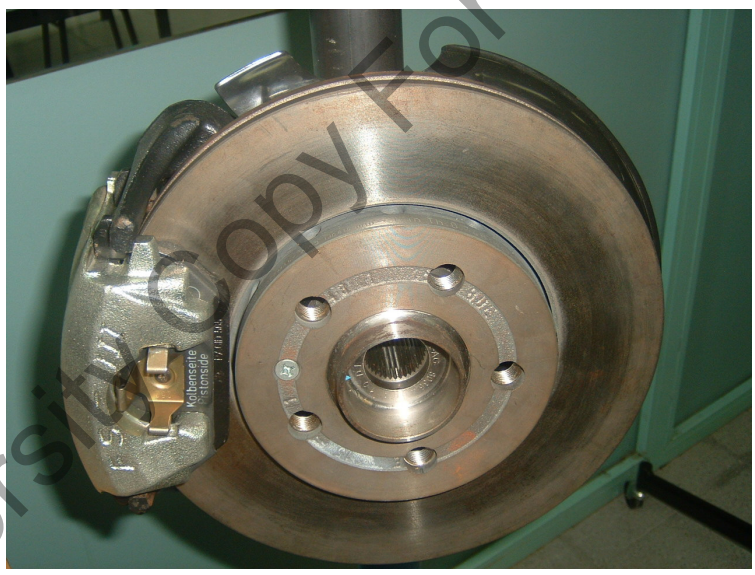
University Copy For Library Use

PRÁCTICAS DE LABORATORIO

DEPARTAMENTO: INGENIERIA INDUSTRIAL

MECANICA APLICADA

2º CURSO



Autor: Ing. Reyna Mercedes Peña Aguilar.

2013-2014

University Copy For Library Use

INDICE:

Contenido		Página
1.-	Normas en el laboratorio.	3
2.-	Prácticas de laboratorio.	
2.1.-	Lab. nº 1. Cálculo experimental de fuerzas. Equilibrio de partículas	5
2.2.-	Lab. nº 2. Calculo experimental de momentos de una fuerza. Equilibrio de vigas isostáticas	11
2.3.-	Lab. nº 3 Análisis de estructuras. Fuerzas internas	15
2.4.-	Lab. nº 4. Propiedades físicas de los sólidos	21
2.5.-	Lab. nº 5. Cinemática y dinámica. PAM	25
2.6.-	Lab. nº 6. Mecanismos de elevación de carga. Energía cinética y potencial.	29
2.8.-	Lab. nº 7. Impacto.	36
2.9.-	Lab. nº 8. Rozamiento. Leyes y aplicaciones.	44
2.10.-	Lab. nº 9. Simulación de sistemas masa –resorte -amortiguador.	49
3.-	Bibliografía.	54

University Copy For Library Use

PERSONA CIENCIA EMPRESA
Universitat Ramon Llull

NORMAS DE ORDEN EN EL LABORATORIO DE MECÁNICA APLICADA

1. No fumar, comer, ni beber en todo el laboratorio
2. Pasado 15 minutos no se podrá entrar a realizar la práctica
3. No se admiten mochilas, cascos de moto, bolsos, etc. dentro del laboratorio. Sólo se admite el material necesario para la práctica preferiblemente el ordenador. Es obligatorio el uso de la bata
4. Se perderá la escolaridad con la falta a más de una práctica o la no entrega de un informe. Siendo necesario en el próximo curso la coordinación con el profesor para su realización
5. Las ausencias debidamente justificadas (certificado médico, justificante judicial, etc) antes de las 48 horas de haberse incorporado a las actividades, serán recuperadas previa coordinación con el profesor de laboratorios
6. Los informes de cada práctica se entregarán el quinto día hábil después de haber hecho la práctica. La nota máxima de la práctica bajará 1 punto por cada día de entrega tarde después de los 5 días hábiles
7. El informe se entregará en un archivo formato pdf. denominado así:

   MA_ Px _ apellido A1_ apellido A2_apellido A3_Gxx

   x- número de práctica

   A1- Alumno 1

   A2- Alumno 2

   A3-Alumno 3

   xx- número de grupo

8. El informe será breve, describirá el desarrollo de la práctica, mostrará claramente los resultados y presentará conclusiones, no debe superar las 5 páginas. Constará de las siguientes partes:

Portada: Incluye el nombre de la práctica, grupo y los nombres de los autores.

Introducción: Describe los medios utilizados y el/los objetivos a lograr.

University Copy For Library Use

Desarrollo: Describe el trabajo realizado y presenta los resultados de los experimentos mediante tablas, gráficos, esquemas, dibujos y se contestan las preguntas planteadas en la guía de práctica.

Tablas de Datos: El resultado de sus mediciones debe presentarlo en forma de tabla, esto ayuda al análisis de los resultados y a la evaluación de su informe

Cálculos, Gráficos y Resultados: Se realizan los cálculos necesarios y no puede faltar la aplicación de la teoría de errores y la presentación de los resultados en gráficos, etc.

Análisis de los Resultados: Se debe contener.

1. Comparación de sus resultados con los cálculos teóricos.
2. Análisis de los métodos empleados.
3. Se contestan las preguntas planteadas en la guía de práctica.

Conclusiones: Debe tener presente:

1. Valoración del cumplimiento de los objetivos de la práctica.
2. Aporte de la práctica a su formación.
3. Sugerencias para la mejora del laboratorio

Bibliografía:

Se enumeran todos los documentos consultados en la preparación para la realización del laboratorio y en la elaboración del informe, siguiendo la norma UNE 50-104-94 que establece los criterios a seguir para la elaboración de referencias bibliográficas, por ejemplo

Libros: Autor (Apellidos, nombre). Título de la obra. Lugar de edición: editorial, año de publicación

Articulo de revistas: Autor/autores del artículo (Apellidos, nombre. Si son varios autores se separan por punto y coma, como para los libros. Título del artículo (en cursiva o subrayado).Título de la Revista donde se ha publicado el artículo, año, Volumen, nº, páginas del artículo

Documento de Internet: Autor (Apellidos, nombre). [Tipo de soporte]. Título del documento. Lugar de edición: editorial, año de publicación. Dirección en Internet [Fecha de consulta].

University Copy For Library Use

2º Ingeniería Industrial. 1º cuatrimestre.

Práctica nº 1. Cálculo experimental de fuerzas. Equilibrio de partículas

1.- Objetivo.

Al finalizar el laboratorio los estudiantes deben ser capaces de:
- Comprobar experimentalmente la validez de los métodos del paralelogramo y del polígono para sumar magnitudes vectoriales (fuerzas)
- Determinar fuerzas desconocidas en un sistema en equilibrio de fuerzas concurrentes y coplanares

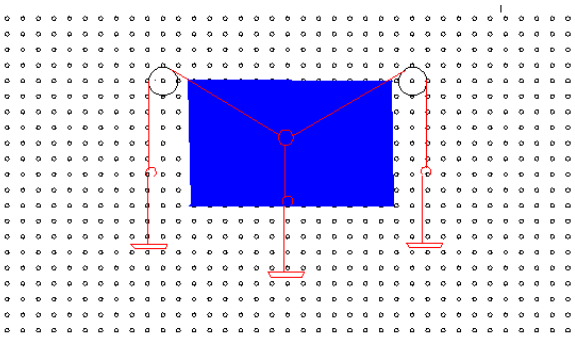
2.- Instrumentos y aparatos.

1. Panel de montaje universal.
2. Tablero de dibujo.
3. Poleas.
4. Conjunto de porta pesos, pesos y anillas con cuerdas.
5. Dinamómetro
6. Folios A4

3.- Secuencia de la práctica.

3.1.- Experimento 1

Situar el tablero de dibujo en la zona más alta del panel; habiéndole colocado previamente un folio (DIN A4). Fijar las poleas como se indica en la Fig.1. Pesar con el dinamómetro cada uno de los porta pesos a utilizar y anotar la medición.



University Copy For Library Use

Fig.1. Panel de montaje con tablero de dibujo, poleas y cuerdas.

Poner un porta pesos en cada una de las 3 cuerdas que salen de la anilla y pasar 2 de las cuerdas por las poleas. Añadir pesos a los 3 ganchos **sujetando la anilla con el dedo contra el tablero** para que el desequilibrio de la carga gradual de los porta pesos no les haga caer y que la anilla quede lo mas en el centro posible del folio. Soltar la anilla y poner el sistema en movimiento; tirar de la cuerda del centro haciendo subir y bajar solamente el peso del centro (no tocar los de los extremos). Dejar que el sistema oscile libremente en las cercanías del punto de equilibrio hasta que se detenga completamente.
Marcar 2 puntos tangentes con cada cuerda. Retirar el papel y unir los puntos hasta que las 3 rectas se intercepten. Anotar en la hoja los pesos (incluido el peso de cada porta peso) que cuelgan de las cuerdas.

3.2 Experimento 2.

Poner un nuevo folio en el tablero, repetir el experimento, pero pasando la cuerda central por la polea como indica la Fig.2. y colocando pesos de forma tal que la anilla permanezca en el centro del folio. En este caso también se ha de mover la cuerda del centro y dejar que el sistema se equilibre solo. Marcar los puntos tangentes a las cuerdas y retirar el papel. Unir los puntos con rectas hasta que se intercepten mutuamente y anotar los pesos.

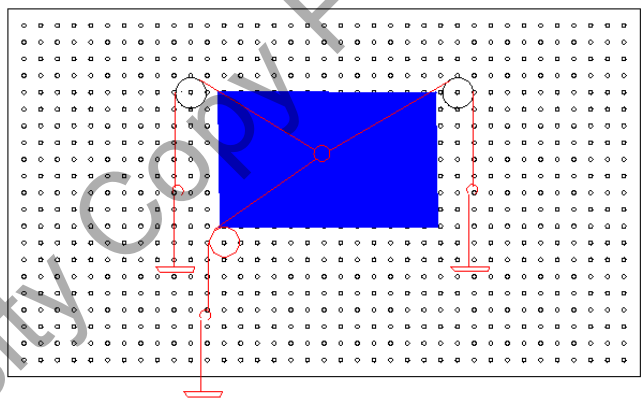


Fig. 2. Montaje con variación del ángulo de la cuerda central

En cada uno de los dibujos (experimento 1 y 2) se ha de identificar el punto de intersección de las rectas como punto **O**. Al final de la recta del centro se situará la letra *A*, en la que va del centro a la esquina superior derecha la *B* y en la restante la *C*,

University Copy For Library Use

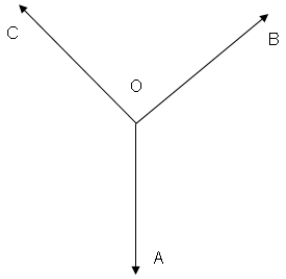


Fig. 3. Diagrama que representa los pesos que cuelgan de las cuerdas.

En cada uno de los folios se han de escribir las ecuaciones de la suma vectorial y dibujar los polígonos de fuerzas para determinar las fuerzas F_1 (OB) y F_2 (OC), tanto grafico como teóricamente.

Para dibujar los polígonos de fuerzas, se comienza situando un punto **P** (polo del polígono de fuerzas) en una zona cualquiera del folio, se representa, mediante el vector **W**, el peso que actúa según la dirección de la recta **OA**, de ese vector conocemos también el sentido (hacia la superficie terrestre) y el módulo (peso). Se le asignará una dimensión en el dibujo y se establecerá un factor de escala.

$$F.E = \frac{W_{real}}{W_{dib}};\ \left[N/mm\right] \qquad (1)$$

Luego se dibuja una recta paralela a la obtenida por medición para **W**, con el largo escogido $\mathbf{W}_{dib}$ y el sentido hacia la referencia suelo; el origen estará en **P** y en el extremo se situará una cabeza de flecha y el nombre del vector **W**.

Se trazará la dirección del vector $\mathbf{F}_1$ que representa la fuerza sobre la cuerda que une **O** con **B**. Dicha dirección se dibujará paralela a la recta **OB** y pasará por el extremo (cabeza de flecha) del vector **W**. Se trazará la dirección del vector $\mathbf{F}_2$ que representa la fuerza sobre la cuerda que une **O** con **C** paralela a dicha recta y pasando por el punto **P** de origen del polígono, observando que el polígono se cierra con las dos fuerzas desconocidas.

Se calculará el módulo de los vectores $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ midiendo sus longitudes en el polígono y aplicando la ecuación (1). Se comprobará la coincidencia de los valores obtenidos gráficamente con los valores conocidos. En ambos casos se ha de demostrar mediante cálculo que el sistema está en equilibrio.

3.3.- Experimento 3.

Situar un nuevo folio en el tablero (Fig. 1). Pasar 2 de las cuerdas por las poleas y situar pesos iguales en cada uno de los porta pesos que están en el extremo de las cuerdas. Situar peso en la tercera cuerda hasta que la anilla esté cerca del centro del folio. Tirar de la cuerda del centro y poner en movimiento el sistema dejando que se equilibre por si mismo.

University Copy For Library Use

Trazar 2 puntos tangentes a cada recta, retirar el folio y trazar rectas que unan los puntos hasta que se intercepten. Anotar en el folio los pesos (incluidos los de los porta pesos) que cuelgan de las cuerdas.
Situar un nuevo folio y repetir el procedimiento añadiendo 0.5 N en el gancho central.
Situar un nuevo folio y repetir el experimento añadiendo un peso conocido en el lado izquierdo.

Calcular resultante de dos fuerzas en el sistema y comprobar su equilibrio

En cada folio situar el punto **O** coincidente con el punto de intersección de las rectas que representan las cuerdas. En los dibujos correspondientes a la medición situar a escala las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de las cuerdas que pasan por las poleas con ayuda de la ecuación (1). Por los extremos de cada vector dibujar paralelas a ellos mismos con líneas discontinuas, y en su intersección situar el punto **F**. Medir la distancia **OF**, y aplicando la ecuación (1) calcular el módulo del vector fuerza. Comparar con el valor anotado para el peso **W** colocado en la cuerda del centro. Escriba las ecuaciones de todas las sumas vectoriales y comprobar el equilibrio del sistema.

PREGUNTAS:

1. ¿Tiene que ser la recta **OF** paralela a la cuerda del centro?

2. ¿Cuál es el sentido del vector que une los puntos **OF?** ¿Por qué?

3.4 Experimento 4.

En este experimento se utilizará la anilla de 5 cuerdas y se procederá de igual forma que en los experimentos 1 y 2, pero añadiendo 2 poleas más en la parte inferior del panel de montaje, Fig. 4. Se colgarán pesos a los 4 porta pesos de las cuerdas que pasan por las poleas hasta que la anilla esté aproximadamente en el centro del folio. La cuerda del centro colgará libremente (sin peso). Se obtendrá el dibujo correspondiente a las 4 cuerdas.

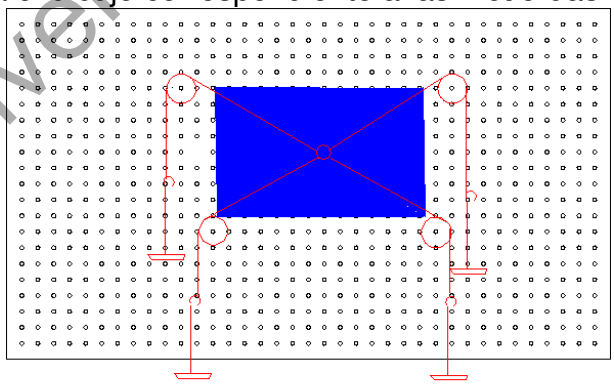


Fig.4. Montaje con cuatro poleas

University Copy For Library Use

Determinación de fuerzas en sistemas en equilibrio (W_4 y W_5)

Se retira el folio y se dibuja un polígono con centro en **O**. Se sitúa el vector $\mathbf{W}_2$ que representa el peso de la cuerda que pasa por la polea del extremo inferior derecho y luego se dibuja el vector $\mathbf{W}_3$ que representa el peso de la cuerda que pasa por la polea del extremo superior derecho y que tiene su inicio en el extremo del vector $\mathbf{W}_2$. Las longitudes de estos 2 vectores serán equivalentes a la magnitud del peso que cuelga de las cuerdas correspondientes. Por el extremo de $\mathbf{W}_3$ se dibuja –en la dirección de la cuerda que pasa por la polea del extremo superior izquierdo– la dirección del vector $\mathbf{W}_4$. Luego se traza la dirección del vector $\mathbf{W}_5$ correspondiente a la cuerda que falta. El polígono formado debe ser cerrado, y los sentidos de cada vector serán tomados desde la anilla hacia las poleas (sentido de las fuerzas que mantienen en tensión las cuerdas).
Escriba la ecuación de la suma de vectores y mida las longitudes de los vectores $\mathbf{W}_4$ y $\mathbf{W}_5$, se les aplicará el factor de escala y se comprobará que su módulo coincide con el peso colgado en los respectivos ganchos.

PREGUNTA:

1. ¿Qué elementos atentan contra la coincidencia de los valores teóricos y los valores reales (problemas de cierre del polígono, falta de coincidencia de los módulos de los vectores con los pesos)?

1.5.- Experimento 5.

Situar un nuevo folio en el tablero de dibujo y con los mismos pesos y configuración del experimento 4, colgar un peso de 1.1N (incluyendo el peso del porta peso) en la 5ª cuerda. Repetir las operaciones y dibujar el diagrama de las 5 fuerzas. Comenzar por las fuerzas $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, y $\mathbf{W}_3$ (siendo $\mathbf{W}_1$ el peso de la cuerda del centro) llevadas a escala y cerrar el polígono con las 2 restantes W_4 y W_5 .Comprobar la coincidencia entre los cálculos y las mediciones.

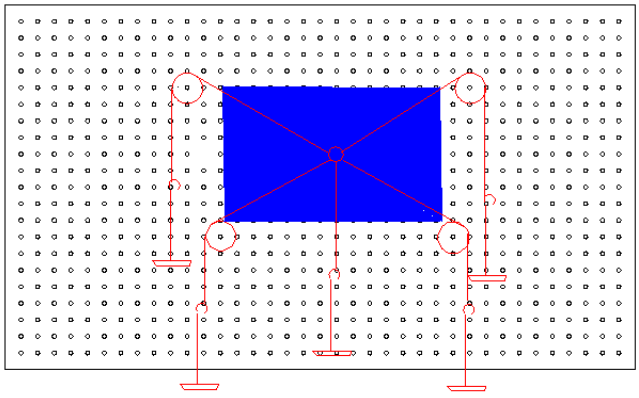


Fig.5. Montaje con cinco poleas

University Copy For Library Use

PREGUNTA:

1. ¿Por qué sólo se puede cerrar el polígono cuando faltan 2 fuerzas?

4.- Informe

Se redactará un informe, tan breve como sea posible, en el que se reflejen los cálculos, dibujos, tablas y respuestas a las preguntas.

University Copy For Library Use

2º Ingeniería Industrial. **1º cuatrimestre.**

Práctica nº 2. Cálculo experimental de momentos de fuerzas. Equilibrio de vigas isostáticas.

1. Objetivo.

Al finalizar el laboratorio los estudiantes deben ser capaces de:

- Comprobar experimentalmente el concepto de momento de una fuerza y equilibrio estático de un conjunto de fuerzas.

2. Instrumentos y aparatos.

1- Panel de montaje universal.
2- Conjunto de balanza.
3- Poleas.
3- Conjunto de porta peso, pesos y anillas con cuerdas.
4- Plomada.
5- Dinamómetro.

3. Secuencia de la práctica.

3.1 Momento de una fuerza.

Ensayo 1.

Situar el conjunto de balanza en la zona más alta del panel. Colgar los porta pesos en los orificios de los extremos de la barra de tal manera que cada porta pesos quede por detrás de la barra, Fig.1. Añadir peso en cada porta peso hasta 2 N y verificar que la balanza está en equilibrio. Mover el porta peso de la derecha al agujero más cercano al centro de la balanza y añadir peso hasta que la balanza esté en equilibrio; medir la distancia de los orificios en que están los porta pesos al pivote de la balanza. Anotar los pesos y las distancias y calcular la suma de momentos respecto al pivote de la balanza.

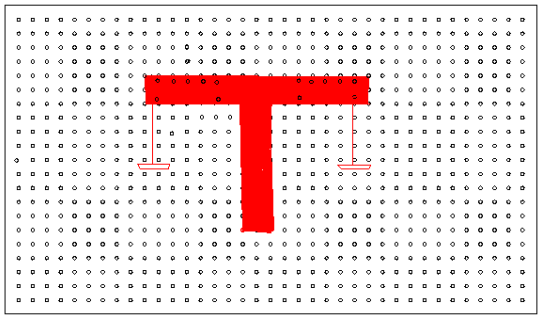


Fig.1. Panel de montaje y conjunto balanza.

University Copy For Library Use

Ensayo 2.

Utilizar una cuerda y un porta peso ligero para sustituir el porta peso de la derecha y garantizar el montaje de la Fig. 2. Ambas cargas deben estar situadas en los orificios más alejados del pivote de la balanza (a la misma distancia). Dejar los 2 N en el porta peso de la izquierda, y poner la carga necesaria en el de la derecha para que la balanza esté en equilibrio. Anotar las cargas y las distancias al pivote; en el caso de la cuerda se ha de medir la distancia perpendicular entre la cuerda y el pivote.

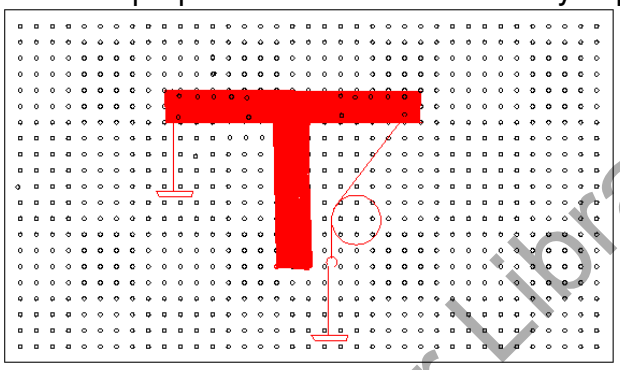


Fig.2. Montaje con variación del ángulo de la fuerza.

Luego se ha de cambiar de posición la polea y enganchar la carga de la palanca vertical según la Fig.3. Se deben anotar los pesos y las distancias. En ambos casos se calculará la suma de momentos respecto al pivote de la balanza.

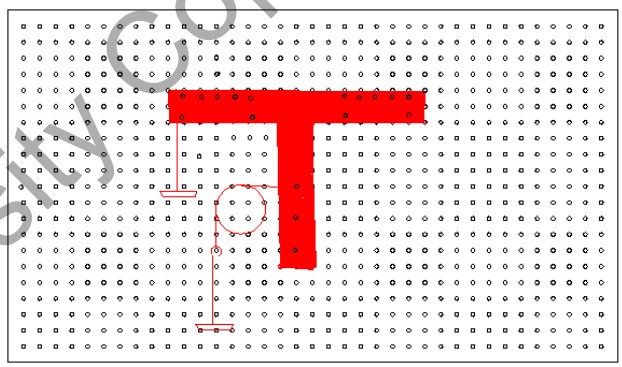


Fig.3. Montaje con fuerza aplicada a la palanca vertical.

PREGUNTA:

1- ¿Por qué se introduce el efecto péndulo en la balanza?

2.- Describa los posibles sistemas de pesaje mediante una balanza.

Ensayo 3.

Situar un tornillo ajustable en el panel y colocar el dinamómetro (lo más verticalmente posible) en un orificio central del brazo derecho de la balanza.

University Copy For Library Use

Colocar un peso de 3 N en un agujero que esté situado antes del punto en que está el dinamómetro. Anotar la lectura del dinamómetro. Colocar el mismo peso en un agujero que esté después del punto en que está el dinamómetro y anotar la nueva lectura. Comprobar mediante cálculo las mediciones obtenidas y explicar los resultados de dichas mediciones

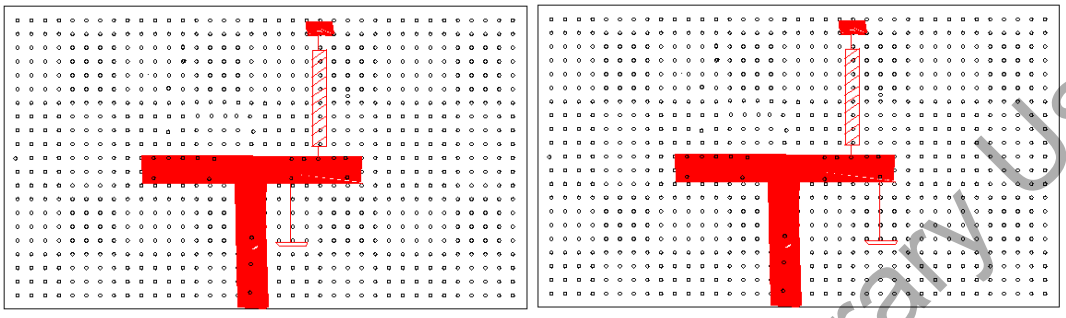


Fig.4. Comprobación de la ventaja mecánica.

3.2.- Vigas isostáticas.

Ensayo 4.

Situar simétricamente 2 dinamómetros en los extremos de la viga y colgarlos de dos tornillos ajustables unidos panel de manera tal que la viga este horizontal y anotar la lectura de los dinamómetros. El peso de la viga se repartirá a partes iguales entre los apoyos y se ha de tener en cuenta en las mediciones concentrando la masa de la viga en su centro

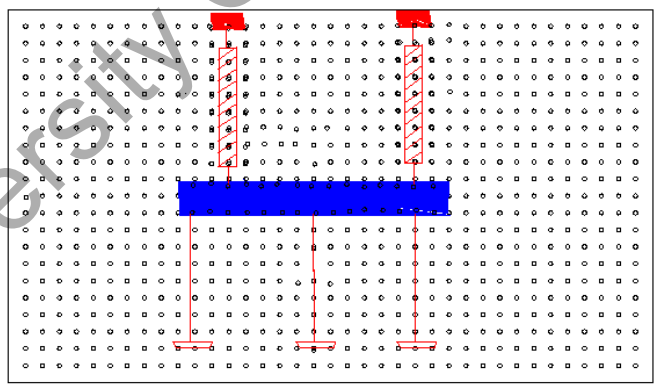


Fig.5. Montaje de la viga.

Se situarán las cargas como se indica en la Fig.6. En cada caso se han de anotar los pesos (considerado el de los porta pesos) y las mediciones de los dinamómetros. Después de cada experimento se ha de volver a nivelar la viga. Obsérvese que en algunos ensayos se han de cambiar de posición los dinamómetros.

University Copy For Library Use

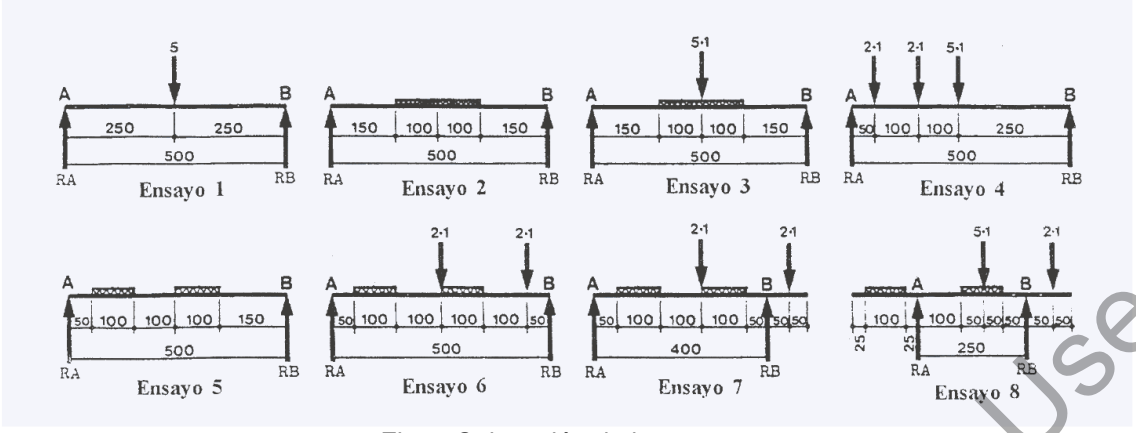


Fig.6. Colocación de las cargas.

Calcula las reacciones en los apoyos para vigas isostáticas como las mostradas en la Fig.6. y comparar los resultados de la medición con los calculados. Recuérdese que las cargas distribuidas deben concentrarse a fin de poder hacer los cálculos.

4.- Informe.

Se redactará un informe, tan breve como sea posible, en el que se reflejen los cálculos, dibujos, tablas y respuestas a las preguntas.

University Copy For Library Use

2º Ingeniería Industrial 1º cuatrimestre

Práctica nº 3. Análisis de Estructuras. Fuerzas internas

1. Objetivo:

Al finalizar los estudiantes deben ser capaces de:

- Reconocer los diferentes tipos de ligaduras que mantienen unidas las diferentes partes de un mecanismo o máquina.
- Representar esquemáticamente dichas ligaduras.
- Dibujar los diagramas de sólido libre.
- Aplicar ecuaciones del equilibrio estático.
- Determinar el comportamiento de las fuerzas internas

2. Materiales:

- Maqueta del chasis de SEAT
- Grúa
- Carrocería de SEAT Ibiza.
- Cinta métrica.

3. Secuencia de la práctica.

Experimento nº 1. Reconocer tipos de ligaduras.

Según la 3º ley de Newton, cuando dos cuerpos están en contacto entre ellos aparecen dos fuerzas de igual módulo, dirección y sentidos opuestos. Por lo que entre los elementos de cualquier mecanismo o máquina aparecerán estas fuerzas, y dependiendo del tipo de unión a que estén sometidos los elementos, estas fuerzas serán de dirección conocida o desconocida. Según las características de la aplicación de las fuerzas de conexión de los elementos, pueden generar también momentos, o sea las uniones entre dos elementos en el caso bidimensional pueden permitir uno, dos o tres grados de libertad.
Para el estudio bidimensional de un sólido, las reacciones que aparecen en una unión pueden dividirse en tres grupos correspondientes a tres tipos de soporte o uniones.

University Copy For Library Use

1º grupo.- Reacciones equivalentes a una **fuerza de dirección conocida.**

Son aquellos soportes o uniones que impiden el movimiento en una dirección, por ejemplo**, apoyos móviles o de rodillos, balancines, superficies lisas, bielas o eslabones, cables cortos, correderas sobre guías lisas y pasadores en ranuras lisas.** Todos estos soportes impiden el movimiento en una sola dirección. En el Diagrama de Sólido Libre (DSL) se representan por una fuerza incógnita perpendicular a la superficie de apoyo o en dirección al cable o biela y se denomina unión móvil.

2º grupo.- Reacciones equivalentes a una **fuerza de dirección desconocida.**

Son aquellos soportes o uniones que impiden el movimiento de traslación en dos direcciones, por ejemplo, **articulaciones o rotulas, bisagras, superficies rugosas y pasadores en taladros ajustados lisos.** Pueden impedir la traslación del solidó en cualquier dirección, pero no impiden que rote. En el DSL se representan por dos incógnitas (en el plano), componentes de las fuerzas y se denomina unión fija.

3º grupo.- Reacciones equivalentes a una **fuerza y un par.**

Son aquellos soportes o uniones que impiden el movimiento en cualquier dirección, lo inmovilizan completamente, por ejemplo, los **empotramientos.** Las reacciones de este grupo introducen tres incógnitas que consisten normalmente en dos componentes de la fuerza (en el plano) y un momento, se denomina unión empotrada o empotramiento**.**

Como se puede apreciar las uniones entre los sólidos pueden pertenecer a uno u otro grupo según el fin que persigan, de ahí que los sólidos:

- Pueden estar **completamente ligados** (no pueden moverse bajo la acción de las cargas aplicadas), es decir el numero de reacciones incógnitas y de ecuaciones de equilibrio son iguales. Cuando se da esta situación se dice que las reacciones son estáticamente determinadas
- Pueden estar **parcialmente ligados** es decir tienen ligaduras en las que la cantidad de reacciones es menor que el número de ecuaciones, por lo que en realidad no impiden el movimiento en alguna dirección, en estos casos los sólidos no están completamente ligados o las reacciones en algún eje no son cero.
- También puede haber sólidos con mas ligaduras que las necesarias, de forma tal, que produzcan mas reacciones de ligaduras que ecuaciones de equilibrio, para evitar el movimiento bajo todo tipo de carga, con lo que existen incógnitas que no se pueden resolver con los conocimientos de la estática, en estos caso se dice que las reacciones son **estáticamente indeterminada** o el sólido **hiperestático**.

University Copy For Library Use

Procedimiento:

La práctica se realiza en el laboratorio SEAT, utilizando un chasis y una grúa de izaje.

El chasis de un automóvil es una estructura que transmite todo el peso del automóvil a las ruedas, además en el chasis se encuentran el motor, la transmisión, los mecanismos de suspensión, de dirección y de freno, la carrocería va montada sobre el chasis y soporta los asientos y da forma al vehículo.

La grúa es una estructura que sirve para elevar cargas y dependiendo de la longitud de su brazo así será su capacidad de izaje.

Procedimiento:

Aspectos a estudiar en el laboratorio.

- **Hacer un análisis de los diferentes mecanismos que conforman el chasis, así como su unión.**

- **Reconocer los diferentes tipos de uniones y analizar los movimientos y restricciones que permiten cada una. Mencionar tres uniones móviles (con dos o más grados de libertad), cinco uniones fijas (con un grado de libertad) y cinco empotramientos, como mínimo.**

Experimento nº 2.- Diagrama de sólido libre. Calculo de reacciones.

Para realizar el estudio del equilibrio estático de un solidó rígido, siempre es necesario hacer un esquema del mismo que permita, de una forma aislada, analizar su comportamiento teniendo siempre en cuenta las fuerzas exteriores que actúan y las debidas a los apoyos o ligaduras. Esto es lo que se conoce como diagrama de sólido libre (DSL).

Para dibujar el diagrama de sólido libre se deben seguir los siguientes pasos.

1.- Se debe tener una visión clara del sólido a estudiar, separándolo de los demás sólidos y haciendo un croquis del mismo.

2.- Se dibujan las fuerzas externas conocidas con su módulo dirección y sentido.

3.- Se dibujan las reacciones provocadas por las diferentes ligaduras o uniones.

4.- se incluyen las dimensiones tanto lineales como angulares.

Procedimiento:

Se trabajara con la grúa donde:

University Copy For Library Use

- **Se realizaran las mediciones necesarias, para dibujar el diagrama de sólido libre. Elevando una carga de 2000N.**

- **Se comprobara si es estáticamente determinada o indeterminada justificándolo.**

- **Considerando la grúa empotrada en el suelo; calcular las reacciones que provocaría en el suelo al elevar dicha carga y las fuerzas en las diferentes barras**

Preguntas:

1.- En un sólido rígido en equilibrio, las fuerzas que actúan, ¿forman un sistema nulo? ¿Por qué?
2.- ¿El peso del cuerpo se contempla al dibujar el D.S.L.?

3.- ¿Cuál podría ser el sistema de ecuaciones planteado para resolver el equilibrio de un sólido en dos dimensiones?
4.- Al dibujar el D.S.L, podemos decir que el sólido es estáticamente indeterminado, si:
a) Las reacciones provocan menos de tres incógnitas.
b) Las reacciones provocan más de tres incógnitas.
c) Las reacciones provocan tres incógnitas.
d) Las reacciones concurren en un punto o son paralelas.
5.- ¿Cómo plantearía las ecuaciones de equilibrio para un sólido en tres dimensiones?
6.- ¿Que es un par de fuerzas? Como calculamos el momento que provoca.
7.- ¿Cómo determinaría la fuerza única equivalente en un sistema de fuerza arbitrario?

Experimento nº 3.- Fuerzas internas

Las fuerzas internas son aquellas que aparecen en el interior de un cuerpo como reacción a las fuerzas externas que actúan sobre el mismo y permiten mantener su equilibrio

Dependiendo de la acción de las fuerzas externas que actúen, las fuerzas internas pueden ser:
Fuerzas axiales, dirigidas en el eje axial del cuerpo Fig. 1, representa la tendencia del cuerpo a estirarse o contraerse

University Copy For Library Use

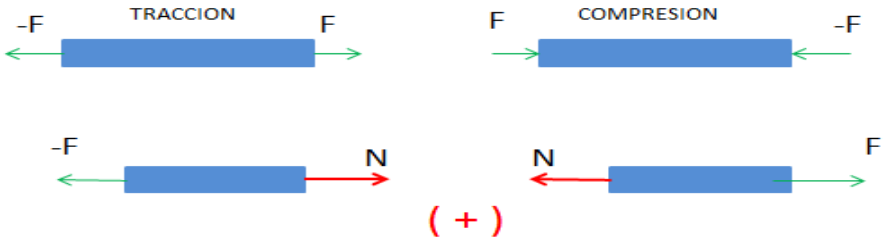


Fig. 1.- Fuerzas axiales en compresión o tracción

Fuerzas cortantes, dirigidas en el eje transversal al cuerpo Fig.2, representa el desplazamiento transversal de una sección del cuerpo respecto a la otra

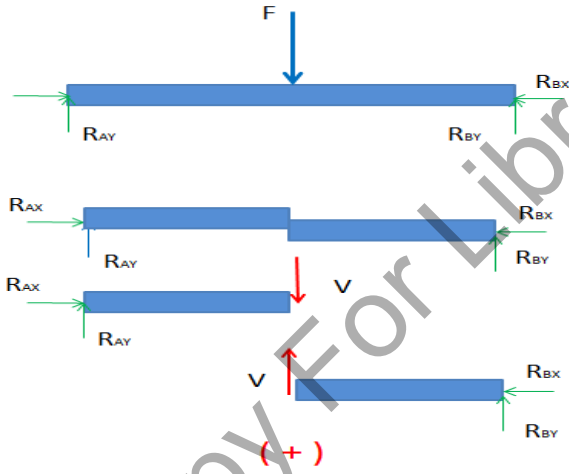


Fig. 2.- Fuerzas cortantes en flexión

Momentos Flectores, origina flexión del cuerpo lo que hace que unas fibras sean traccionadas y otras sean comprimidas, Fig.3

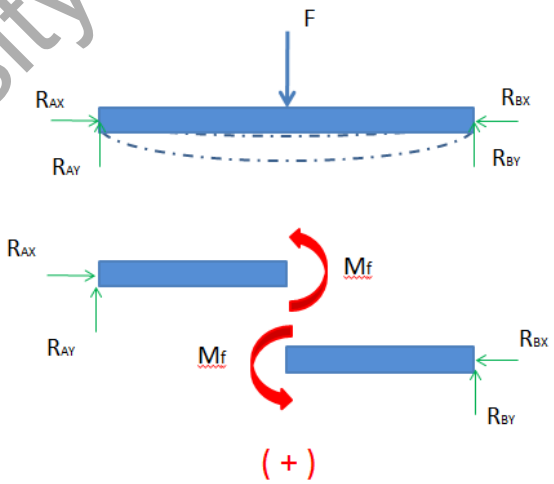


Fig. 3.- Momentos flectores. Convenio de signos

University Copy For Library Use

Momentos Torsores, provoca la torsión del cuerpo lo que hace que unas fibras trabajen a tracción y otras a compresión con respecto a una línea a 45º del eje longitudinal, Fig.4

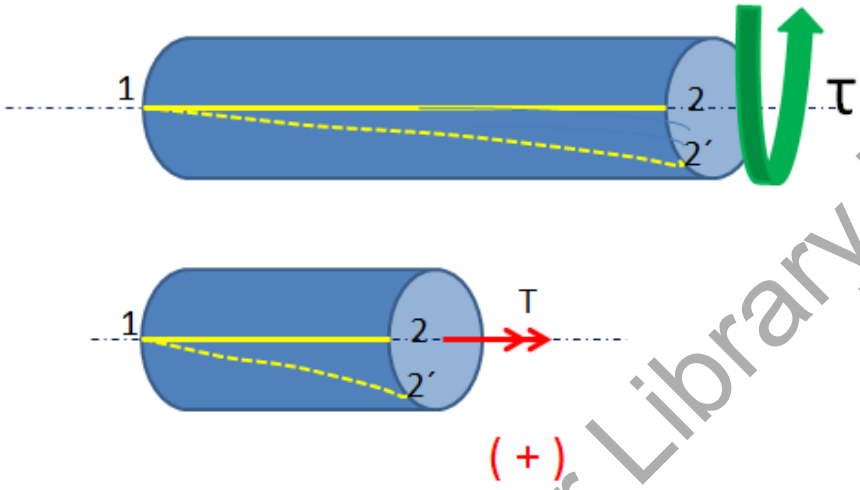


Fig. 4.- Momento torsor

Procedimiento:

Teniendo los cálculos anteriores:

Se realizará el diagrama de fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos flectores para la viga superior horizontal. (Refiera en cada caso la escala utilizada)

4.- Informe.

Se redactará un informe, tan breve como sea posible, en el que se reflejen los cálculos, dibujos, tablas y respuestas a las preguntas.

University Copy For Library Use

2º Ingeniería Industrial. 1º cuatrimestre.

Práctica nº 4. Propiedades físicas de los sólidos, CG y Momentos de inercia

1.- Objetivo.

Al finalizar el laboratorio los estudiantes deben ser capaces de:

- Calcular la posición del centro de gravedad de áreas y volúmenes
- Estudiar el desequilibrado estático de un disco y equilibrarlo
- Determinar el momento de inercia de algunos solidos (cilindro hueco, cilindro y esfera)

2.- Instrumentos y aparatos.

Se utilizarán los siguientes instrumentos y aparatos:

1. Panel de montaje universal.
2. Plomada.
3. Tornillo pivote.
4. Conjunto de sólidos.
5. Equilibradora y disco.
6. Equipo de rotación

3.- Secuencia de la práctica.

Ensayo 1.- Determinación experimental de la posición del centro de gravedad de sólidos simples y compuestos.

Situar en la zona más alta del panel de montaje el tornillo pivote. Colgar la plomada y estabilizar sus oscilaciones. A continuación se ha de colgar la placa circular por cualquiera de los orificios de la periferia. Observar por cual de los 2 orificios próximos al centro se puede ver el hilo de la plomada. Repetir la operación para otros 2 orificios cualesquiera de la periferia. Medir la posición del orificio (que más veces coincida con el hilo de la plomada) con respecto a un origen considerado por Uds.

University Copy For Library Use

Repetir el procedimiento para el triángulo, el rectángulo, la placa en forma de T, el romboide, y la placa de perfil irregular. En todos los casos usar por lo menos 3 orificios alejados del centro (desde los que se puede colgar el sólido) y 2 cercanos al centro geométrico (uno de los cuales coincide la mayoría de las veces con el hilo de la plomada).
Luego se suspenderá cada placa por cada uno de los orificios centrales y se comprobará que en uno de ellos la placa es más estable que en el otro. Verificar si dicho orificio es el mismo que más veces coincide con el hilo de la plomada.
PREGUNTA: ¿El orificio coincidente más veces con el hilo de la plomada pudiera ser el centro de gravedad? ¿Por qué?

Con ayuda de las tablas anexas se ha de calcular el centro geométrico de cada placa, excepto la que tiene una forma irregular. Para las placas compuestas se reflejaran los datos en una tabla similar a la siguiente:

i	x_i	y_i	A_i	x_iA_i	y_iA_i
Σ					

Pregunta:

1.- Comprobar teóricamente si las coordenadas de los centroides de las áreas de las placas coinciden con las coordenadas del orificio que parece ser el centro de gravedad.

2.- Comprobar si dicho orificio coincide con los ejes de simetría de la superficie. Téngase en cuenta que los ejes de simetría del círculo son dos diámetros perpendiculares; en un triángulo son sus medianas; en un romboide son las líneas que unen sus vértices, y en un rectángulo son las perpendiculares a sus caras, o sus diagonales.
3.- ¿Se puede decir que en todas las placas coinciden el centro geométrico y el centro de gravedad? ¿Por qué?

Ensayo 2.- Equilibrado de un rotor de poca anchura (pieza tipo disco).

En la equilibradora se verificará si el disco está equilibrado. Para ello se hará girar y se dejará que se detenga libremente. Se repetirá varias veces este proceso, y cada vez que el disco se detenga se observará cual es la zona que queda más baja del disco.
Se hará un dibujo simplificado del disco en el que se localice la situación del centro de masa y la geometría del mismo.
Si el disco se detiene en una posición preferente, se añadirá peso en otra zona del disco hasta que esté equilibrado. En el dibujo simplificado se tendrá en cuenta la carga que se ha añadido. Se calculará el momento aproximado de la

University Copy For Library Use

carga faltante y la carga añadida respecto del centro de giro del disco. Se comprobará teóricamente el equilibrio. Téngase en cuenta que la densidad del aluminio es 2700 kg /m^3

PREGUNTAS:

2.- ¿Qué relación existe entre la posición del centro de gravedad de un disco y su equilibrado estático?

Ensayo 3.- Determinación del momento de inercia de diferentes cuerpos

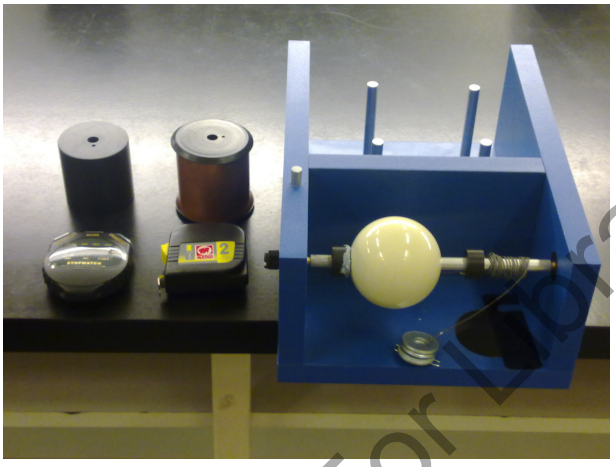


Fig.1 Equipo rotación

Para la realización del ensayo se utiliza un soporte de madera (Fig. 1), un eje con diferentes cuerpos que actúan como rotores. La rotación del eje se consigue enrollando un hilo alrededor del eje y en su extremo se cuelga un peso. Al dejar caer el peso, el eje rota, el hilo se desenrolla una longitud l y como resultado de la caída libre el eje adquiere una aceleración angular que permite calcular el momento de inercia

$$l = \frac{1}{2} a * t^2$$

$$\sum M = I * \alpha$$

Con tal de hacer una medida muy cuidadosa del tiempo de caída, se recomienda fijar el punto blanco del hilo siempre en la misma altura con referencia al soporte y medir el tiempo desde que se suelta el peso hasta que llega a la posición inferior, en el instante en que comienza a ascender el peso. Realizar 10 mediciones del tiempo para ganar en exactitud.

4.- Comparar los resultados experimentales de los valores del momento de inercia para cada cuerpo con el calculado teóricamente

University Copy For Library Use

4.- Informe

Se redactará un informe, tan breve como sea posible, en el que se reflejen los cálculos, dibujos, tablas y respuestas a las preguntas.

5.- Anexo

Tabla B.1 SITUACIÓN DE LOS CENTROIDES DE ALGUNAS LÍNEAS Y SUPERFICIES

Arco circular $L = 2r\alpha$ $\bar{x} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$ $\bar{y} = 0$	Sector circular $A = r^2\alpha$ $\bar{x} = \frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$ $\bar{y} = 0$
Arco de cuadrante circular $L = \frac{\pi r}{2}$ $\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$ $\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	Cuadrante circular $A = \frac{\pi r^2}{4}$ $\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$
Semicircunferencia $L = \pi r$ $\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	Superficie semicircular $A = \frac{\pi r^2}{2}$ $\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$
Superficie rectangular $A = bh$ $\bar{x} = \frac{b}{2}$ $\bar{y} = \frac{h}{2}$	Cuadrante de elipse $A = \frac{\pi ab}{4}$ $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$
Superficie triangular $A = \frac{bh}{2}$ $\bar{x} = \frac{2b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	Encabezadura parabólica $A = \frac{bh}{3}$ $\bar{x} = \frac{3b}{4}$ $\bar{y} = \frac{3h}{10}$
Superficie triangular $A = \frac{bh}{2}$ $\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	Cuadrante de parábola $A = \frac{2bh}{3}$ $\bar{x} = \frac{5b}{8}$ $\bar{y} = \frac{2h}{5}$

University Copy For Library Use

2º Ingeniería Industrial. 1º cuatrimestre.

Práctica nº 5. Análisis cinemático y dinámico de mecanismos. PAM

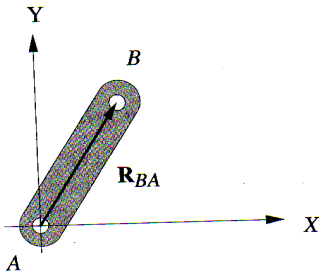
Introducción.

Una vez que se haya representado esquemáticamente un mecanismo, se debe proceder a analizarlo. Una meta fundamental del análisis cinemático es la determinación de las aceleraciones de todas las partes móviles del conjunto, ya que la segunda ley de Newton establece que una fuerza dinámica es proporcional a su aceleración. Para calcular los esfuerzos en los elementos es necesario conocer las fuerzas dinámicas y el ingeniero se debe asegurar de que el mecanismo o maquina propuesta no falle en condiciones reales de trabajo. De modo que los esfuerzos en los materiales deben mantenerse muy por debajo de los niveles admisibles. Para calcular los esfuerzos se necesita conocer las fuerzas estáticas y dinámicas en los elementos y con el fin de determinar tales fuerzas dinámicas es necesario conocer las aceleraciones.
Para calcular las aceleraciones se deben encontrar las posiciones de los diferentes puntos del mecanismo, luego determinar las velocidades y con estas, las aceleraciones.
Una vez determinadas las posiciones; las velocidades y aceleraciones podrán determinarse de forma gráfica o analítica, de forma gráfica considerando las características de cada vector en cada punto analizado y aplicando el método del polígono para determinar las incógnitas y por vía analítica derivando las ecuaciones de posición respecto al tiempo se determinan, las velocidades y derivando estas últimas se determinan, las aceleraciones.
Para determinar la posición de un elemento en su movimiento, lo primero que debemos es identificar el tipo de movimiento que realiza, los movimientos más significativos son:

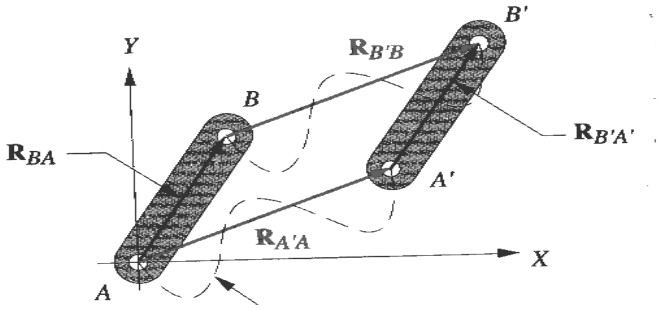
- movimiento de traslación.
- movimiento de rotación.
- movimiento compuesto o movimiento plano general.

Movimiento de traslación- Todas las partículas del sólido tienen el mismo desplazamiento.

University Copy For Library Use



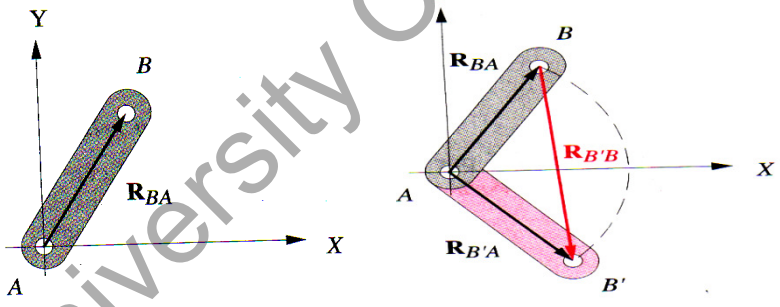
$$R_{A\acute{A}} = R_{B'B}$$



$$V_A = V_B$$

$$a_A = a_B$$

Movimiento de rotación alrededor de un eje- Las partículas del sólido se mueven en planos perpendiculares al eje y experimentan diferentes desplazamientos. Teniendo en cuenta que rotan alrededor de un eje los puntos pertenecientes al eje no rotan y los puntos situados a igual distancia radial tendrán igual valor modular de velocidades y aceleraciones



$$R_{A\acute{A}} = 0 \qquad V_A = 0 \qquad a_A = 0$$

$$R_{B'B} \neq 0 \qquad V_B = \omega R_{B\acute{A}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,t}$$

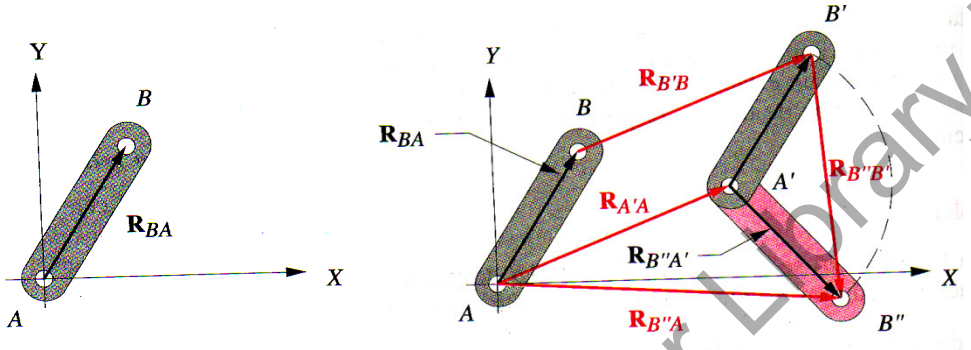
Movimiento compuesto o movimiento plano general. Las diferentes partículas del sólido tienen diferentes desplazamientos. Así cada punto se comporta como si su movimiento fuera el resultado de una traslación más una rotación.

University Copy For Library Use

$R_{A'A} = R_{B'B}$ -traslación $\quad V_B = V_A + V_{B/A} \quad a_B = a_A + a_{B/A}$

$R_{B''A} = R_{B'B} + R_{B''B'}$

MC = TRAS. + ROT.



Análisis del Mecanismo: El análisis se refiere al estudio del funcionamiento del mecanismo: cálculo de velocidades, aceleraciones, cargas actuantes,etc. El análisis de velocidades y aceleraciones se hará con el software de simulación PAM que se puede descargar gratuitamente en : http://www.em.upc.edu/docencia/estudis_grau/etseib/teoria_maquines/programa-d-analisi-de-mecanismes-pam-1/

Objetivos:

Los estudiantes al concluir el laboratorio deben:
- Conocer el funcionamiento del motor combustión interna.
- Conocer cómo utilizar el PAM
- Adquirir habilidades en la determinación de la posición, velocidades y aceleraciones para el mecanismo mostrado. Aplicando el PAM

Ensayo 1.
Con la ayuda del profesor analizar el funcionamiento del motor de combustión interna mostrado. (Maqueta del motor de 49 cm^3)

Ensayo 2.
- Determinar las dimensiones del mecanismo biela-manivela-Pistón en la maqueta
- Representar esquemáticamente el mecanismo con el PAM, mostrar las diferentes trayectorias de desplazamiento de cada elemento para un desplazamiento angular de la manivela de 360º

University Copy For Library Use

- Calcular para una velocidad angular constante de 50 rad / s en el sentido de las agujas del reloj y graficar:

a) Posiciones del pistón vs el ángulo de la manivela.
b) Variación de la velocidad del pistón vs el ángulo de la manivela.
c) Variación de la aceleración del pistón vs ángulo de la manivela.

- Comparar los gráficos obtenidos con los valores teóricos calculados para la posición de 45º a partir de la horizontal y en sentido antihorario

4.- Informe

Se redactará un informe, tan breve como sea posible, en el que se reflejen los cálculos, dibujos, tablas y respuestas a las preguntas.

University Copy For Library Use

2º Ingeniería Industrial. 1º cuatrimestre.

Práctica nº 6. Mecanismos de elevación de carga. Energía cinética y potencial.

1- Objetivos:

La finalidad de esta práctica es:

- Analizar la fuerza ejercida por una cuerda en un sistema de poleas móvil o fija
- Determinar el trabajo mecánico de una sencilla combinación de poleas "fijas" y "móviles".
- Determinación de la ley de la máquina para una rueda y un eje simple .Así como su eficacia.
.- Comprobar prácticamente conceptos de trabajo y energía. Principio de conservacion de la energía.

2.- Materiales:

-4 Tuercas.
-2 Ganchos ajustables.
-2 Poleas.
-1 Bloque de una polea.
-2 Ganchos de pesos.
-1 Dinamómetro de 10N.
-1 Un conjunto de pesos.
-1 Cuerda de longitud aproximada 600mm.
-1 Unidad de rueda y eje.
-1 Gancho de peso ligero.
-2 Tornillos.
- Conjunto de volante
- Conjunto para medir la energía potencial de un muelle.

3 Procedimiento.

3.1.- Mecanismos elevación de carga.

Introducción.

Una polea es, en esencia, una rueda que guía cuerdas o cintas en direcciones determinadas de modo que una fuerza trasmitida en una dirección, sea la conveniente. Las poleas pueden ser fijas, cuando van fijadas al eje mediante un pasador o una chaveta, o móviles, si giran libremente sobre el eje .Las poleas móviles se soportan por la cuerda que pasan por debajo de ellas

University Copy For Library Use

formando un bastidor. En estos casos, el bloque de la polea se mueve cuando lo hace la cuerda. Como el eje de las poleas es pequeño comparado con el diámetro de la rueda, la polea gira con facilidad .De esta forma se pierde poca energía en el giro y la fuerza trasmitida por la cuerda es prácticamente la misma a ambos lados de la polea. Sin embargo, para elevar cargas, puede reducirse el esfuerzo a realizar utilizando una combinación de poleas fijas y móviles, lo que se conoce como polipasto.

Ensayo 1.- Poleas simples

Pasos a seguir:

Montar el panel como se muestra en la Fig. 1, situar los ganchos ajustables y fijarlos con tuercas. Colocar una polea y fijarla, colgar el dinamómetro en el gancho ajustable de la derecha. Situar los extremos de la cuerda en forma de bucle en la anilla del dinamómetro y utilizar la cuerda doble. Poner el dinamómetro en cero y realizar los ensayos.

Ensayo 1.
Colocar el material como se indica en la Fig. 1. Añadir peso de 2N al gancho de peso (considerando el peso del gancho) y anotar el peso que indica el dinamómetro, repetir el proceso para pesos totales de 3, 4 y 5 N.
Comprobar ¿Qué le ocurre a la fuerza de lectura del dinamómetro?

Ensayo 2.
Colocar el material como se indica en la Fig. 2. Esta vez utilizará la cuerda sin doblar. Repetir el proceso del ensayo 1. Debido a la fricción en las dos poleas el material de medición será poco sensible.
La fricción aparece siempre en los sistemas de poleas y es directamente proporcional al número de poleas y al peso o carga.

Ensayo 3.
Pesar el bloque de una sola polea y anotar su peso .Situar el material como lo muestra la Fig.3 .Con el bloque de poleas sostenido por la cuerda .Repetir el ensayo 1, anotando el peso que indica el dinamómetro debido a las cargas de 2, 3, 4 y 5 N aplicadas al bloque de poleas.
Comprobar que le pasa al peso que indica el dinamómetro ¿Por qué?

Ensayo 4.
Colocar el material como muestra la Fig.4, y aplicando cargas como en el ensayo 3, encontrar el peso P en cada caso para elevar la carga W, siendo la carga total W el peso del gancho más el peso el bloque de poleas. Comparar la lectura del dinamómetro con la fuerza P.
La ventaja ganada por el uso de un bloque de poleas móviles se puede expresar por la relación W/P, que se llama trabajo mecánico W.M.
Por lo tanto:
Trabajo mecánico W.M = W/P.

University Copy For Library Use

Comparar los resultados en la tabla siguiente y calcular el trabajo mecánico.

W(N)	P(N)	W.M = W/P

Preguntas:
1-¿Cuáles son los efectos sobre la fuerza en una cuerda al pasarla por la polea?
2-Un modo mas habitual de montar una polea móvil se muestra en la Fig.5 ¿Proporciona el mismo trabajo mecánico que el método usado en el ensayo 4?

Ensayo 2. Ruedas y ejes simples.

Introducción.

La rueda y eje simple es un mecanismo utilizado para elevar o arrastrar un peso a una distancia considerable. Consiste en una rueda fijada a un eje o tambor de radio más pequeño, que soporta una carga mediante una cuerda o cable que da vuelta alrededor del tambor cuando gira la rueda.
Básicamente la rueda y el eje simple consiste en una palanca; donde el esfuerzo P actúa al final de un brazo de palanca igual al radio A de la rueda y levanta la carga W, actuando en el extremo de un brazo corto de palanca igual al radio B del tambor. Si no tenemos en cuenta la fricción, el trabajo mecánico de la rueda y el tambor de la rueda es igual a la relación de velocidad que, para un giro, es:

$$\frac{2\pi A}{2\pi \mathrm{B}} = \frac{A}{B}\ \frac{A}{B}$$

Al igual que en una palanca.
El trabajo mecánico W.M = RV (*relación de velocidad*), pero el trabajo real se reduce debido a la fricción que aumenta con la carga ,cuando W varia y P varia de modo proporcional por lo que la relación W y P queda :

P = a W + b ***---ley de la máquina---.***
Donde:

a- coeficiente que indica como varia P con relación a W.
b- esfuerzo necesario para poner en marcha la máquina sin carga.
Siendo a y b constantes para cada máquina.

W.M = W/P, pero como P = a W + b.

Tenemos:

University Copy For Library Use

$$W.M = \frac{W}{aW + b} = \frac{1}{a + \frac{b}{W}}$$

W.M - variará con la carga pero no linealmente.

Para hallar la ley de las máquinas, extender el grafico hasta que corte a P en L, entonces OL medido en escala de P será el valor de b, es decir el esfuerzo sin carga.
El valor de a se obtiene por la tangente donde LM se mide en escala de W y NM se mide en escala de P.

Pasos a seguir.

Montar la unidad de eje y rueda en la parte superior del panel y fijar con tuercas. El tambor tiene dos secciones de diámetro diferentes, el diámetro de la rueda es 60 mm y las dos partes del tambor son 20 mm y 15 mm.
Calcular las variaciones del trabajo mecánico W.M y la eficiencia según las siguientes ecuaciones:

$$W.M = -\frac{W}{P} \quad ; \quad E = \frac{W.M}{R.V} \quad ; \quad R.V = \frac{A}{B}$$

Ensayo 1.
Tensar la cuerda del tambor de diámetro mayor y girar la polea de modo que la cuerda se enrolle uniformemente a lo largo de la parte más grande del tambor, dejando unos 300 mm colgando de este.
Manteniendo la polea fija, enrollar su cuerda en dirección opuesta a la cuerda del tambor, dejando el extremo colgando.
Ahora el material de ensayo esta dispuesto como una rueda y un eje simple de radio de rueda A de 30 mm y de radio de eje B =10 mm, dando la relación de velocidad 3.
Con la polea fija enganchar un gancho a la cuerda del tambor y colocar un peso W de 1,5N, fijar el gancho de peso ligero en la cuerda de la rueda y añadir peso hasta elevar a W.
Con un W.M teórico de 3, el esfuerzo no podrá ser menor que la tercera parte.
Repetir el proceso elevando la carga sucesivamente en 0.5 N.

W										
P										

Ensayo 2.
Repetir el ensayo 1 pero utilizando la parte del diámetro menor del tambor

Determinar para cada ensayo:
- La ley de las máquinas.

University Copy For Library Use

- El trabajo mecánico y su eficiencia.

Preguntas:

3.- ¿Qué indica la ley de las máquinas sobre la variación del esfuerzo con carga en la rueda y eje simple? Usando esta ley calcular el esfuerzo necesario para elevar una carga de 10 N.

W										
P										

3.2 Principio conservación de la energía

Ensayo 1.

En el siguiente experimento se demostrará el principio general de la energía y el trabajo y como el balance energético de un sistema mecánico evidencia la transformación de una parte de la energía potencial gravitatoria en cinética y otra parte en pérdidas por rozamiento. Para ello se hará lo siguiente:

- Se montará el conjunto del volante en la parte superior del panel (lo más arriba posible).
- Se situará una regla graduada en el panel lo más alineada posible con la cuerda que cuelga por uno de los lados del husillo del volante. El "0" de la regla quedará lo más cerca posible del extremo inferior del panel.
- Se colocará un gancho de peso en el extremo de la cuerda y se girará el volante de manera tal que la cuerda quede enrollada en el husillo hasta que el extremo inferior del gancho quede lo más cerca posible a los 250 mm medidos desde el extremo inferior del panel. Frenar el volante.
- Comenzar añadiendo una masa de 100 g al gancho de peso. Sujetar el volante y soltarlo para que gire arrastrado por el peso que cuelga de la cuerda. Estar atento para frenar con la mano el volante una vez que el peso termine de ascender de nuevo. Una vez frenado el volante leer la máxima altura a la que llegó el gancho (usando la misma referencia que la inicial).
- Repetir el proceso para 1.5, 2, 2.5 y 3 N. Anotar las lecturas en una tabla como la siguiente:

Peso (N)	Altura desc.	Altura asc.	Ep inicial	Ep final	Pérdidas
1.5					
2					
2.5					
3					

University Copy For Library Use

Dónde:

Ep inicial.- es la energía potencial antes de comenzar el descenso que se calcula, multiplicando el peso por la altura máxima a la que puede llegar el gancho antes de comenzar el ascenso.

Ep final.- es la energía potencial al terminar el ascenso que se calcula, multiplicando el peso por la altura máxima a la que ascendió el gancho.

Pérdidas.- Resta de la energía potencial final menos la inicial.

Pregunta:

1. ¿Por qué el peso no ha ascendido hasta la altura inicial?
2. ¿Describa el proceso de transformación de energía que ocurre en el experimento.

En la segunda parte se utilizará el mismo montaje y además se hará lo siguiente:

Ensayo 2.

- Añada una cuerda en el husillo que sobresale en la parte frontal del volante y cuelgue de ella un segundo gancho de peso. El panel se situará de tal manera que el gancho que cuelgue de esta última cuerda pueda cruzar el tablero de la mesa sin interferencias.

- Sitúe 4,5 N en el gancho de la cuerda que está más cercana al panel y enróllela en el husillo hasta que el extremo inferior del gancho esté a 250 mm por encima del extremo inferior del panel.

- Frene el volante y enrolle la cuerda del extremo exterior del husillo hasta que el segundo gancho esté a la altura del extremo inferior del panel. La cuerda se ha de enrollar en el segundo husillo en el mismo sentido que se enrolló en el primero.

- Libere el volante para que gire libremente. Anote la máxima altura a la que llega el gancho interior.

- Repita el proceso añadiendo pesos al gancho exterior hasta que el interior ascienda a la misma altura de partida. Anote los pesos y las alturas de cada repetición.

Pregunta:

3.- ¿Podría ascender el peso a una altura mayor que la altura inicial? ¿Qué aplicaciones puede tener el fenómeno físico observado?

University Copy For Library Use

Ensayo 3.

Se utilizará un conjunto masa-resorte para intentar medir la transformación de la energía potencial, “almacenada en el resorte”, en energía cinética del móvil.
Se situará una regla graduada que permita medir la deformación del muelle. Partiendo de la posición de equilibrio (muelle no estirado) se deformará el muelle 50 mm. Para ello se conectará el electroimán que engancha al móvil y se moverá a todo el conjunto mediante el volante y el tornillo. Se situarán detectores de paso para el movimiento del móvil. La distancia entre dichos detectores será fija e igual a 33 mm. Se ha de poner a “0” el cronómetro, pulsar el interruptor y anotar la lectura. Se repetirá 10 veces la medición para calcular la media aritmética. La masa del móvil es de 0.818 kg.
Repetir el proceso para 60, 70, 80 y 90 mm. Hacer una tabla, calcular los valores medios, la energía cinética y potencial en cada caso. La constante elástica del muelle es k= 470 N/m. Calcule las pérdidas de energía en el proceso.

4.- Informe.

Se redactará un informe, tan breve como sea posible, en el que se reflejen los cálculos, dibujos, tablas y respuestas a las preguntas.

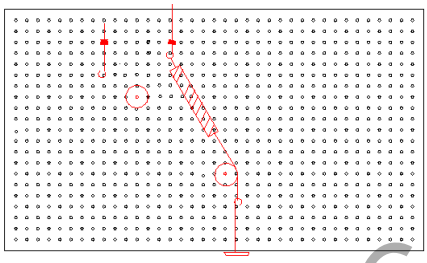


Fig.1

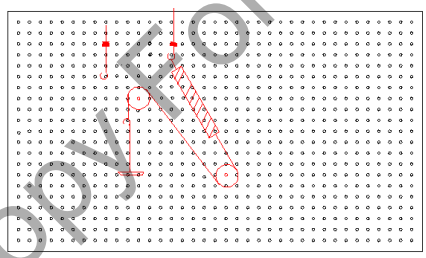


Fig.2

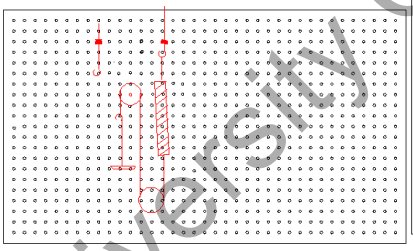


Fig.3

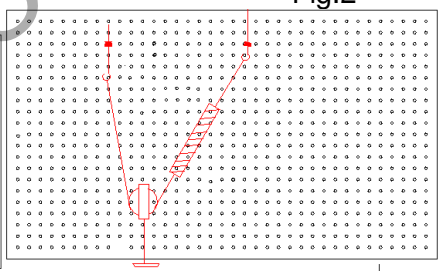


Fig.4

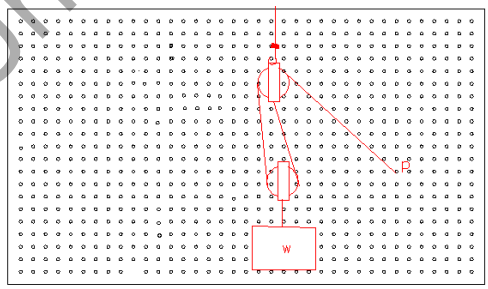


Fig.5

University Copy For Library Use

2º Ingeniería Industrial. **1º cuatrimestre.**

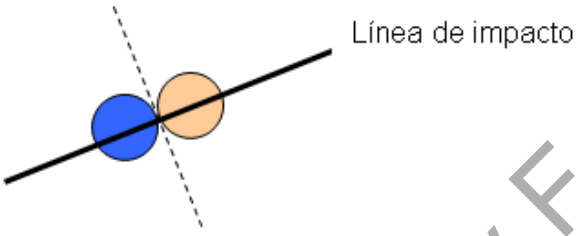
Práctica Nº 7. Impacto.

1.- Introducción.

Cuando dos cuerpos se ponen en contacto durante un periodo de tiempo pequeño y generando grandes fuerzas de contacto se dice que se produce un impacto o choque entre los cuerpos.

Durante el impacto se puede conservar la energía o no, dependiendo de las velocidades con que contactan los cuerpos, de las fuerzas que actúan y si los cuerpos se restituye o no.

La línea de impacto es la línea normal a la superficie común de contacto durante el impacto, por lo que las velocidades de los cuerpos que colisionan pueden estar dirigidas según la línea de impacto o no, además los cg de cada cuerpo puede estar o no sobre la línea de impacto, de ahí la siguiente clasificación de los impactos.

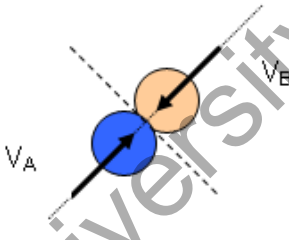


Choque central, cuando los cg de los cuerpos están sobre la línea de impacto

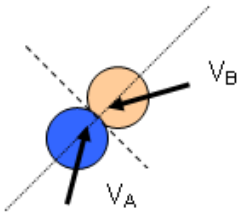
Choque excéntrico, cuando los cg no están sobre la línea de impacto.

Además los choques centrales pueden ser:

Choque central directo.- cuando la dirección de las velocidades de ambos cuerpos es la línea de impacto.

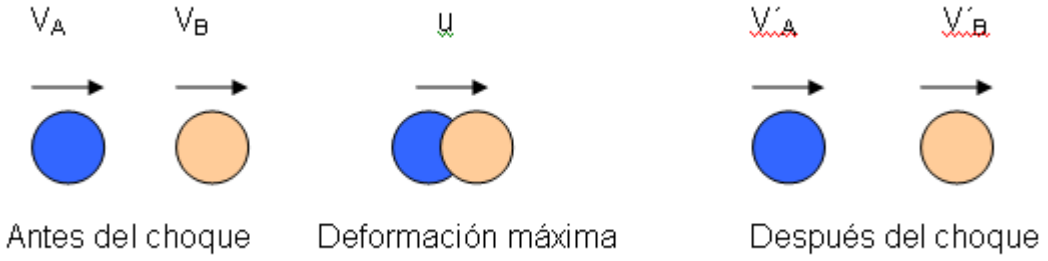


Choque central oblicuo.- Cuando las direcciones de las velocidades de los cuerpos no coinciden con la línea de impacto.



University Copy For Library Use

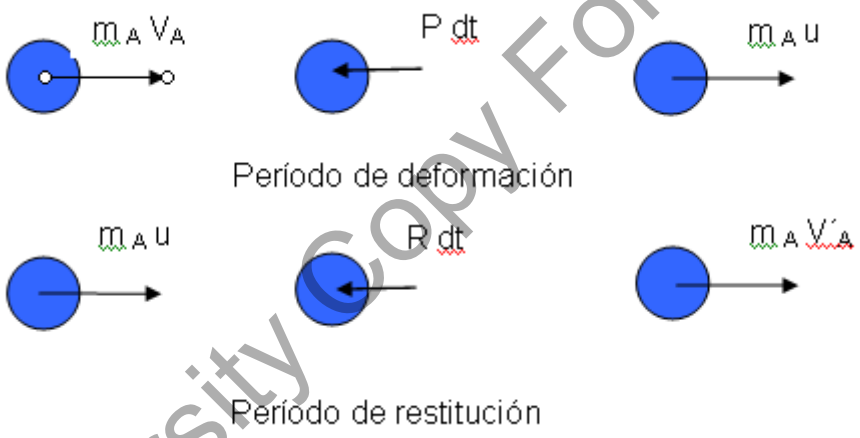
Proceso de choque,



Como solo actúan los dos esferas, las velocidades tienen la misma dirección por lo que se puede hacer la suma escalar y no hay fuerzas de impulso externa se conserva la cantidad de movimiento,

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

Teniendo en cuenta que solo actúan las fuerzas de deformación y de restitución se puede plantear que:



$$m_A v_A - \int P dt = m_A u$$

$$m_A u - \int R dt = m_A v'_A$$

La fuerza P que produce la deformación y la fuerza R que provoca la restitución en realidad son diferentes, por lo que el impulso provocado por P es mayor que el impulso provocado por R y la relación de estos impulsos se denomina coeficiente de restitución y se simboliza por e.

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt}$$

University Copy For Library Use

El coeficiente e toma valores entre 0 y 1, dependiendo de los materiales implicados en el choque, velocidad de choque y forma y tamaños de los cuerpos.
Para el caso analizado anteriormente queda:

$e_A = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$ $\qquad$ $e_B = \frac{v'_B - u}{u - v_B}$

Luego:

$v'_B - v'_A = e\,(v_A - v_B)$

Existen dos casos particulares:

e = 0, impacto perfectamente plástico o inelástico.

Las energías no se conservan y se producen deformaciones permanentes en los cuerpos, existe una disipación de energía ya que el trabajo de deformación de ambos cuerpos se obtiene a costa de la energía cinética de los mismos antes del choque

$v'_A = v'_B = v'$

$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)\, v'$

e = 1, impacto perfectamente elástico.

$v'_B - v'_A = v_A - v_B$ ----- Las velocidades relativas antes y después del choque son iguales

En el choque perfectamente elástico se conserva la cantidad de movimiento total y la energía total, además no hay intercambio de masa entre los cuerpos, que se separan después del choque.

$v'_B + v_B = v_A + v'_A$

$m_A(v_A + v'_A) = m_B\,(v'_B + v_B)$ ------- Se conserva la cantidad de movimiento

$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A v_A'^2 + \frac{1}{2}m_B v_B'^2$ ---- Se conserva la energía

University Copy For Library Use

2.- Objetivo.

- Hacer un estudio de choque central directo, permitiendo analizar dos casos el choque elástico e inelástico
- Determinar el comportamiento de las velocidades antes y después del choque, para cada caso.
- Determinar el coeficiente de restitución en cada caso.
- Analizar el comportamiento de las velocidades cuando se varían las masas de los cuerpos que colisionan

3.- Procedimiento

El laboratorio se realiza en el cojín de aire, para lograr disminuir los efectos del rozamiento
Pasos a seguir para condicionar el cojín de aire.

1.- Encienda el compresor y ajuste el nivel de aire (nivel 3 o 5), solo para eliminar la fuerza de rozamiento del sistema.
2.- Coloque el deslizador sobre el carril. (Nunca desplace el deslizador por el carril sin aire)

3.- Nivelar el carril junto con el deslizador. Si el deslizador se mueve, use las patas ajustables del carril para subir o bajar el sistema hasta que quede nivelado (no se desplace)

4.- Para este experimento se necesitan dos niveles de aire.
Nivel 1- Para el uso del deslizador sin peso añadido
Nivel 2 – Para el uso del deslizador con peso añadido

5.- El nivel del aire mantenerlo hasta que termine el experimento.

6.- Se realizaran los ensayos utilizando dos pares de cronocaptadores que situándolos a 33 mm entre ellos y midiendo el tiempo (t) en que recorre esta distancia se obtiene la velocidad media en cada punto donde se sitúen.

7.- Lanzar el experimento de acuerdo a cada experiencia.

8.- Los datos pueden ser exportados a sus ordenadores o el mismo programa permite hacer el informe.

Ensayo nº 1 Choque elástico.

Choque elástico con masas iguales ($m_1 = m_2$)

La energía es transferida por completo desde m_1 a m_2, que pasa del estado de reposo al estado que tenía la masa que la chocó.

University Copy For Library Use

Pasos a seguir:
1.- Situar el disparador en el extremo inicial del carril

2.- Colocar los pares de cronocaptadores según se indica en el siguiente esquema

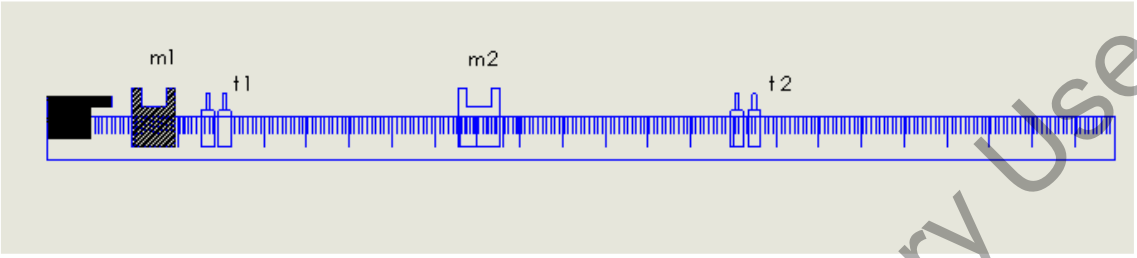


Figura 1.- Montaje experimento Nº 1

3.- Situar los deslizadores m1 en contacto con el disparador y m2 en el punto medio entre los pares de cronocaptadores 1 y 2

4.- Hacer varios disparos para comprobar el montaje

5.- Realizar 5 mediciones y rellenar la tabla.

Ensayos	t_1 (s)	t'_2 (s)	V_1 (m/s)	V_2 (m/s)	V_1' (m/s)	V_2' (m/s)
1						
2						
3						
4						
5						

7.- Determinar la cantidad de movimiento y la energía antes y después del choque

8.- Determinar teóricamente la cantidad de movimiento y la energía antes y después del choque

9.- Comparar ambos resultados y hacer sus propias conclusiones

Choque elástico con masas desiguales ($m_1 < M_2$)

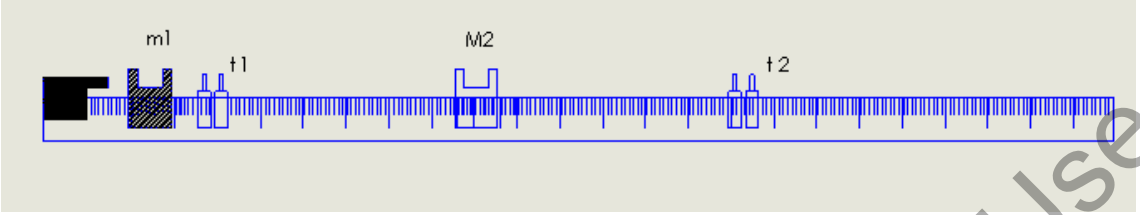
La energía es transferida de m1 a M2 y producto del choque m1 adquiere una cantidad de movimiento en sentido contrario al inicial, donde las velocidades relativas antes y después del choque son iguales

Pasos a seguir:

1.- Situar el disparador en el extremo inicial del carril

University Copy For Library Use

2.- Colocar los pares de cronocaptadores según se indica en el siguiente esquema



3.- Situar los deslizadores m1 en contacto con el disparador y M2 en el punto medio entre los pares de cronocaptadores 1 y 2

4.- Hacer varios disparos para comprobar el montaje

6.- Realizar 5 mediciones y rellenar la tabla.

Ensayos	t_1 (s)	t'_1 (s)	t'_2 (s)	V_1 (m/s)	V_2 (m/s)	V_1' (m/s)	V_2' (m/s)
1							
2							
3							
4							
5							

7.- Determinar la cantidad de movimiento y la energía antes y después del choque

8.- Determinar teóricamente la cantidad de movimiento y la energía antes y después del choque

9.- Comparar ambos resultados y hacer sus propias conclusiones

Choque elástico con masas desiguales ($M_1 > m_2$)

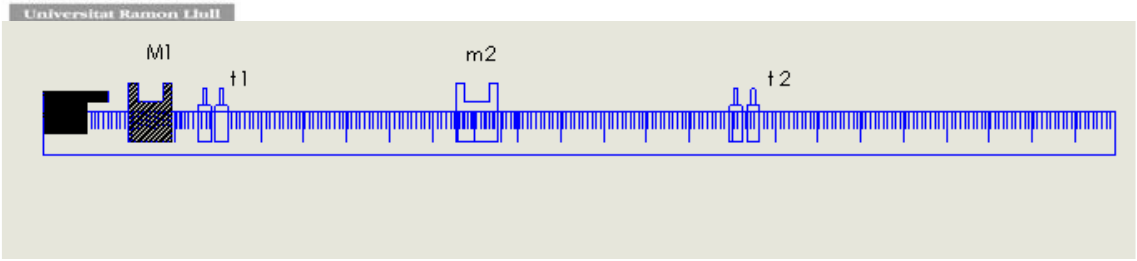
La energía es transferida de M_1 a m_2, de forma tal que las velocidades relativas antes y después del choque son iguales

Pasos a seguir:

1.- Situar el disparador en el extremo inicial del carril

2.- Colocar los pares de cronocaptadores según se indica en el siguiente esquema

University Copy For Library Use



3.- Situar los deslizadores M_1 en contacto con el disparador y m_2 en el punto medio entre los pares de cronocaptadores 1 y 2

4.- Hacer varios disparos para comprobar el montaje

5.- Realizar 5 mediciones y rellenar la tabla.

Ensayos	t_1 (s)	t'_1 (s)	t'_2 (s)	V_1 (m/s)	V_2 (m/s)	V_1' (m/s)	V_2' (m/s)
1							
2							
3							
4							
5							

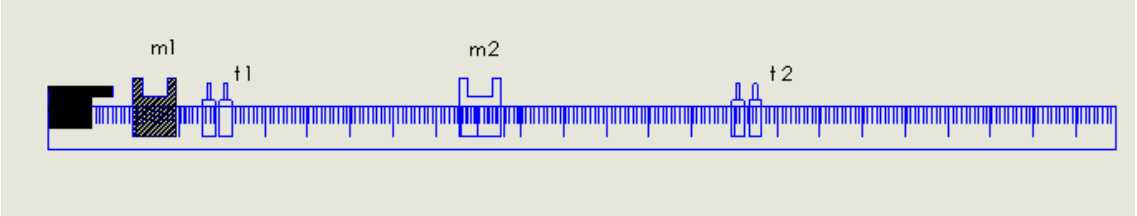
6.- Determinar teórico y experimental la cantidad de movimiento y la energía antes y después del choque
7.- Comparar ambos resultados y hacer sus propias conclusiones

Ensayo nº 2 Choque inelástico.

En este caso no hay periodo de restitución y ambos cuerpos permanecen unidos después del choque, conservando la cantidad de movimiento total del sistema, no así su energía total ya que parte de ella se emplea en la deformación de los cuerpos
Pasos a seguir:

1.- Situar el disparador en el extremo inicial del carril, 30 mm

2.- Colocar los pares de cronocaptadores según se indica en el siguiente esquema



University Copy For Library Use

3.- Situar los deslizadores m1 en contacto con el disparador y m2 en el punto medio entre los pares de cronocaptadores

4.- Hacer varios disparos para comprobar el montaje

5.- Realizar 5 mediciones y rellenar la tabla.

Ensayos	t_1 (s)	t'_2 (s)	V_1 (m/s)	V_2 (m/s)	V_{12}' (m/s)
1					
2					
3					
4					
5					

6.- Determinar teórico y experimental la cantidad de movimiento y la energía antes y después del choque

7.- Comparar ambos resultados y hacer sus propias conclusiones

4.- Preguntas:

1.- Una partícula de 5 kg. de masa moviéndose a 2 m/s choca contra otra partícula de 8 kg. de masa inicialmente en reposo. Si la primera partícula se desvió 50º de la dirección original del movimiento. Hallar la velocidad de cada partícula después del choque. Se supone que el choque es elástico

2.- Una partícula de masa 4 kg. y velocidad 2 m/s choca contra otra de 3 kg. que está en reposo. La primera se desvía –45º respecto de la dirección inicial y la segunda 30º.
a)- Calcular las velocidades de ambas partículas después del choque.
b)- ¿Es elástico?

5.- Informe

Se redactará un informe, tan breve como sea posible, en el que se reflejen los cálculos, gráficos, tablas y respuestas a las preguntas.

University Copy For Library Use

2º Ingeniería Industrial. **1º cuatrimestre.**

Práctica nº 8. Rozamiento. Leyes y aplicaciones

1.- Objetivo.

La finalidad de esta práctica es:
- Comprobar las leyes de fricción y medir el coeficiente de fricción en diferentes materiales.
- Demostrar la aplicación del rozamiento en diferentes máquinas.

2.- Material.

1 Conjunto plano para prácticas de rozamiento.
1 Bloque de fricción con cuerda.
1 Superficies de fricción.
1 Plomada.
1 Ganchos y conjunto de pesos.
1 Dinamómetro.
1 Bloque con ruedas.
1 Bloque sin rueda
1 Conjunto de gato mecánico.
1 Conjunto de frenos.
1 Conjunto de transmisión por fricción cónica.
1 Llave dinamométrica

3.- Desarrollo de la práctica.

3.1.- Leyes del rozamiento

Ensayo 1

Situar la cubierta de madera sobre la superficie de aluminio y el bloque de fricción cargado con 3 N. Inclinar el plano mediante el tornillo vertical hasta que el bloque comience a deslizar. Medir el ángulo en que comenzó el deslizamiento. Dejar el plano inclinado con el ángulo obtenido; pasar la cuerda por la polea central y colgar un gancho en el extremo de la cuerda. Colocar pesos en el gancho hasta que el bloque comience a ascender por el plano. Anotar dicho peso. Repetir el experimento para pesos de 2N y 1N.
Repetir el proceso con la cubierta de PVC.

University Copy For Library Use

3.2.- Aplicaciones del rozamiento

Introducción:

Las fuerzas de rozamiento son de magnitud limitada, es decir, no impedirán el movimiento cuando se apliquen fuerzas suficientemente grandes, por lo que estas siempre deben ser controladas en el rozamiento deacuerdo a la aplicación que se quiera dar de las mismas.
El rozamiento se considera normalmente un gasto, ya que en las máquinas absorbe energía y causa desgaste, pero también puede ser útil, por ejemplo en los frenos de fricción, cuñas, gatos mecánicos, transmisiones cónicas de fricción, embragues, etc.

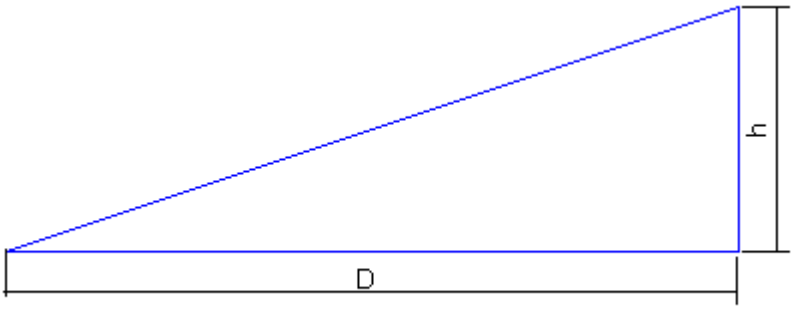
Ensayo 3.- La cuña como maquina simple

Colocar el conjunto para cuñas en el panel. Poner una polea a la derecha del conjunto de manera tal que la cuerda que tira de la cuña quede lo más horizontal posible. Poner la cuña de menor inclinación de manera tal que la cuerda cuelgue libremente por la polea. Colgar un peso de 1.5 N incluido el gancho y situarlo en el colgador del brazo que presiona la cuña. Colgar otro gancho del extremo de la cuerda que tira de la cuña.
Cargar el gancho hasta que la cuña se deslice hacia la derecha. Comprobar si la cuña retorna sola al origen; tomar nota de este hecho. Anotar el peso de ambos ganchos. Repetir para 2, 3, 4 y 5 N de peso presionando verticalmente la cuña. En cada una de las repeticiones se ha de levantar la cuerda del gancho que tira horizontalmente de la cuña para ver si la cuña se mueve por si misma bajo la acción del peso que la comprime.
Se hará una tabla con los pesos situados en ambas cuerdas y se calculará la ventaja mecánica según:
VM = Carga vertical /Carga horizontal
En el informe se dirá cual de las 2 cuñas es más ventajosa para manipular cargas y se justificará dicha elección.

Ensayo 4. Gato mecánico.

El gato mecánico es una máquina diseñada para elevar cargas y su funcionamiento se basa en el rozamiento, pues consta de un tornillo y una tuerca donde la tuerca se mantiene estacionaria mientras que el tornillo gira y eleva el peso, cuyo filete o hilo de rosca se comporta como un plano inclinado.
El mismo principio se usa en los tornillos de banco, prensas mecánicas, etc.
Teniendo en cuenta que hay que añadir el peso del gancho a los pesos anotados en cada carga, tendremos el esfuerzo P necesario para elevar la carga W.

University Copy For Library Use



Relación de velocidad (R.V)= Distancia movida por el esfuerzo/ Distancia movida por la carga.

R.V =D/h

Donde:
D.-recorrido de la carga= 2πr.
r.- radio medio del tornillo.
h.- avance del tornillo (paso de la rosca)

W.M= W/P…… Trabajo mecánico

E= W.M / R.V…….Eficiencia mecánica.

Medir el radio medio del tornillo y el paso de la rosca en el conjunto del gato. Colocar el conjunto del gato en el panel, sacar la cantidad de cuerda suficiente del tambor del gato, llevarlo por la parte delantera del tambor sobre la polea y colgar el gancho en el extremo. Colocar la varilla en la parte superior del gato. Colocar un peso de 3 N en la parte superior del tambor y añadir pesos al gancho para que gire el tornillo.
Anotar los pesos
Repetir el proceso con pesos de 4, 5 ,6 ,7 ,8 ,9 ,10N
Tabular los resultados como sigue:

W (N)	P (N)	W.M	E

University Copy For Library Use

Con el peso de 10 N, permitir que el gancho descienda hasta la parte inferior del panel. A continuación quitar el gancho de la cuerda y comprobar si se embala, o sea si la carga retrocede cuando se elimina el esfuerzo

1. ¿Cuál es su opinión sobre el gato mecánico como dispositivo de elevación de carga?

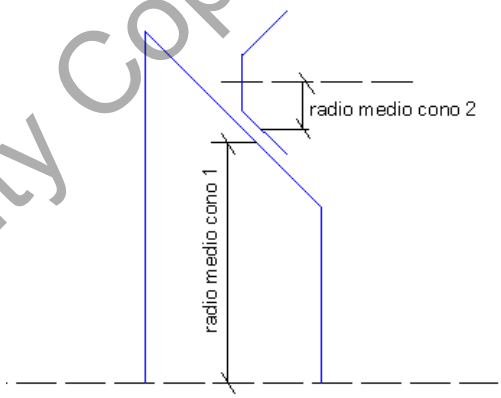
2. La **RV** es constante. ¿porque varían el **W.M** y la **E**?

3. ¿Cuáles son las ventajas del gato mecánico desde el punto de vista de la seguridad?

Ensayo 5. Transmisiones por fricción cónicas.

En ocasiones la fricción se emplea de forma beneficiosa como en el caso de los mecanismos de transmisión por fricción, por ejemplo los embragues que sirven para transmitir o no el movimiento empleando superficies cilíndricas, también los mecanismos de transmisión pueden ser cónicas, con la variante que además de transmitir o no el movimiento , con ellos es posible obtener diferentes relaciones de transmisión, como ocurre con una caja de cambio con la particularidad que en la transmisión en los mecanismos de fricción cónica se logra de forma gradual y no escalonada como en las cajas de cambios por ruedas dentadas, además de ser mecanismos mucho más pequeños.

Donde la relación de transmisión entre los conos es: $i_{12} = \frac{r_1}{r_2}$



En la maqueta seccionada colocar por medio de la rueda frontal el cono en uno de los extremos, para hacer este proceso debe hacerse dando vueltas a la manivela de la izquierda.
Poner la manivela en cero, así como la escala de la derecha, dar una vuelta a la manivela y anotar el ángulo desplazado en la escala.
Repetir el proceso para las demás posiciones de los discos.

Resumir los resultados en la siguiente tabla.

University Copy For Library Use

Posición	Angulo que gira la manivela	Angulo que gira la escala	Relación de transmisión
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Dibujar el gráfico de posiciones contra relación de transmisión.

Ensayo 6.- Mecanismos de frenos.

Es muy frecuente que se utilicen mecanismos para el frenado de órganos móviles de máquinas. Generalmente estos mecanismos aprovechan las fuerzas de rozamiento que surgen durante el contacto directo entre 2 superficies que tienen movimiento relativo. Otras veces se utilizan mecanismos de frenado en que no se necesita el contacto directo de 2 superficies (electromagnéticas, compresión de gases, resistencia al movimiento en fluidos).
En el caso de la práctica se utiliza un mecanismo de freno de vehículo automotriz. Dicho mecanismo funciona gracias a la fricción entre unos elementos de alto coeficiente de rozamiento fijos al bastidor de la suspensión, y un disco que gira solidario a la rueda del vehículo.

Para proceder a la práctica siga los siguientes pasos:

.1- Desmonte el mecanismo de freno y asegúrese de conocer su principio de funcionamiento. Aproveche para medir el diámetro del pistón que acciona el freno.

2- Mida las dimensiones de interés en el disco y los elementos de fricción.

3- Arme el mecanismo, y con ayuda de la bomba y la llave dinamométrica mida la relación entre la fuerza con que se aprieta el disco y el par de frenado. Para establecer dicha relación haga mediciones en el rango (0,15…0,45) Mpa (1 Mpa=9.87 atm).

4- ¿Cuánto vale el coeficiente de fricción entre el disco y los elementos de fricción?

4.- Informe.

Redactar un informe según las normas indicadas

University Copy For Library Use

2º Ingeniería Industrial 1º cuatrimestre

Práctica nº 9. Simulación de sistema masa-resorte-amortiguador

1.- Objetivo

Con esta práctica se comprobará experimentalmente la correspondencia entre la simulación de un sistema masa-resorte-amortiguador de un grado de libertad y el comportamiento del modelo físico real.

2.- Instrumentos y aparatos

1.- Maqueta de montaje del sistema.
2.- Resortes de constante elástica 1220 y 3300 N/m.
3.- Amortiguador viscoso regulable.
4.- Masas desde 1 kg.
5.- Dispositivo trazador.

3.- Desarrollo.

3.1.- Vibraciones libres no amortiguadas.

Un sistema masa-resorte que sea desviado de su posición de equilibrio oscilará libremente alrededor de esta. La desviación se producirá debido a la deformación del muelle. Se puede establecer un modelo matemático que simule lo que sucede al perturbar el equilibrio de la masa; en el modelo más simple se considera que el amortiguamiento de las oscilaciones es nulo. Dicho modelo matemático conduce a la ecuación diferencial de 2º orden de coeficientes constantes:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0\,; \qquad (1)$$

Donde:
m: masa
k: constante elástica del muelle
x: desplazamiento de la masa
Si la masa se saca de su posición de equilibrio hasta una posición x_0 y se libera (velocidad inicial V_0=0), la solución de la ecuación 1 será:

$$x(t) = \chi\,\mathrm{sen}(\omega_n t + \phi) \qquad (2)$$

Con:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}\,;$$

University Copy For Library Use

$$\chi = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_o}{\omega_n}\right)^2};$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0 \omega_n}{V_0}\right);$$

Se puede representar gráficamente un ciclo completo de la función periódica $x(t)$ en un gráfico de ejes t vs $x(t)$. En ese gráfico se podrá ver que el tiempo que tarda el ciclo es igual al periodo T de la función:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

y qué ocurre con una frecuencia f:

$$f = \frac{1}{T}$$

Donde:
T: periodo de las oscilaciones respecto del punto de equilibrio
f: frecuencia de dichas oscilaciones
ω_n: frecuencia propia del sistema
En esta práctica se comprobará la relación entre el modelo matemático y la realidad. Para ello se obtendrán gráficas de las oscilaciones libres del sistema con masas progresivas que van desde 1 kg. hasta 4 kg. También se cambiarán los muelles con lo que variará la rigidez del sistema. El conjunto de rodamientos y tornillos que se desliza por las columnas tiene una masa de 1.7 kg. Las constantes elásticas k de los muelles son:
k_1=3300 N/m
k_2=1220 N/m
y la velocidad de alimentación del papel es – aproximadamente de 0.02 m/s.

Procedimiento

- Desconecte el amortiguador del sistema masa-resorte
- Prepare el papel y el rotulador para que pueda generar la gráfica.
- Sitúe el muelle de constante k_1 y la masa de 1 kg. Mida la distancia que podrá deformar el muelle. Anote esa distancia que será la posición inicial x_0.
- Haga bajar el dispositivo que sujeta la masa hasta que esté en contacto con los calzos de goma. Sosténgalo en esa posición y cuando haga girar el cilindro de papel suelte el bloque masa resorte. Esto supone que la velocidad inicial V_0=0.
- Cuando el sistema deje de oscilar apague el motor que hace girar el cilindro de papel. Anote en una zona próxima a la gráfica dibujada los datos de la masa y el resorte.

University Copy For Library Use

- Añada otra masa de 1 kg. y repita todo el proceso.

- Cuando acabe con el muelle de constante k_1, sitúe el de constante k_2 y repita todo el experimento. Haga lo mismo con el muelle de constante k_3, pero no sitúe más de 2 kg. de masa.

- Compruébese por cálculos la coincidencia con los resultados experimentales del periodo y la frecuencia de las oscilaciones del sistema. Tenga en cuenta que al ser la velocidad inicial nula, el ángulo de fase ϕ se indefine, y que eso ocurre para ciertos valores de la función tangente.

3.2.- Vibraciones libres amortiguadas.

Si al sistema se le añade un amortiguador la ecuación 1 tendrá un término adicional debido a la amortiguación y será:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

En dependencia del coeficiente de amortiguamiento *c* el sistema estará subamortiguado, sobreamortiguado o críticamente amortiguado. Eso se refleja en el modelo matemático, pues en dependencia de la relación de *c* con *m* y *k* se obtendrán soluciones distintas para cada caso. Cuándo el sistema está subamortiguado:

$$x(t)=\chi e^{-\xi\omega_n t}\,\mathrm{sen}(\omega_d t+\phi);$$

Con $\omega_d=\sqrt{1-\xi^2\omega_n}$;

$$\xi=\frac{c}{2\sqrt{mk}}=\frac{c}{2m\omega_n}$$

Procedimiento:

Se añadirá el amortiguador y se harán mediciones con la válvula de regulación del amortiguador en las posiciones siguientes:

- Cerrada
- 1 vueltas de apertura
- 4 vueltas de apertura
- 5 vueltas de apertura
- 6 vueltas de apertura

En cada caso se obtendrán gráficas generadas por el dispositivo grabador de la maqueta para el muelle de constante k_1 con masas de 1 y 2 kg. sucesivamente. Luego se repetirá el proceso con el muelle de constate k_2. Teniendo en cuenta que el coeficiente relativo de amortiguamiento es:

University Copy For Library Use

$$\xi = \frac{c}{2\omega_n m};$$

Siendo c el coeficiente de amortiguamiento y que en dependencia del valor del ξ, el sistema estará en alguno de los siguientes estados:

- ξ<1 Subamortiguamiento
- ξ= 1 Amortiguamiento crítico
- ξ>1 Sobreamortiguamiento

Cuando el sistema está subamortiguado ξ se puede calcular también como:

$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi};$$

$$\delta = \log_e \chi_1 / \chi_2;$$

Siendo χ_1 y χ_2 las amplitudes de dos oscilaciones sucesivas.

Calcule aproximadamente el coeficiente de amortiguamiento para el amortiguador con la válvula abierta 5 y 6 vueltas y la masa de 1 kg. en ambos muelles. Observe la correspondencia entre el coeficiente de amortiguamiento relativo y la amortiguación de las oscilaciones.

3.3.- Oscilaciones forzadas

Se utilizará la máquina equilibradora y el software Vibraleq. Ejecute el programa *Vibraleq* y entre en el módulo *Excitación de type résultante*. Conecte el puente de extensometría y sitúe a 0 los canales 1 y 2 de medición. Con los platos iguales simétricos, y sin masas añadidas a ellos, desbloquee el eje del rotor.

Prepare las condiciones para adquirir datos. Flexione las láminas que soportan el rotor intentando que la fuerza esté aplicada en medio de los apoyos **A** y **B** del eje del rotor. Libere rápidamente el sistema y mida las oscilaciones de las láminas. Obtendrá una gráfica de amplitud de las oscilaciones en función del tiempo. Podrá medir con facilidad la frecuencia de dichas oscilaciones, que es la frecuencia propia del sistema.

En el programa *Vibraleq*, Apartado *Etude des Frequences Propres* inicie una adquisición de larga duración. Prepare la ventana para adquirir datos y haga girar el rotor lo más rápido posible con masas desequilibrantes situadas en platos simétricos. Déjelo girar a esa velocidad durante 3 o 4 minutos. Observe la estabilidad del movimiento del rotor en todo momento. Ajuste la escala de las curvas y observe el tipo de gráfico obtenido.

Conociendo que la resonancia se produce cuando se igualan la frecuencia propia y la frecuencia de las oscilaciones forzadas, calcule a velocidad a la cual se ha producido dicho efecto. Tenga en cuenta que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};\ f = \frac{1}{T}$$

University Copy For Library Use

La frecuencia *f* se mide en Hz, es decir, cantidad de oscilaciones que ocurren en un segundo. Por tanto si se multiplica por 60 s, y se tiene en cuenta que la galga extensométrica registra un máximo de oscilación en cada vuelta, tendremos la velocidad de giro en rpm.
Siguiendo las instrucciones del profesor compruebe la coincidencia de los cálculos con las mediciones experimentales con el uso del tacómetro.

4.- Informe

Se redactará un informe, tan breve como sea posible, en el que se reflejen los cálculos, dibujos, tablas y respuestas a las preguntas.

University Copy For Library Use

Bibliografía.

1.- Beer & Jonhston. “Mecánica vectorial para ingenieros. Estática” Mc Graw-Hill.1998.

2.- Beer & Jonhston.”Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica” Mc Graw-Hill.1998.

3.- Cardona, S; Clos , D; Teoria de Maquinas. Barcelona. Ediccion UPC. 2000

4.- Riley, William F.”Ingeniería mecánica. Estática” Revesté. 1995.

5.- Riley, William F “Ingeniería mecánica. Dinámica” Revesté. 1996.

6.- Joseph, F, Shelley. “ Mecanica para Ingenieros. Estatica” Marcombo S.A . 1985.

7.- Joseph, F, Shelley “ Mecanica para Ingenieros. Dinamica” Marcombo

8.- Apuntes para el uso de PAM
http://www.em.upc.edu/docencia/estudis_grau/etseib/teoria_maquines/programa-d-analisi-de-mecanismes-pam-1/

University Copy For Library Use